TÉRBELI SOKSZÖG

Kössük össze szakaszokkal a tér n pontját ($n \geqq 3$) úgy, hogy az első pontból a másodikba, innen a harmadikba megyünk és így tovább, és az utolsó pontból visszatérünk az elsőbe. Az így kapott alakzatot sokszögnek nevezzük. (A szakaszoknak ne legyenek belső közös pontjai.) Ha a pontok nincsenek mind egy síkban, torzsokszögről beszélünk.

1882. Lehet-e egy torznégyszögnek egy síkra való merőleges vetülete paralelogramma?

1883. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma csúcspontjai.

1884. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög két szemközti oldalának felezőpontjai és a két átló felezőpontjai egy paralelogramma csúcspontjai.

1885. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög szemközti oldalainak felezőpontjait, továbbá az átlók felezőpontjait összekötő szakaszok bármelyike felezi a másikat.

1886. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög oldalainak felezőpontjai által meghatározott paralelogramma középpontja egyszersmind a két átló felezőpontjait összekötő szakasznak is felezőpontja.

1887. Bizonyítsuk be, hogy azok a szakaszok, amelyek egy torznégyszög két szomszédos oldalának egy-egy pontját összekötik a szemközti oldalt a párjáéval megegyező arányban osztó megfelelő ponttal, metszik egymást, azonkívül mindegyik szakasz olyan arányban osztja a másikat, amely arányban a végpontjai osztották az illető oldalpárt.

1888. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges sík egy adott torznégyszög oldalait olyan arányban osztja, amelyek szorzata az egység.

1889. $A_1B_1C_1D_1$ és $A_2B_2C_2D_2$ legyenek különböző síkban elhelyezkedő paralelogrammák. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai.

1890. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú torzsokszög szögeinek összege kisebb, mint az n oldalú síksokszög szögeinek összege.

TRIÉDER-SZÖGLETTARTOMÁNY

Egy gúla csúcsából mint kezdőpontból induló, az oldalélekre illeszkedő félegyenesek szöglettartományt (szögletet) alkotnak. A gúla csúcsát a szöglet csúcsának, a félegyeneseket éleknek, két félegyenes alkotta szöget oldalaknak, két oldal félsíkjának hajlásszögét pedig a szöglet szögének nevezzük. A szöglet konvex, ha konvex sokszögalapú gúlából származtatható. Az alábbi feladatokban mindig konvex szögletre gondoljunk.

A háromélű konvex szöglettartományt triédernek nevezzük.

1891. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

1892. Bizonyítsuk be, hogy egy n oldalú testszöglet bármely oldala kisebb a többi oldal összegénél.

1893. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder két oldalának a különbsége kisebb a harmadik oldalnál.

1894. Bizonyítsuk be, hogy a triéderben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és megfordítva: nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

1895. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder oldalainak összege kisebb, mint 360°.

1896. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú testszöglet oldalainak összege kisebb, mint 360°.

1897. Adott egy triéder, vegyünk fel a belsejében egy pontot, és ebből a pontból bocsássunk merőleges félegyenest a triéder mindhárom oldalára. Egy újabb triéder három élét kaptuk. Ezt a triédert az eredeti triéder polártriéderének nevezik. Bizonyítsuk be, hogy a polártriéder oldalai az eredeti triéder szögeinek a kiegészítő szögei, és szögei az eredeti triéder oldalainak a kiegészítő szögei.

1898. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder szögeinek összege nagyobb, mint 180°.

1899. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú testszöglet szögeinek összege nagyobb, mint $(n-2)\pi$.

1900. Bizonyítsuk be, hogy a triéder két szögének összegéből levonva a harmadik szöget, 180°-nál kisebb értéket kapunk.

1901. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő szárú triéderben két szög megegyezik. (Egyenlő szárúnak nevezzük a triédert, ha két oldala megegyezik; a harmadik oldalt nevezzük alapnak.)

1902. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú triéder egyenlő oldalai bezárta szögének felezősíkja felezi az alapot, és merőleges rá.

1903. Bizonyítsuk be, hogy a triéder egyenlő szárú, ha egyik élén és a szemközti oldal felezőjén átmenő sík merőleges erre az oldalra.

1904. Bizonyítsuk be, hogy a triéder egyenlő szárú, ha egyik szögének felezősíkja merőleges a szemközti lapra.

1905. Adott két sík és egy egyenes. Fektessünk az egyenesen át olyan síkot, amely az adott két síkkal egyenlő szárú triédert alkot. (Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a két egyenlő oldal az adott síkokon lesz vagy egyikük a keresett síkon.)

