I.

1. Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ± 10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot.
A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását?

b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását!

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg?
Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

2. Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: *„Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.”*

a) Mutassa meg, hogy ha a golyókat **visszatevés nélkül** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése igaz!

b) A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót **visszatevéssel** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz!

3. a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is.
Határozza meg ezt a három számot!

Tekintsük a következő állítást:
Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.
(Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

4. a) A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk.
Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz!

Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Oldja meg **a [4; 6] alaphalmazon** az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\left|5-|x|\right| = 3$

b) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+10} - 1$

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$

6. a) Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

b) Az *A, B, C, D, E, F, G, H* pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az *A* csúcsból indul ki!

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)

7. Adott az f, a g és a h függvény:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x) = 2^x - 1$;
$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ g(x) = 3x + 2$;
$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ h(x) = 12 - x^2$.

a) Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és külső függvénye a h (vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.

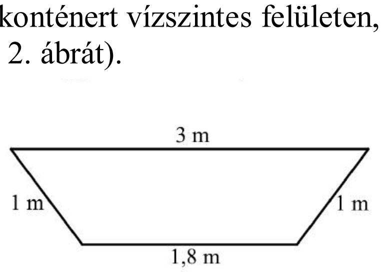
b) Oldja meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

c) Mekkora a h és az $x \mapsto -4$ ($x \in \mathbf{R}$) függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület?

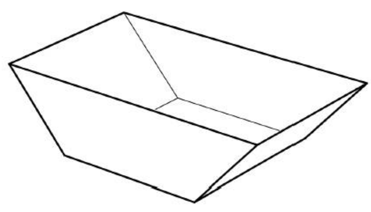
8. Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van!

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak.
A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m × 2 m-es (téglalap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát!
Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m^3 térfogatú folyadék!

9. A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}\left(x^2 - 1800x + 950000\right)$ összefüggés adja meg.

Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5 580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz! ($v > 0$)

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \text{ km/h} \le v \le 1\,100 \text{ km/h}$.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**, és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c
4	3	7	5	5	6	3	4	4	10	3	6	7	4	6	6	3	7	6	5	11	5	3	8