I.

1. Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0; 0)$, $B(30; 0)$, $C(30; 48)$, $D(0; 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!

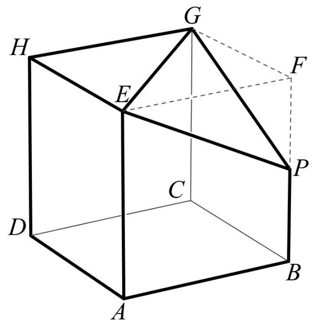
A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 819 = 0$ alakban adta meg.

b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének!

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18; 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

2. A 6 cm oldalélű tömör $ABCDEFGH$ kocka BF élén megjelöltük az él P felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az E, G, P pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).



a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?

b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka $EFGH$ lapjának síkja?

3. a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15 ?

b) Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

4. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx = 0$ teljesüljön!

c) Határozza meg az $f:]-4; -1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

II.

Az 5 – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok tölteskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor tölteskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele?

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor tölteskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)?

Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor tölteskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a tölteskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 ak-kumulátor közül hármat vásárol meg.

c) Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a tölteskapacitása?

6. a) *Ha $a|b$ igaz, akkor $a|b^2$ is teljesül* (a és b pozitív egész számok).
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!
($a|b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

7. A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz?

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!

I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.

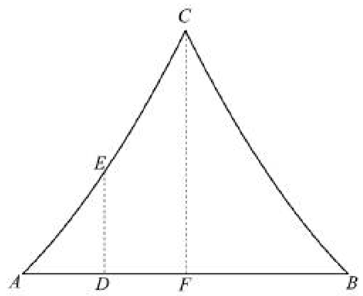
II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer.

Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.

c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg!

8. Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság?



Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el.
A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2{,}5$ méter.

b) Hány négyzetméter a homlokzat területe?

9. A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99 ?

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot!

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbf{Z}^+$).

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b	9c
3	4	5	8	4	5	8	3	4	7	4	6	6	3	7	2	4	4	7	5	5	11	3	4	9