1906. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a szögeknek az összege, melyeket a triéder egy-egy éle a szemközti oldallal bezár, az oldalak összege és félösszege közé esik.

1907. Az SA, SB, SC félegyenesek alkossanak egy triédert. SD félegyenes haladjon a triéder belsejében. Bizonyítsuk be, hogy

$$ASD\sphericalangle + DSB\sphericalangle < ASC\sphericalangle + CSB\sphericalangle.$$

1908. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder belsejében annak csúcsából kiinduló félegyenes és a triéder élei által bezárt szögek összege kisebb, mint a triéder oldalainak összege, de nagyobb, mint az oldalak összegének fele.

1909. Adott egy triéder három oldala. Szerkesszük meg a szögeket.

1910. Adott egy triéder két oldala és a közbezárt szög. Szerkesszük meg a hiányzó oldalt és a szögeket.

1911. Adott egy triéder egyik oldala és a rajta fekvő két szöge. Szerkesszük meg a hiányzó oldalakat és szöget.

1912. Adott egy triéder három szöge. Szerkesszük meg az oldalakat.

1913. Bizonyítsuk be, hogy a triéderben két oldal sinusának hányadosa egyenlő a szemközti szögek sinusának hányadosával.

1914. Bizonyítsuk be, hogy a triéder szögeinek felezősíkjai egy egyenesben metszik egymást.

1915. Bizonyítsuk be, hogy a triéder oldalai mellékszögének szögfelezői egy síkban vannak.

1916. Bizonyítsuk be, hogy a triéder két oldalának szögfelezője és a harmadik oldal mellékszögének felezője egy síkban vannak.

1917. Bizonyítsuk be, hogy a triéder oldalaira azok szögfelezőiben emelt merőleges síkok egy egyenesben metszik egymást.

1918. Bizonyítsuk be, hogy a triéder éleit a szemközti oldal szögfelezőjével összekötő síkok egy egyenesben metszik egymást.

1919. Bizonyítsuk be, hogy a triéder élein átmenő, a szemközti oldalra merőleges síkok egy egyenesben metszik egymást.

1920. Az SA, SB, SC félegyenesek alkossanak egy triédert. Jelöljük az éleknek a szemközti oldalon való merőleges vetületét SA', SB', SC'-vel. Ezek egy újabb triéder élei. Bizonyítsuk be, hogy az újabb triéder szögeinek felezősíkjai az SAA', SBB', SCC' síkok.

1921. Adott egy triéder. A triéder csúcsán átmenő egyenesek közül határozzuk meg azt, amely a triéder lapjaival egyenlő szögeket zár be.

1922. Adott egy triéder. A csúcsában állítsunk minden élére az éllel szemben fekvő oldal síkjában merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ez a három merőleges egy síkban van.

1923. Bizonyítsuk be, hogy ha egy triéder mindhárom oldala derékszög, akkor a szögei is derékszögek. (Az ilyen triédert röviden: derékszögű triédernek nevezzük.)

1924. Bizonyítsuk be, hogy ha egy triéder szögei derékszögek, akkor az oldalai is derékszögek.

1925. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű triéder minden síkmetszete hegyesszögű háromszög.

1926. Egy derékszögű triédert egy sík az ABC háromszögben metsz. Vetítsük a triéder csúcspontját merőlegesen az ABC háromszög síkjára. Bizonyítsuk be, hogy a vetület a háromszög magasságpontja.

1927. Egy S csúcspontú derékszögű triéder tetszőleges síkmetszete legyen az ABC háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az SBC, SCA, SAB háromszögek területének mindegyike geometriai közepe a metszősíkra való vetületének és az ABC háromszög területének.

1928. Egy S csúcspontú derékszögű triéder tetszőleges síkmetszete legyen az ABC háromszög. Bizonyítsuk be, hogy az SBC, SCA, SAB háromszögek területének négyzetösszege egyenlő az ABC háromszög területének négyzetével.

1929. Adott ABC háromszöghöz keressük azt a derékszögű triédert, amelynek élei e háromszög csúcspontjaihoz illeszkednek. Mi a megoldhatóság feltétele?

1930. Bizonyítsuk be, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz létezik a térnek olyan pontja, amelyből a háromszög bármelyik csúcsát a szemközti oldalegyenes tetszőleges pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik.

