## TETRAÉDER ÉS PARALELEPIPEDON

**2069.** Adott egy paralelepipedon. Húzzuk meg az egyik csúcsból kiinduló lapátlókat. Bizonyítsuk be, hogy ezek végpontjai olyan tetraédert határoznak meg, melynek mindegyik éle a paralelepipedon egy lapátlója. (Az ilyen tetraédert paralelepipedonba írt tetraédernek és az ilyen paralelepipedont a tetraéder köré írt paralelepipedonnak nevezzük.)

**2070.** Bizonyítsuk be, hogy minden paralelepipedonba két tetraéder írható.

**2071.** Fektessünk egy tetraéder mindegyik élén át a szemközti éllel párhuzamos síkot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a síkok egy a tetraéder köré írt paralelepipedont határoznak meg.

**2072.** Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéder köré csak egy paralelepipedon írható.

**2073.** Bizonyítsuk be, hogy a kockába írt tetraéder szabályos.

**2074.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder köré írt paralelepipedon kocka.

**2075.** Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder két szemközti éle?

**2076.** Kössük össze a szabályos tetraéder három csúcspontját a negyedik csúcshoz tartozó magasságvonal felezőpontjával. Bizonyítsuk be, hogy így három, páronként egymásra merőleges egyenest kapunk.

**2077.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraédert lehet négyzetben metszeni.

**2078.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder merőleges vetülete lehet négyzet.

**2079.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder összes téglalapmetszetének kerülete állandó.

**2080.** Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraéder metszhető paralelogrammában.

**2081.** Adott tetraédert messünk el két szemközti éllel párhuzamos síkkal. Mikor lesz a metszet területe a legnagyobb?

**2082.** Tekintsük a nem egy síkban fekvő $AB$ és $CD$ szakaszokat. Legyen $M$, $N$ a szakaszok középpontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AD+BC}{2} > MN.$$

**2083.** Határozzuk meg a tetraéder és a köré írt paralelepipedon térfogatának arányát. (A tetraéder köré írt paralelepipedonról lásd a 2069. feladatot.)

**2084.** Határozzuk meg az ugyanabba a paralelepipedonba írt két tetraéder közös részének a térfogatát.

**2085.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder akkor és csak akkor ortocentrikus, ha a köré írt paralelepipedon élei egyenlők.

·**2086.** Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder térfogatát megkapjuk, ha két szemközti él szorzatát szorozzuk a normáltranszverzálisuk hosszának a hatodrészével.

**2087.** Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraéderben a szemközti élek szorzatai a normáltranszverzálisukkal fordított arányban vannak.

**2088.** Bizonyítsuk be, hogy a téglatestbe írt tetraéder lapjai egybevágók.

**2089.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a köré írt paralelepipedon téglatest.

**2090.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a lapok hegyesszögű háromszögek.

**2091.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő egyenesek az élek normáltranszverzálisai, akkor a tetraéder köré írt paralelepipedon téglatest.

**2092.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egyenlő területűek, akkor egybevágók is.

**2093.** Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelepipedon egy csúcsba futó három éle szabályos tetraédert határoz meg, akkor a paralelepipedonnak van szabályos hatszögmetszete.

**2094.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder éltengelyei (szemközti élek felezőpontját összekötő egyenesszakasz) egyenlők, akkor a tetraéder ortocentrikus.

**2095.** Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder éltengelyei egyenlők.

**2096.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder beírt és köré írt gömbjének középpontja akkor és csak akkor eshet egybe, ha a tetraéder lapjai egybevágók.

**2097.** Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder köré írt gömbjének középpontja és súlypontja akkor és csak akkor esik egybe, ha a tetraéder lapjai egybevágók.

**2098.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ tetraéder súlypontja a körülírt gömb $O$ középpontjába esik, akkor

$$\cos BOC\sphericalangle + \cos COA\sphericalangle + \cos AOB\sphericalangle = -1.$$

**2099.** Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata hatodrésze annak a szorzatnak, amelynek egyik tényezője két szemközti éle normáltranszverzálisának a hossza, a másik pedig olyan paralelogramma területe, amelynek oldalai egyenlők, és párhuzamosak a két éllel.

**2100.** Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $O$ csúcspontú triéder élein meg lehessen határozni az $A$, $B$, $C$ pontokat úgy, hogy az $OABC$ tetraéder szemben fekvő élei egyenlők legyenek?

