Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

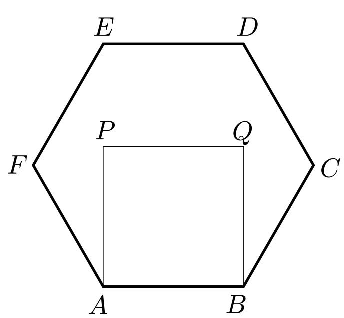
Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy $n! + 2007$ egyetlen n pozitív egész szám esetén sem prímszám, sem pedig négyzetszám. ($n!$ az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot jelenti.)

2. Adott a síkon egy egységnyi oldalú szabályos hatszög. Szerkesszünk csak vonalzó felhasználásával $\sqrt{7}$ hosszúságú szakaszt!

3. A minden valós számra értelmezett másodfokú $f(x)$ függvényre $f(x+2)+3f(-x) = 2x^2$ teljesül.

Határozzuk meg az $f(x)$ függvény értékkészletét!



4. Az ábrán látható módon helyezzük el az $ABCDEF$ szabályos egységoldalú hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belső felületén a négyzetet a következő módon: először az óramutató járásával megegyezően forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsához ér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsához ér.

Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz.

Milyen hosszú utat jár be ezalatt P?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy kocka a lapjaival párhuzamos síkdarabokkal feldarabolható 2007 darab nem feltétlenül egybevágó kisebb méretű kockára.