Ötletek a függvények témakörében

Székely Péter

A feladatok egy-egy problémafelvetés szemléltetőpéldái, egymástól függetlenek. A számozás nem jelöl nehézségi szintet. Az ötletekből viszont kis továbbgondolással feladatsorokat gyárthatunk.

1. Függvényábrázolások I.

1. $f : x \longmapsto |x|$ vagy $f : x \longmapsto x \cdot \operatorname{sgn} x$

2. $f : x \longmapsto |x^2 - 5x + 6|$ vagy $f : x \longmapsto (x^2 - 5x + 6) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$

3. $f :\longmapsto \dfrac{2x+3}{x-1} \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 4x)$

4. $f : x \longmapsto \left|\left|\left|\left||x| - 1\right| - 2\right| - 3\right| - 4\right|$

5. $f : x \longmapsto \left(-\left(\frac{4}{5}\left||x| - 0,7\right|\right)^2 + 0,3\right) \cdot \operatorname{sgn}(-x+1) \cdot \operatorname{sgn}(x+1)$

6. a) $f(x) = \sin(5x) + \sin(6x)$ b) $g(x) = \sin\sin x$

7. a) $f(x) = \{kx\}$ b) $f(x) = \sin(kx)$

8. Adott $f(x) = |x|$ és $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Hányféle egyszeresen összetett függvényt készíthetünk ezekből? Mik ezek? Grafikonjaik?

9. Tényleg monoton? (Feladat SB. IV./1279. alapján: $\log_{\cos x}(|y| - 2) > 0$.)

   a) $f(x) = \log_x x$ c) $f(x) = \log_{\sin(x)} x$

   b) $f(x) = \log_x \sin(x)$ d) $f(x) = \log_{2\sin(x)} x$

10. A gyerekeket érdeklő izgalmak...

    a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ b) $f(x) = \sin x \cdot e^x$ c) $f(x) = \frac{\cos 5x}{x^2+1}$

11. Szép „függvények” (a kilencedikesek ötletei, játékai).

a) $Lili\_madarkai(x) = x - \{x\}^2 - [2x]$

b) $$Balu\_virag(x) = \begin{cases} x^2+8, \quad \text{ha } -2 \le x \le 2 \\ -(x+2)^2+12, \quad \text{ha } -2 \le x \le 1 \\ -x^2+12, \quad \text{ha } -1 \le x \le 1 \\ -(x-2)^2+12, \quad \text{ha } 1 \le x \le 2 \\ 2(x+2)^2, \quad \text{ha } -2 \le x \le 0 \\ 2x^2, \quad \text{ha } -2 \le x \le -1 \\ -(x+2)^2+8, \quad \text{ha } -2 \le x \le 0,37 \end{cases}$$

c) $$Luca\_madara(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+4,5, \quad \text{ha } -1 \le x \le -0,5 \\ \frac{1}{x}, \quad \text{ha } 0,25 \le x \le 5,3 \\ 4, \quad \text{ha } -1 \le x \le 0,25 \\ \sqrt{x-1,3}+2,1, \quad \text{ha } 1,3 \le x \le 5 \\ -\frac{1}{4}(x-2,7)^2+2, \quad \text{ha } 3,6 \le x \le 5,3 \\ \frac{1}{3}(x-2,2)^2+1,3, \quad \text{ha } 2,2 \le x \le 5 \\ \sqrt{x-1,3}+2,1, \quad \text{ha } 1,3 \le x \le 5 \\ -1,5x^2+4,6, \quad \text{ha } -0,5 \le x \le 1,3 \\ \frac{1}{3}(x-2,2)^2+1,4, \quad \text{ha } 5 \le x \le 5,2 \\ \sqrt{x-1,2}+2,4, \quad \text{ha } 1 \le x \le 5,2 \end{cases}$$