## HASÁB

**2101.** Bizonyítsuk be, hogy a háromoldalú hasáb legnagyobb oldallapjának területe kisebb, mint a másik kettőének összege.

**2102.** Bizonyítsuk be, hogy minden $n$ oldalú hasábban az oldallapok hajlásszögeinek összege $(n-2)\ 180°$.

**2103.** Három adott, nem egy síkban fekvő párhuzamos egyenesen jelöljünk ki azonos hosszúságú $AA'$, $BB'$, $CC'$ szakaszokat. Bizonyítsuk be, hogy az így meghatározott hasáb térfogata csupán az adott párhuzamosok helyzetétől és az $AA'$, $BB'$, $CC'$ oldalélek közös hosszúságától függ, de független attól, hogy ezek hol helyezkednek el a három egyenesen.

**2104.** Bizonyítsuk be, hogy a háromoldalú hasáb térfogata egyenlő egyik oldallapja területének és a szemközti éltől való távolságának félszorzatával.

**2105.** Adott három, nem egy síkban levő párhuzamos egyenes. Ezek egyikén kijelölünk egy $AB$ szakaszt; a másik kettőn egy-egy tetszőleges $C$, $D$ pontot. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert $ABCD$ tetraéder térfogata független az $A$, $B$, $C$ pontok helyzetétől, valamint attól, hogy melyik egyenesen helyeztük el az $AB$ szakaszt, csak a szakasz hossza ne változzék.

**2106.** Egy $n$ oldalú ferde hasábot az oldalélekre merőleges síkkal vágjunk ketté úgy, hogy az alapokat ne vágjuk szét (ha lehet). Bizonyítsuk be, hogy a két darab úgy is összeilleszthető, hogy egyenes hasábot nyerünk. Az így kapott hasáb térfogata megegyezik az eredeti hasáb térfogatával. Mit mondhatunk a két hasáb felszínéről?

**2107.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n$ oldalú ferde hasábból készíthető vele egyező oldalélű, oldalfelszínű és térfogatú, de kisebb felszínű $n$ oldalú egyenes hasáb.

**2108.** Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő térfogatú téglatestek között a kockának van a legkisebb felszíne.

**2109.** Adott egy $n$ oldalú érintősokszög. Hogyan vágható ki ebből egy egyenes, nyitott hasáb hálózata (alap és oldallapok), amelynek alapja a beírható kör középpontjából való kicsinyítéssel származtatható úgy, hogy a hasáb térfogata a lehető legnagyobb legyen?

**2110.** Az $n$ oldalú egyenes hasáb $AA'$ élének egy adott $P$ pontjából ugyanezen él egy adott $P'$ pontjába kell a hasáb palástjának körüljárásával a legrövidebb úton eljutni. Határozzuk meg az utat.

**2111.** Szabályos háromoldalú hasábot oly síkkal metszünk, amelyik átmegy egy alapélen, és az alaplappal 45°-os szöget zár be. Mekkora a kimetszett idom területe, ha az alaplap területe $\sqrt{50}$?

**2112.** Számítsuk ki az egy nes hasáb térfogatát, ha a magassága $m$, és az alaplapja $n$ oldalú szabályos sokszög, melynek oldala $a$.

**2113.** Mekkora a $\gamma$ fajsúlyú anyagból készült $Q$ súlyú egyenes hasáb alapéle, ha az alaplapja szabályos hatszög, és oldallapjai négyzetek?

**2114.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 0,4 cm, és magassága 23 cm. Mekkora a térfogata?

**2115.** Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 3,4 cm, oldaléle 8,02 cm. Mekkora a térfogata?

**2116.** Egy 82 cm magasságú háromoldalú hasáb alapéleinek hossza 33, 42, illetve 54 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2117.** Egy háromoldalú hasáb alapélei 2,18 m, 1,7 m. A nagyobbikkal szemközti szöge 58°23′. Térfogata 26,75 m³. Mekkora a magassága?

