

## I.

1. A  $PQRS$  négyszög csúcsai:  $P(3; -1)$ ,  $Q(1; 3)$ ,  $R(-6; 2)$  és  $S(-5; -5)$ .

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen \* jelet a táblázat megfelelő mezőibe! Válaszait indokolja, támassza alá számításokkal!

	igaz	hamis
A		
B		
C		

a) A állítás: A  $PQRS$  négyszögnek nincs derékszöge.

b) B állítás: A  $PQRS$  négyszög húrnégyszög.

c) C állítás: A  $PQRS$  négyszögnek nincs szimmetriacentruma.

2. Legyen adott az  $f : [-2,5; 2,5] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$  függvény.

a) Határozza meg az  $f$  függvény zérushelyeit!

b) Vizsgálja meg az  $f$  függvényt monotonitás szempontjából!

c) Adja meg az  $f$  függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol  $x$  és  $y$  valós számok!

$$\left. \begin{array}{l} 10^y = x - 3 \\ \lg(x^2 - 4x + 3) = 2y + 1 \end{array} \right\}$$

4. a) Legyen  $(a_n)$  egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

b) Legyen  $(b_n)$  egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a differenciája 3.

Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

## II.

**Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!**

5. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

6. Egy közvélemény-kutató intézet felméréséből kiderült, hogy a felnőttek 4%-a színtévesztő.

Véletlenszerűen kiválasztunk 8 felnőttet abból a népességből, melyre ez a felmérés vonatkozott.

Mekkora a valószínűsége, hogy közöttük

a) pontosan két személy színtévesztő?

b) legalább két személy színtévesztő?

A két valószínűség értékét ezred pontossággal adja meg!

Ebben az intézetben 8 férfi és 9 nő dolgozik főállásban. Egy megbeszélés előtt, amikor csak ez a 17 főállású kutató jelent meg, a különböző nemű kutatók között 45 kézfogás történt. Tudjuk, hogy minden nő pontosan 5 férfival fogott kezét, és nincs két nő, aki pontosan ugyanazzal az öttel.

c) Lehetséges-e, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezét?

7. A világhírű GAMMA együttes magyarországi koncertkörútja során öt vidéki városban lépett fel. Az alábbi táblázat tartalmazza a körút néhány üzleti adatát.

Város	Fizető nézők száma	Egy jegy ára (Ft)	Bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)
Debrecen	12350		14820
Győr	8760		12264
Kecskemét		1600	22272
Miskolc	9970	1500	
Pécs		1300	15405

a) A koncertturné során melyik városban adták el a legtöbb jegyet?

b) Mennyi volt az összes eladott jegy átlagos ára?

Bea elment Budapesten a GAMMA együttes koncertjére, és becslése szerint ott 50 000 ember hallgatta a zenét. Peti Prágában volt ott az együttes koncertjén, ahol a nézők számát 60 000 főre becsülte. A GAMMA együttes menedzsere, aki ismerte a tényleges nézőszámokat, elárulta, hogy:

- Budapesten a tényleges nézőszám nem tér el 10 %-nál többel a Bea által adott becsléstől.
- Peti becslése nem tér el 10 %-nál többel a tényleges prágai nézőszámtól.

c) Mekkora a budapesti nézőszám és a prágai nézőszám közötti eltérés lehetséges legnagyobb értéke, a kerekítés szabályainak megfelelően ezer főre kerekítve?

d) A fenti adatok ismeretében előfordulhatott-e, hogy Budapesten és Prágában ugyanannyi ember volt a GAMMA együttes koncertjén?

8. a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a  $[-3; 4]$  intervallumon az  $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$  hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

b) Legyen az  $f$ ,  $g$  és  $h$  függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk:  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ;  $g(x) = x - 3$ ;  $h(x) = |x|$ .

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6.$$

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az  $f$ ,  $g$  és  $h$  függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket!

Sorolja fel valamennyit! (A  $(g \circ f)(x)$  függvényt nem szükséges újra felírni.)

c) Keressen példát olyan  $p$  és  $t$ , a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre

$$(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x) !$$

Adja meg a  $p$  és a  $t$  függvény hozzárendelési szabályát!

9. Az  $ABCD A'B'C'D'$  téglatestben úgy jelöltük a csúcsoakat, hogy az  $ABCD$  alaplappal egybevágó lapon az  $A'$  csúcsoat az  $A$ -val, a  $B'$  csúcsoat a  $B$ -vel, a  $C'$  csúcsoat a  $C$ -vel, a  $D'$  csúcsoat a  $D$ -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a  $DAD'$  szög  $45^\circ$ -os, a  $BAB'$  szög  $60^\circ$ -os.

a) Mekkora a  $B'AD'$  szög koszinusza?

b) Mekkora az  $AB'A'D'$  tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle  $10$ ?

c) Mekkora az  $AA'D'$  és az  $AB'D'$  síkok hajlásszöge?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3	4a	4b	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	7c	7d	8a	8b	8c	9a	9b	9c
4	4	5	4	6	4	11	6	7	9	7	3	8	5	3	4	6	3	6	6	4	6	4	6