d) $$Kristof\_fa(x) = \begin{cases} \left|\frac{4}{x}\right| \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-0,4} \cdot \operatorname{sgn} x + 0,4 \\ \left|\frac{4}{x}\right| \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-0,4} \\ \left(-\sqrt{x+2}+11\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-0,5} \\ \left(-\sqrt{-x+2}+11\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-0,5} \\ \left(-2\sqrt{x+3}+13\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-2} \\ \left(2\sqrt{x+3}+13\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x-2} \\ \left(\sqrt{x+2}+15\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{-x} \\ \left(\sqrt{-x+2}+15\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x} \\ \left(2\sqrt{x+3}+13\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-2} \\ \left(-2\sqrt{x+3}+13\right) \cdot \operatorname{sgn} \sqrt{x-2} \end{cases}$$

12. Paritásvizsgálat

$$a(x) = |\cos(x)| \qquad b(x) = \cos^2(x) \qquad c(x) = |x|^3 \qquad d(x) = \sin^3(x) \qquad e(x) = \operatorname{tg}|x|$$

2. Függvényábrázolások II., kitekintés „3D”-be

1. a) Benoît Mandelbrot (1924-2010.), fraktálok. $z \longmapsto z^2 + c$.

   $f : (x; y) \longmapsto$ szín

```
ciklus a=-2-től 2-ig
     ciklus b=-2-től 2-ig
     hossz=0
         ciklus amíg hossznegyzet<2, i<1000
             a=a*a-b*b+a
             b=2*a*b+b
             hossznegyzet=a*a+b*b
             i=i+1
         szin = i értéke szerint
```

   b) További játékok: Julia-halmaz, $z \longmapsto z^3 + c, \ldots$

2. Játékok GeoGebrával. (Ld. megosztott file-ok: `http://petiba.hu/?menu=geogebra#rlv`.)

   a) $Canqi_1 : (x; y) \longmapsto \cos x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} y}$

   b) $Canqi_2 : (x; y) \longmapsto \sec x + \operatorname{cosec} y$

   c) $Canqi_3 : (x; y) \longmapsto \ln x + \cos y$

   d) $Canqi_4 : (x; y) \longmapsto \sin x^2 + \cos y^2$

3. Egyenletmegoldás függvényekkel

(Hol hasznosíthatjuk függvénytani ismereteinket: értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, periodicitás, … Geogebra: „paraméteresítés” lehetősége.)

1. $\sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} = x$ (Ződ 948.)

2. a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$ (Ződ 951.)

   b) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+p}$ („paraméteresítés”)

3. a) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - x$ (Ződ 954.)

   b) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = p - x$

4. a) $x - 1 = \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}}$ (Ződ 958.)

   b) $x - 1 = \sqrt{1 - x\sqrt{p + x^2}}$

5. Adott $f(x)=\left|x+\dfrac{3}{2}\right|-\dfrac{3}{2}$ és $g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-1}, & \text{ha } x<-1\\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{ha } -1\le x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{ha } 1\le x.\end{cases}$

Adjuk meg az $f-g$ nullahelyeit. (KöMaL, 2013. január, C.1152.)

6. $\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}=|x-2|+|5-x|+3-\sqrt{3}$

7. a) $\log_2 x=\frac{1}{3}(x+1)$ (Sárga Bohóc IV. 1166.)

   b) $\log_2 x=\frac{1}{3}(x+p)$

8. a) $\lg x=2^{-x}$ (Sárga Bohóc IV. 1169.)

   b) $\lg x=2^{p-x}$

9. $2^x=x^2$ (Sárga Bohóc IV. 1102.)

10. a) $2^{-x}=-x+2$ (Sárga Bohóc IV. 1103.)

    b) $2^{-x}=-x+p$

11. $x^2+1=\cos\frac{x}{2}$

12. $\sin 5x=\sin 15x+2$

13. $\cos 6x=2-\cos 7x$

14. a) $|x-2|+|y+3|\le 4$

    b) $(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$

    c) $2(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$

15. $|2\sin x+\sin 2x|<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ (KöMaL C.1482.)