**2118.** Egy hasáb súlya 175,8 kp, anyagának fajsúlya 0,3, magassága 3 dm. Mekkora az alapterülete?

**2119.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 18 dm. Az egyik alapélen és a szemközti csúcsponton átmenő síkmetszet az alaplappal 62,7°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

**2120.** Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplap 5 cm élű, 63°-os szögű rombusz. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2121.** Egy 43 cm magasságú egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú trapéz, amelynek párhuzamos oldalai 21 és 16 cm, szárai pedig 9 cm hosszúak. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2122.** Milyen súlyos az a szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú bazalttömb, amelynek alapéle 0,24 m; magassága 2,46 m és a bazalt fajsúlya 2,85?

**2123.** Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábból az oldalélekkel párhuzamosan lehasítunk részeket úgy, hogy szabályos 12 oldalú hasáb maradjon meg. Számítsuk ki a két hasáb térfogatának arányát.

**2124.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm. A palást területe az alaplap területének hatszorosa. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

**2125.** Egy csatorna keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amelynek két párhuzamos oldala 3 és 2 m; magassága 1,6 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül óránként, ha a víz folyásának sebessége 1,4 m másodpercenként, és a víz magassága mindenütt 1 m?

**2126.** Egy 10 m-es magas vasúti töltés felül 20 m széles. Emelkedése 2:3 (emelkedés = az oldal hajlásának tangense). Hány $m^3$ földmunkát kíván egy 10 m hosszú szakasza?

**2127.** Egy 6 m magas vasúti töltés felül 8 m széles. Keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amelynek szárai 7,3 m hosszúak. Hány $m^3$ földmunkát kíván egy 50 m hosszú szakasza?

**2128.** Egy egyenes hasáb alaplapja 8 $m^2$ területű egyenlő szárú háromszög, melynek magassága az alapél fele. A hasáb felszíne 25 $m^2$. Mekkora a térfogata?

**2129.** Egy egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög, melynek szára 9,3 dm hosszú, és a csúcsnál levő szöge 37,8°. A hasáb magassága 23,6 dm. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?

**2130.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb felszíne 518,2 $dm^2$, magassága 22 m. Mekkora az alapéle és a térfogata?

**2131.** Egy 40 dm magas egyenes hasáb alaplapja egy 12 dm sugarú körbe írt szabályos ötszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2132.** Egy 50 cm magas egyenes hasáb alaplapja egy 15 cm sugarú kör köré írt szabályos nyolcszög. Mekkora a felszíne és térfogata?

**2133.** Határozzuk meg olyan háromoldalú ferde hasáb térfogatát, melynek alaplapja 8 dm oldalú szabályos háromszög, oldalélei 15 dm hosszúak, és az oldalélek az alaplappal 48°16′ szöget zárnak be.

**2134.** Mekkora a háromoldalú ferde hasáb térfogata, ha alapélei 20 dm, 26 dm, 33 dm; az oldalélek hossza 52 dm, és az alaplappal 69,6°-os szöget zárnak be?

**2135.** Egy háromoldalú hasáb alapja egy 3 dm sugarú körbe írt háromszög, melynek szögei 50°7′ és 70°13′. A hasáb oldaléle 7 dm hosszú, és az alaplap-60°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

**2136.** Ábrázoljunk egy egyenest és egy háromoldalú hasábot. Szerkesszük meg a döféspontok képeit!

**2137.** Ábrázoljunk két egyenesével egy síkot és egy háromoldalú hasábot. Szerkesszük meg a metszésvonal képeit.

**2138.** Ábrázoljunk háromoldalú hasábot. Készítsük el papírból a modelljét valódi méretben.

## GÚLA

**2139.** Bizonyítsuk be, hogy minden gúlában az oldallapok területeinek az összege nagyobb, mint az alaplap területe.

**2140.** Bizonyítsuk be, hogy a gúla két éle fordítva aránylik egymáshoz, mint az alapsíkkal való hajlásszögeik sinusai.

**2141.** Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlók.

**2142.** Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos metszetei területének aránya megegyezik a síkoknak a csúcstól számított távolságai négyzetének arányával.

**2143.** Bizonyítsuk be, hogy ha két egyenlő alapterületű és egyenlő magasságú gúlát az alaplapoktól egyenlő távolságban az alaplappal párhuzamos síkkal metszünk, a metszési idomok területe egyenlő.