1931. Keressük egy derékszögű triéder olyan síkmetszetét, amely adott háromszöggel egybevágó.

1932. Keressünk olyan derékszögű triédert, hogy éleinek egy adott síkon való merőleges vetülete három adott egyenes. A megoldhatóság feltétele?

1933. Adott a raj…
triéder síkm…
lappal bezárt …

1934. Bizonyítsuk be…
belsejében h…
amelyeknek ö…

1935. Derékszögű t…
egyenes. Jelö…
α, β, γ-val. B…

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta -$ …

1936. Egy derékszög…
két egyenest. …
egyik egyenes a …
viszont α_2, ille…

1937. Adott egy derék…
nak be. Bizony…

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta -$ …

1938. Bizonyítsuk be …
olyan síkkal, hogy …

1939. Legyenek egy t…
és a szög cosin…

TETRAÉDER

Tetraédernek nevezik a …
testet. Négy csúcsa, hat …
is nevezik.

1940. Hány részre osztja …

1941. Bizonyítsuk be, hogy …
a) a tetraéder súly…
összekötő egyene…
pontot a tetraéd…
b) a súlypont a súly…

1942. Bizonyítsuk be, hogy …
összekötő egyenes át…
szakaszt.

1943. Az $ABCD$ tetraéder …
az A', B', C', D' pont…
a két tetraéder kölcsö…
arányát.

1944. Tekintsük egy tetraéd…
merőlegesen a negyedi…
dik laphoz hasonló és …
csúcspontjai.

1945. Bizonyítsuk be, hogy …
mennek át.

9*

1933. Adott a rajzlapon egy hegyesszögű háromszög. Legyen ez egy derékszögű triéder síkmetszete. Szerkesszük meg a rajzlapon a triéder éleinek a rajzlappal bezárt szögeit.

1934. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű triéder csúcspontján átmenő és annak belsejében haladó egyenes olyan hegyesszögeket zár be a triéder oldalaival, amelyeknek összege kisebb 180°-nál.

1935. Derékszögű triéder belsejében, a csúcspontján át, haladjon egy tetszőleges egyenes. Jelöljük ennek az egyenesnek az élekkel bezárt szögét rendre α, β, γ-val. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1.$$

1936. Egy derékszögű triéder belsejében vegyünk fel a csúcsponton átmenő két egyenest. Mekkora szöget zár be ez a két egyenes egymással, ha az egyik egyenes a triéder egy-egy élével α_1, illetve β_1 szöget zár be, a másik viszont α_2, illetve β_2 szögeket?

1937. Adott egy derékszögű triéder. A triéder élei egy síkkal α, β, γ szögeket zárnak be. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 2.$$

1938. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyoldalú szögletet lehet metszeni olyan síkkal, hogy a síkmetszet paralelogramma legyen.

1939. Legyenek egy triéder oldalai egyenlők. Milyen összefüggés van az oldal és a szög cosinusa között?

TETRAÉDER

Tetraédernek nevezik a tér négy nem egy síkba eső pontja által meghatározott testet. Négy csúcsa, hat éle és négy háromszöglapja van. Háromoldalú gúlának is nevezik.

1940. Hány részre osztja a teret a tetraéder négy lapjának síkja?

1941. Bizonyítsuk be, hogy

a) a tetraéder súlyvonalai (egy csúcsot a szemközti lap súlypontjával összekötő egyenes a tetraéder súlyvonala) egy ponton mennek át (ezt a pontot a tetraéder súlypontjának nevezik);

b) a súlypont a súlyvonalat 1:3 arányban osztja.

1942. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontját összekötő egyenes átmegy a tetraéder súlypontján, és a súlypont felezi a szakaszt.

1943. Az $ABCD$ tetraéder BCD, CDA, DAB, ABC lapjainak súlypontjai rendre az A', B', C', D' pontok. Ezek egy újabb tetraéder csúcspontjai. Milyen a két tetraéder kölcsönös helyzete? Határozzuk meg a két tetraéder éleinek arányát.

1944. Tekintsük egy tetraéder három lapjának súlypontját. Vetítsük rá ezeket merőlegesen a negyedik lapra. Bizonyítsuk be, hogy a vetületek a negyedik laphoz hasonló és hasonló helyzetű harmadára kicsinyített háromszög csúcspontjai.

1945. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder éleit merőlegesen felező síkok egy ponton mennek át.