I.

1. Egy 2011-ben készült statisztikai összehasonlításban az alábbiakat olvashattuk: *„Ha New York-ban az átlagfizetést és az átlagos árszínvonalat egyaránt 100%-nak vesszük, akkor Budapesten az átlagfizetés 23,6%, az átlagos árszínvonal pedig 70,9%. (Az árszínvonal számításához 122 áru és szolgáltatás árát hasonlították össze.)”*[1]
Feltételezve, hogy az idézet megállapításai igazak, válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) Ha Budapesten a havi átlagfizetés 150 ezer forint, akkor hány dollár ($) a havi átlagfizetés New York-ban, 190 forint/dollár (Ft/$) árfolyammal számolva? Válaszát egész dollárra kerekítve adja meg!

b) Ha a New York-i havi átlagfizetésből egy bizonyos termékből 100 kg-ot vásárolhatunk New York-ban, akkor körülbelül hány kg-ot vásárolhatunk ugyanebből a termékből a budapesti havi átlagfizetésből Budapesten? (Feltehetjük, hogy a szóban forgó termék budapesti egységára 70,9%-a a termék New York-i egységárának.)

[1] http://www.penzcentrum.hu/vasarlas/egy_hetig_sem_birnank_magyar_fizetesbol_a_legdragabb_varosokban.1029425.html

2. A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$ -szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai?

3. Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és felszínét (cm^2-ben)!

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

4. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$.

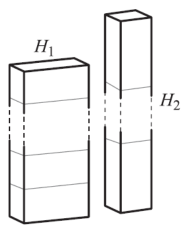
b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Két egyenes hasábot építünk: H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az **ábra** szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0{,}8$.

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

b) Igazolja, hogy a $\left\{\dfrac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $\left(n \in \mathbf{N}^+\right)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

6. Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* osztály egy-egy csapattal vett részt.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az *A* és a *B* osztály végzett az első két helyen, a *D* osztály pedig nem lett utolsó?

b) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az *E* osztály megelőzte az *F* osztályt?

A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett *B* osztály legyőzte a bajnok *A* osztályt.

c) Mutassa meg, hogy a *B* és a *D* osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!

7. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az *x* tengely és az egyenes metszéspontját *P*, az *y* tengely és az egyenes metszéspontját pedig *Q*. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az *OPQ* háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (*O* a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

8. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

9. a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60º-os szöge!

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	6c	7	8a	8b	8c	9a	9b
4	7	8	5	4	9	4	3	7	8	8	4	4	8	16	5	4	7	5	11