**2144.** Hány oldalú lehet az a gúla, amelynek alaplapja szabályos sokszög, és az összes éle egyenlő?

**2145.** Egy gúla alapterülete 900 $cm^2$. A magasságot három egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokon az alaplappal párhuzamos síkokat fektetünk. Mekkora területű idomokat metszenek ki ezek a síkok a gúlából?

**2146.** A csúcstól mekkora távolságban kell egy gúlát az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kimetszett idom területe az alaplapnak *a)* fele, *b)* harmada legyen?

**2147.** A csúcstól mekkora távolságban kell egy 60 cm magas gúlát az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kimetszett idom területe az alaplapnak

*a)* fele, *b)* harmada legyen?

**2148.** Mozogjon egy pont egy szabályos sokszög alapú, egyenlő oldalélű gúla alaplapján. (Az ilyen gúlát szabályos gúlának nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy az oldallapoktól mért távolságainak összege állandó marad.

**2149.** Egy szabályos gúla alaplapjának egy belső pontjában emeljünk az alaplapra merőlegest. Ez metsz minden oldallapot vagy annak meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy a kapott pontoknak az alaplaptól mért távolságait összegezve, állandó értéket kapunk.

**2150.** Szabályos háromoldalú gúla magasságából ($m$) és alapéléből ($a$) számítsuk ki az oldalélt.

**2151.** Szabályos négyoldalú gúla magasságából ($m$) és oldaléléből ($b$) számítsuk ki az alapélt.

**2152.** Szabályos háromoldalú gúla alapéle 13 cm, oldaléle 21 cm. Milyen magas a gúla?

**2153.** Szabályos hatoldalú gúla magassága 18 cm, oldaléle 23 cm. Mekkora az alapél?

**2154.** Négyzetes gúla alapéle 22 cm, az oldallapok az alaplappal 63,6°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla magassága és oldaléle?

**2155.** Háromoldalú gúla oldallapjai egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Az alapél $a$. Mekkora a gúla magassága, oldallapjának és oldalélének az alaplappal bezárt szöge?

**2156.** Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Adott az oldalél ($a$). Számítsuk ki

*a)* a gúla magasságát,
*b)* oldallapjának az alapéllel bezárt szögét,
*c)* oldalélének az alaplappal bezárt szögét.

**2157.** Egy gúlának az alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú egybevágó háromszögek, melyek területe az alaplap területének $\frac{2}{3}$-szorosa. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

**2158.** Szabályos négyoldalú gúla összes felszínének és alapterületének aránya 2,56. Számítsuk ki

*a)* az oldallap és az alaplap hajlásszögét,
*b)* két oldallap hajlásszögét.

**2159.** *a)* Szabályos négyoldalú gúla alapéle 32 cm, a szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

*b)* Szabályos négyoldalú gúla alapéle $a$, a szomszédos oldallapok $\alpha$ szöget zárnak be egymással. Mekkora a gúla magassága?

**2160.** Egy egyiptomi piramis olyan $ABCDS$ szabályos négyoldalú gúla, melynek alapéle $a = 231$ m, és magassága $m = 140$ m. Egy turista úgy mássza meg, hogy $A$-ból kiindulva az $SB$ oldalélre merőleges irányban halad. Az $SB$ élt a $B_1$ pontban elérve folytatja útját az $SC$ oldalélre merőlegesen a $C_1$ pontig és így tovább.

*a)* Milyen magasságban lesz a turista, midőn ismét az $SA$ oldalélre kerül az $A_1$ pontban?

*b)* Mekkora a turista útjának emelkedési szöge?

*c)* Mekkora az $A_1$ pontig megtett út?

**2161.** *a)* Egy ötoldalú szabályos gúla élei egyenlők. Mekkora szöget zár be egy oldalél az alapélekkel?

*b)* Egy szabályos gúla élei egyenlők. Számítsuk ki két szomszédos oldallapjának hajlásszögét.

**2162.** Egy $ABCD$ téglalap alapú gúla $E$ csúcspontjának az alaplapra eső merőleges vetülete az $A$ pont. $AB = 4$ cm, $AD = AE$, és $BCE\sphericalangle = 60°$. Mekkora a gúla magassága?

**2163.** Négyoldalú szabályos gúla köré írt gömb és a beírt gömb középpontja egybeesik. Mekkora két szomszédos oldalél hajlásszöge?

