Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Feladatok

1. Párba lehet-e állítani a szabályos tízszög csúcsait úgy, hogy a párba állított pontok által meghatározott öt távolság mind különböző?

2. Tizenhat különböző magas gyereket négy sorba és négy oszlopba állítunk. Minden sorban a legalacsonyabb felteszi a bal kezét. Közöttük Jakab a legmagasabb. Minden oszlopban a legmagasabb felteszi a jobb kezét. Közöttük Boldizsár a legalacsonyabb. Ki a magasabb, Jakab vagy Boldizsár?

3. Az O_1 középpontú, R sugarú k_1 kört kívülről érinti az O_2 középpontú, $2R$ sugarú k_2 kör és mindkettőt ugyancsak kívülről érinti az O_3 középpontú, $3R$ sugarú k_3 kör. Bizonyítsa be, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre egybevágó a k_1 körrel!

4. Határozzuk meg azt a legnagyobb pozitív egész számot, amely bármely pozitív egész n-re osztója az alábbi kifejezésnek:

$$n^4(n-1)^3(n-2)^2(n-3).$$

5. Az x számról tudjuk, hogy $x+\dfrac{1}{x}=4$. Számítsa ki $\dfrac{x^2}{x^4+1}+\dfrac{1}{x^2}+x^2$ értékét!

(Olyan formában megadott érték számít teljes értékű megoldásnak, amiből kiderül, hogy a szám racionális-e vagy nem, és az is, hogy melyik a hozzá legközelebbi egész.)