

Péter Rózsa

Csokipapír ára

(Játék a végtelennel, II. fejezet: A teremtő forma,

11. szakasz: Ismét megfogjuk a végtelent - részlet)

Egy ismert matematikusunk még kisdíák korában a következő példával világította meg önmagának a végtelen sor összegének fogalmát.

Volt egy csokoládéfajta, amit úgy akartak népszerűvé tenni, hogy szelvényt is csomagoltak az burkoló ezüstpapírba, és aki 10 ilyen szelvényt beszolgáltatót, az egy újabb tábla csokoládét kapott cserébe. Ha van egy ilyen tábla csokoládém, a teljes csomagolásban, mennyit ér ez valójában?

Természetesen nemcsak 1 tábla csokoládét ér, mert a szelvény is benne van, és egy szelvényért adnak $\frac{1}{10}$ csokoládét (hiszen 10-ért lehet egy csokoládét kapni). De ehhez a tized-csokoládéhoz egy tized szelvény is jár, s ha egy szelvényért $\frac{1}{10}$ csokoládét kaphatunk, akkor az $\frac{1}{10}$ szelvényért ennek a tizedrészét: $\frac{1}{100}$ csokoládét. Ehhez az $\frac{1}{100}$ csokoládéhoz tartozik egy század szelvényrészlet is, és ezért ismét tizedannyit adnak, $\frac{1}{100}$ -nak a tizedrésze pedig $\frac{1}{1000}$ csokoládé. S í. t., a végtelenségig; látható, hogy ez sohasem szakad meg és így az én 1 tábla csokoládém szelvényestül voltaképpen

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

csokoládét ér.

Másrészt meg fogom mutatni, hogy egész pontosan $\frac{1}{9}$ csokoládé az értéke. Az ebben lévő 1 egész természetesen magának a természetben adott csokoládénak az értéke, tehát csak azt kell megmutatnom, hogy az ehhez mellékelt szelvény $\frac{1}{9}$ csokoládét ér. Ehhez elég azt bizonyítanom, hogy 9 szelvény ér 1 csokoládét, mert akkor biztos, hogy egy szelvény ennek a 9-ed részét éri. Márpedig az egy pillanat alatt igazolható, hogy 9 szelvény értéke egész pontosan 1 csokoládé. Mert tegyük fel, hogy nekem van 9 szelvényem; bemegyek a cukorkaüzletbe és ezt mondom: „Kérek egy tábla csokoládét; itt a helyszínen szeretném elfogyasztani és majd a végén fizetek.” Elfogyasztom a csokoládét, kiveszem a hozzá csatolt szelvényt, és most már 10 szelvényem van, csakugyan fizethetek, és ez tiszta üzlet: megettem egy csokoládét és egy fia szelvényem sem maradt. A 9 szelvény pontos értéke tehát valóban 1 csokoládé, 1 szelvényé $\frac{1}{9}$ csokoládé, egy csokoládéé szelvényestül $\frac{1}{9}$ csokoládé. Tehát az

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

végtelen sor összege egész pontosan $1\frac{1}{9}$, kézzel foghatóan, sőt megehetően.

Így fogalmazhatjuk meg ezt az eredményt: ha valami első, durva közelítésben 1, valamivel jobb közelítésben $1 + \frac{1}{10}$, még jobb közelítésben, de még mindig pontatlanul $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$, s.í.t. a végtelenségig, akkor ez a valami teljes pontossággal $1\frac{1}{9}$.