**2164.** Az $ABCDES$ ötoldalú szabályos gúlát elmetsszük egy síkkal, amely átmegy az alap $A$ és $C$ csúcsain, továbbá az $ES$ oldalél felezőpontján. Számítsuk ki a metszet területét, ha a gúla alapéle $a$, oldaléle $b$.

**2165.** Négyoldalú szabályos gúla alapéle $a$, az alap- és az oldallap hajlásszöge $2\alpha$. Elmetsszük a gúlát egy síkkal, amely illeszkedik egy alapélhez, és felezi az alap- és oldallap szögét. Mekkora a metszet területe?

**2166.** Mekkora a felszíne annak a szabályos sokszög alapú egyenes gúlának, amelynek

*a)* alaplapja 13 cm-es oldalú négyzet, magassága 16 cm;
*b)* alaplapja 7 cm-es oldalú szabályos hatszög, magassága 12 cm;
*c)* alaplapja 26 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, magassága 69,5 cm;
*d)* alaplapja 15 cm-es oldalú négyzet, oldaléle 22 cm;
*e)* alaplapja 12,6 cm-es oldalú szabályos hatszög, oldaléle 32,7 cm;
*f)* alaplapja 23,7 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, oldaléle 53 cm.

**2167.** Egy torony csúcsa hatoldalú szabályos gúla, melynek alapéle 2 m, magassága 5,6 m. Hány m² ónlemez szükséges a befedésére?

**2168.** Mekkora a térfogata annak a szabályos gúlának, amelynek

*a)* alaplapja 17 cm-es oldalú négyzet, magassága 28 dm;
*b)* alaplapja 6,7 dm-es oldalú szabályos hatszög, magassága 8,28 dm;
*c)* alaplapja 34,6 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, magassága 52,7 cm;
*d)* alaplapja 56 cm-es oldalú négyzet, oldaléle 78 cm;
*e)* alaplapja 5,9 cm-es oldalú szabályos hatszög, oldaléle 12,3 cm;
*f)* alaplapja 75 cm-es oldalú szabályos ötszög, oldaléle 75 cm;
*g)* alaplapja 1,5 m-es oldalú szabályos nyolcszög, oldaléle 6 m.

**2169.** Négyzet alapú gúla alaplapjának átlója 6 cm. Az oldallapok szabályos háromszögek. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

**2170.** Egy gúla alaplapja derékszögű háromszög, amelynek befogói 12 és 18 cm-esek. A gúla csúcspontjának az alapsíkra eső merőleges vetülete a derékszög csúcsában van. A gúla magassága 32 cm. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

**2171.** Mekkora a négyoldalú szabályos gúla térfogata, ha palástját kiterítve egy 8 cm-es oldalú szabályos nyolcszög felét kapjuk.

**2172.** Szabályos gúla felszíne 272 cm², alaplapja

*a)* 7 cm-es oldalú négyzet,
*b)* 5,5 cm-es oldalú szabályos hatszög,
*c)* 4,7 cm-es oldalú szabályos nyolcszög.

Mekkora a gúla térfogata?

**2173.** Szabályos gúla térfogata 533,7 cm³, alaplapja

*a)* 6,3 cm-es oldalú négyzet,
*b)* 7,8 cm-es oldalú szabályos ötszög,
*c)* 5,9 cm-es oldalú szabályos hatszög.

Mekkora a gúla oldaléle?

**2174.** Szabályos négyoldalú gúla térfogatát felezzük meg az egyik alapéléhez illeszkedő síkkal. Határozzuk meg a kimetszett síkidom alaplaptól legtávolabb fekvő élének az alaplaptól való távolságát.

**2175.** Szabályos négyoldalú gúla alapéle 2,56 m, oldaléle az alaplappal 72°28'-nyi szöget zár be. Mekkora a térfogata?

**2176.** Szabályos gúla alaplapja 2,54 cm oldalú szabályos háromszög, oldalélei egymásra merőlegesek. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2177.** Szabályos nyolcoldalú gúla alapéle 4 dm, az alapél és az ezt metsző oldalél hajlásszöge 75°. Mekkora a felszíne és a térfogata?

**2178.** Szabályos gúla magassága 37,65 m, alaplapja pedig egy 3,15 m sugarú körbe írt szabályos nyolcszög. Mekkora a térfogata?

