ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. október 19.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2021. október 19. 8:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$(2^x - 3)^2 = 2^{x+1} + 9$$

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.
Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$."

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

a)	7 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	14 pont	

2. Margiték autójában a fedélzeti számítógép kiszámítja, hogy az autó üzemanyagtartályában lévő benzin még hány kilométer megtételéhez elegendő. Nevezzük ezt *hátralévő távolság*nak. A számításhoz a gép a legutolsó tankolás óta mért átlagos fogyasztást veszi alapul, és úgy számol, hogy az autó a jövőben is ezzel az átlagfogyasztással fog haladni. A legutóbbi tankolás alkalmával teletöltötték az autó üzemanyagtartályát, így 45 liter benzin volt benne. A tankolás óta éppen 200 kilométert tettek meg a városban, ekkor az autó átlagfogyasztása 10 liter volt 100 kilométerenként.

a) Számítsa ki a városi autózás után a *hátralévő távolság*ot!

A 200 kilométeres városi autóhasználatot követően Margiték egynapos autós kirándulást tettek vidéken, ezalatt összesen 100 kilométert autóztak (újabb tankolás nélkül). A kirándulás végén a kijelző alapján 200 kilométerre elegendő benzin maradt, azaz ennyi lett a *hátralévő távolság*.

b) Mennyi volt az autó 100 km-re vonatkozó átlagfogyasztása a kirándulás során?

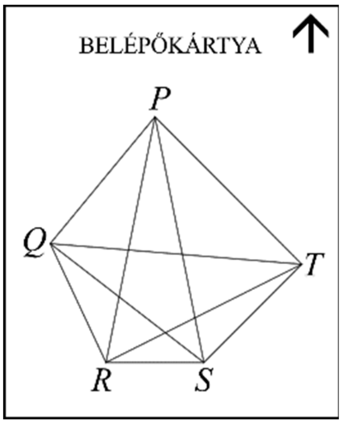
a)	3 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	9 pont	

3. **a)** Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?

b) A 8-as számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-es számrendszerben is háromjegyű?

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

4. Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a *PQRST* konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.)
A konferenciának 400 résztvevője lesz.



a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya?

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai A, B és C, akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe 2000 m^2. (D az AB oldalon van.)

b) Milyen hosszú a CD kerítés?

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga?

a)	3 pont	
b)	7 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább,

$a_n = \binom{n+1}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását!

b) A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Mennyi a (b_n) sorozat határértéke?

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 $(n \in \mathbf{N}^+)$.

c) Határozza meg n értékét!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.[1]

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg?

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

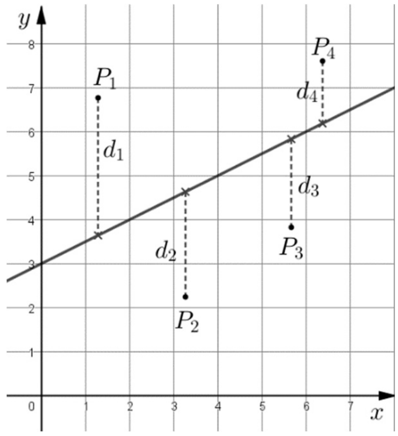
b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk?

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

[1] Forrás: *Dr. Lévárdi László – Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok, Budapest, Tankönyvkiadó, 1982.*

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.
Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



a) Határozza meg az $R(4; 2)$ és az $S(4; 5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ egyenestől!

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak **négyzetösszege** (az ábrán látható példában $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$).
Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.
Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A*, B és C pontokra! ($m \in \mathbf{R}$)

Az $y=\frac{1}{3}(-2x^2+11x)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott A és B pontokon, a h egyenes pedig az origón és a C ponton.

c) Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe?

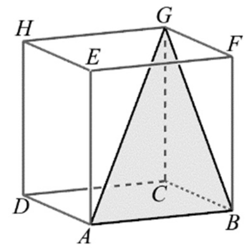
a)	3 pont	
b)	6 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

8. Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska” csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek!

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete? (Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.)



Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.

c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát!

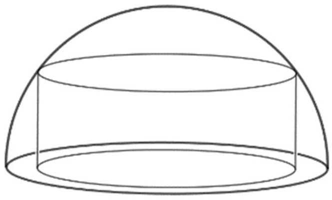
a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara r, magassága h, a másik alapkörének sugara R, magassága szintén h. A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak h magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk (r, h, $R > 0$).

a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$.
(Az öntés során fellépő anyagveszteségtől eltekinthetünk.)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m - \pi m^3$. ($0 < m < 15$)

c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	14		51	
	2.	9			
	3.	14			
	4.	14			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum — javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum — dátum

javító tanár — jegyző