Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória

Feladatok

1. A „23-as szám” című misztikus filmben az egyik szereplő a házszámukat nagyon különlegesnek találja. A ház száma 1814, és az alábbi misztikus tulajdonságokat fedezi fel benne:

(1) ha az első két számjegyhez hozzáadjuk a második kettőből képzett kétjegyű számot, akkor $1 + 8 + 14 = 23$-at kapunk;

(2) ha az első két számjegyből képzett kétjegyű számhoz hozzáadjuk a másik két számjegyet, akkor $18 + 1 + 4 = 23$-at kapunk ismét;

(3) ha a két kétjegyű számot adjuk össze, akkor $18 + 14 = 32$-őt kapunk, ami épp a 23 fordított sorrendben leírva.

Tényleg különleges ebből a szempontból az 1814? Vagyis hány olyan négyjegyű szám van, amelyik rendelkezik a fenti három tulajdonság mindegyikével?

2. Határozzuk meg az A szám pozitív egész osztóinak számát, ahol:

$$A = \sqrt{1 + 2011 \cdot \sqrt{1 + 2012 \cdot \sqrt{1 + 2013 \cdot \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}.$$

3. Egy sík 20 darab egyenese összesen 187 darab metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak.

4. Egy t területű derékszögű trapézba az oldalakat érintő r sugarú kör írható, ahol $t = \dfrac{25}{4} r^2$. Mekkora a trapéz alapjainak aránya?

5. Van 2012 darab számunk $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}, a_{2012}$ mindegyik $\sqrt{2} + 1$, vagy $\sqrt{2} - 1$.

Képezzük a következő összeget:

$$S = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + \ldots + a_{2011}a_{2012}.$$

Lehet-e $S = 2012$?