**2179.** Szabályos gúla alaplapja 1,9 cm oldalélű szabályos 24 oldalú sokszög. Oldallapja az alaplappal 87°11'-nyi szöget zár be. Mekkora a térfogata?

**2180.** Szabályos négyoldalú gúla térfogata 864 cm³, alapélének és magasságának aránya 2:3. Mekkora a felszíne?

**2181.** Szabályos négyoldalú gúla térfogata 49,905 m³, magassága pedig kétszer akkora, mint az alaplap átlója. Mekkora a felszíne?

**2182.** Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Térfogata 51 cm³. Mekkora az alapéle?

**2183.** Szabályos négyoldalú gúla térfogata 4,86 m³. Oldaléle az alaplappal 46°2[illegible]'-nyi szöget zár be. Mekkora az alapél?

**2184.** Téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúla alapélei 7 és 5 dm, oldaléle 15 dm. Mekkora a térfogata?

**2185.** Mekkora a súlya egy öntöttvasból készült szabályos ötoldalú gúlának, ha az alapél 1,56 m, az oldalél az alaplappal 72°45'-nyi szöget zár be? (Fajsúly: 7,21.)

**2186.** Szabályos négyoldalú gúla alaplapjának területe 1024 cm², a gúla térfogata 5622 cm³. Mekkora a gúla magassága és oldalfelszíne?

**2187.** Szabályos 24 oldalú gúla felszíne $F$, és oldallapjának az alaplappal bezárt $\alpha$ szöge ismeretes. Mekkora a térfogata?

**2188.** Szabályos négyoldalú homokkőből faragott gúla súlya 4620 kp, magassága 2,4 dm, alapéle 7 dm-rel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkorák az élek és az oldalfelszín? (Fajsúly: 2,5.)

2189. Öntöttvasból készült szabályos négyoldalú gúla súlya 1012,2 kp, alapéle 45 cm. Mekkora a magassága? (Fajsúly: 7,5.)

2190. Szabályos hatoldalú gúla alapéle 4,5 cm, oldallapjának magassága 9 cm. Mekkora a térfogata?

2191. Rombusz alapú gúla magasságának talppontja a rombusz középpontjában van, magassága 9 cm, térfogata 62,52 $cm^3$. A két nagyobbik oldalélen átmenő síkmetszet területe 36,7 $cm^2$. Számítsuk ki az alapélt és az alaplap egyik szögét.

2192. Egy gúla magassága 14 cm, az alaplaptól 4,2 cm távolságban az alaplappal párhuzamos síkmetszet területe 60 $cm^2$. Számítsuk ki a gúla térfogatát.

2193. Egy 6 és 8 cm-es oldalakkal rendelkező téglalap alapú egyenes gúla oldalélei 13 cm hosszúak. A csúcstól milyen távol kell a gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk, hogy két egyenlő térfogatú részre osszuk?

2194. Egy 45 cm magas gúlát két síkkal, melyek az alaplappal párhuzamosak, három egyenlő térfogatú részre osztunk. Számítsuk ki az egyes részek magasságát.

2195. Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle 4 dm, magassága 6 dm. Írjunk a gúlába kockát úgy, hogy négy csúcsa az alaplapon, a másik négy pedig egy-egy oldalélen legyen. Számítsuk ki a kocka térfogatát.

2196. Egy gúla oldaléleit a csúcson túl meghosszabbítjuk, és e meghosszabbításokat az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük. Fejezzük ki a két gúla térfogatának összegét, ha ismerjük a két alapterületet ($A$ és $A'$) és ezek síkjának egymástól mért $h$ távolságát.

2197. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma alapú csonka gúla átlói egy pontban metszik egymást.

2198. Messünk egy csonka gúlát az alaplappal párhuzamosan, a két alaplaptól egyenlő távolságban. Bizonyítsuk be, hogy a kimetszett idom területe annyi, mint a két alapterület számtani és mértani közepének a számtani közepe.

2199. Szabályos csonka gúlának alaplapjai $a$ és $b$ oldalú négyzetek. A négy oldallap területének összege megegyezik a két alaplap területének összegével. Számítsuk ki a csonka gúla magasságát.

