Problémások

Feladatok teljes indukcióra

2020. március 23.

Ha $a \in \mathbb{R}$ és $a > -1$, valamint $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Ezt hívják **Bernoulli-egyenlőtlenség**nek.
Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.

$$(1+a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz:

$$(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a$$

3. Ekkor belátom, *kedves barátom*, hogy $n = k+1$-re is igaz.

$$(1+a)^{(k+1)} \geq 1 + (k+1) \cdot a$$

A baloldalt átalakítva, majd az indukciós feltételt beírva:

$$(1+a)^{(k+1)} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) = 1 + ka + a + ka^2 \geq$$

$$\geq 1 + (k+1)a$$

$\blacksquare$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e: $2 \cdot 1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ ✓
2. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz (indukciós feltétel)

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

3. Ekkor belátom, hogy $n = k + 1$-re is igaz

$$\overbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}^{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)} + (k+1)(k+1+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)}{3}$$

$$(k+2)(k+3) = (k+2)(k+3)$$

Tehát minden n-re teljesül az állítás.

∎

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e: $1 \cdot 2 \cdot 3 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$ ✓
2. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra is igaz (ez az indukciós feltétel)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

3. Ekkor belátom, hogy $n = k + 1$-re is igaz

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$k + 4 = k + 4$$

Tehát minden n-re teljesül az állítás.

■

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) = ?$$

Sejtés:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) \cdot (1+4)}{5}$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4)}{5}$$

   indukciós feltétel.

3. Ekkor belátom, kedves barátom, hogy $n = k+1$-re is igaz.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3) = \left(\sum_{i=1}^{k} i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3) \right) + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4)$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4)}{5} + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) =$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) + 5 \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4)}{5} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5)}{5}$$

   Tehát minden n-re teljesül az állítás.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n=1$-re igaz-e.

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\frac{k}{k+1}$$

   indukciós feltétel

3. Ekkor belátom, kedves barátom, hogy $n=k+1$-re is igaz.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+1+1)}=$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

   Tehát minden n-re teljesül az állítás.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Egy nagy igazság: $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

Ezt felhasználva az egyenlőség bal oldala a következőképpen alakítható:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

(Teleszkopikus összegzés.)

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n=1$-re igaz-e.

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$$

2. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

3. Ekkor belátom, kedves barátom, hogy $n=k+1$-re is igaz.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$2k^2+3k+1=2k^2+k+2k+1$$

Tehát minden k-ra teljesül az állítás.

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n=1$-re igaz-e.

$$\frac{1}{(3\cdot 1-2)\cdot(3\cdot 1+1)}=\frac{1}{3\cdot 1+1}$$

2. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$$

3. Ekkor belátom, *kedves barátom*, hogy $n=k+1$-re is igaz.

$$\frac{k}{3\cdot k+1}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=\frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

$$\frac{k}{3\cdot k+1}+\frac{1}{(3\cdot k+1)(3\cdot k+4)}=\frac{k+1}{3\cdot k+4}$$

$$k\cdot(3\cdot k+4)+1=(k+1)\cdot(3\cdot k+1)$$

$$3\cdot k^2+4\cdot k+1=3\cdot k^2+k+3\cdot k+1$$

Tehát minden k-ra teljesül az állítás.

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=?$$

Sejtés: $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n=1$-re igaz-e.

$$\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4}$$

2. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz: (indukciós feltétel)

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}=\frac{k}{4k+1}$$

3. Ekkor belátom, *kedves barátom*, hogy $n=k+1$-re is igaz.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}\right)+\frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)}=$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{(4k+5)k+1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$=\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{(k+1)}{(4k+5)}$$

Tehát minden k-ra teljesül az állítás.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n=1$-re igaz-e.
   $(1-\frac{1}{4})=\frac{1+2}{2\cdot(1+1)}$
   $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$
2. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

3. Ekkor belátom, hogy $n=k+1$-re is igaz

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

$$\frac{k+2}{2(k+1)}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

$\blacksquare$

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{16}\right)\dots\left(1-\frac{4}{n^2}\right) = ?$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.

$\blacksquare$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots \frac{n-1}{n!} = ?$$

Sejtés: $? = \frac{n!-1}{n!}$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.
   $\frac{1-1}{1!} = 0 = \frac{1!-1}{1!}$ JÓ
   Tegyük fel, hogy $n = k$-ra is igaz:
   $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{k-1}{k!} = \frac{k!-1}{k!}$
   Ekkor belátom, hogy $n = k+1$-re is igaz:
   $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$
   - $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{k-1}{k!} = \frac{k!-1}{k!}$ (Indukciós felt. miatt)

   Ekkor láthatjuk, hogy a bal oldal = Jobb oldal bármilyen k-ra:
   $\frac{k!-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$

■

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$$

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.

$$\frac{1}{2^1 - 1} > \frac{1}{2}$$

2. tegyük fel,hogy $n = k$-ra igaz:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i - 1} > \frac{k}{2}$$

3. ekkor belátom, kedves barátom, hogy $n = k + 1$-re is igaz:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^i - 1} > \frac{k+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}$$

■