2200. Egy 52 cm magas négyzetes csonka gúla alapéle 55 cm, fedőéle 32 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2201. Egy 20 cm magas, 49,5 cm oldalú szabályos háromszög alapú csonka gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2202. A kovács tűzhelye fölött csonka gúla alakú négyzetes füstfogó van. Hány $m^2$ bádog kell a készítéséhez, ha az alapél 1,8 m, a fedőél 1,2 m, az oldalél 1,8 m? (Vigyázat: csak az oldallapok és a fedőlap jön számításba!)

2203. Szabályos hatoldalú csonka gúla alapéle 3,7 cm, fedőéle 2,4 cm, magassága 7,4 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2204. Szabályos ötoldalú csonka gúla alapéle 2,5 m, fedőéle 1,2 m, magassága 5 m. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2205. Egy 12 m magasságú csonka gúla térfogata 916 $m^3$, az alaplap területe 25 $m^2$. Számítsuk ki a fedőlap területét.

2206. Négyzet alapú szabályos csonka gúla felszíne 2873 $cm^2$. Az alapél 32 cm, a fedőél 9 cm. Számítsuk ki a térfogatát.

2207. Négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, fedőéle 8 cm, magassága 10 cm. Az alaplaptól milyen távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk a csonka gúlát, hogy a két rész egyenlő térfogatú legyen, és mekkora a síkmetszet oldala?

2208. Csonka gúla alakú, 65 cm magasságú láda (melegházakban a délszaki növényeket nevelik ilyenben) négyzetes fenekének éle 32 cm, felső éle 52 cm. Mennyit nyom a benne levő föld, ha a ládát 50 cm magasságig töltik meg? (Egy $m^3$ föld súlya 1400 kp.)

2209. Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonka gúla alakú. Felső lapja 14 m, az alsó 7 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mennyi víz van benne, ha csak fele magasságig van töltve?

2210. Ábrázoljunk az első képsíkon álló szabályos négyoldalú gúlát és egy egyenest. Szerkesszük meg a döféspontok képeit.

2211. Ábrázoljunk az első képsíkon álló szabályos hatoldalú gúlát és két egyenesével egy síkot. Szerkesszük meg a metszésvonal képeit, ha a sík
*a)* második vetítősík;
*b)* a képsíkokhoz képest általános helyzetű.

2212. Vegyünk fel az első képsíkon egy egyenlő szárú háromszöget. Ábrázoljuk azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek az adott háromszög egyik oldallapja!

2213. Adott egy pont a képeivel, továbbá egy rá nem illeszkedő sík két fővonalának képeivel. Ábrázoljunk olyan szabályos hatoldalú gúlát, melynek alaplapja az adott síkon van, és csúcsa az adott pont.

## POLIÉDER

2214. Konvexnek nevezünk egy alakzatot, ha bármely két pontjának összekötő szakasza egészen az alakzathoz tartozik. Bizonyítsuk be, hogy síklapokkal határolt konvex test minden lapja konvex sokszög, és merőleges vetületének a határa is konvex sokszög.

2215. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex poliédert lehet egy síkra merőlegesen vetíteni úgy, hogy minden csúcspont vetülete különböző pont legyen és minden lapjának sokszög legyen a vetülete.

2216. Legyen egy konvex poliéder csúcsainak száma $c$, lapjainak száma $l$, éleinek száma $e$. Mennyivel egyenlő a test összes élszögeinek az összege?

2217. Vetítsük a $c$ csúcspontú, $l$ lapú, $e$ élű konvex poliédert merőlegesen egy síkra úgy, hogy a csúcspontok vetületei között ne legyen két egybeeső, és minden lapjának a vetülete sokszög legyen.

*a)* Mennyivel egyenlő a test összes élszöge vetületének az összege?
*b)* Bizonyítsuk be, hogy az élszögek összege megegyezik az élszögek vetületének összegével.

2218. Bizonyítsuk be, hogy konvex poliéderben a csúcsok és a lapok számának összege kettővel több az élek számánál. (*Euler*-féle tétel.)

2219. Rajzoljunk olyan (nyilván nem konvex) poliédereket, amelyekre nem érvényesül az Euler-féle összefüggés (l. a 2218. feladatot).

2220. Rajzoljunk olyan konkáv poliédert, amelyre érvényes az Euler-féle összefüggés (l. a 2218. feladatot). (Az Euler-féle poliédertétel a poliéderek