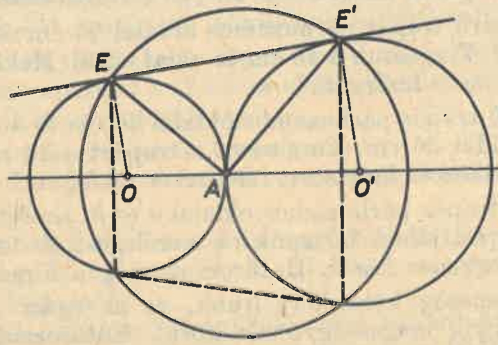
gely körül. Igazoljuk, hogy az $ABCA$ vegyesvonalú idom leírta test térfogata egyenlő a BAD által leírt forgáskúp térfogatával; továbbá, hogy a $DACD$ vegyesvonalú idom által leírt gömbszelet térfogata egyenlő azzal a térfogattal, melyet a BCD háromszög ír le (2872. ábra).

2873. Adott egy n oldalú szabályos sokszög, oldalának hossza a. Forgassuk egy oldala körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2874. Adott egy n oldalú szabályos sokszög, oldalának hossza a. Forgassuk az egyik csúcsán átmenő, a csúcshoz tartozó tükörtengelyre merőleges egyenes körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2875. Az O és O' középpontú R és R' sugarú körök kívülről érintik egymást az A pontban. A közös külső érintők egyike a köröket az E, illetve E' pontban érinti. (2875. ábra.) Forgassuk idomunkat az OO' egyenes körül;



a körök söprik a G és G' gömböket, [illegible] szakasz a C csonka kúpot. Tekintsük még a C csonka kúp köré írt G'' gömböt. Igazoljuk, hogy a G'' gömbnek a C csonka kúpon kívül levő része kétakkora térfogatú, mint a csonka kúpnak az a része, amely a G és G' gömbök közé esik. Mutassuk meg továbbá, hogy az utóbbi test egyenlő térfogatú azon két test együttes térfogatával, amelyeket AE, illetve AE' húrok és az általuk határolt körívek a forgatáskor söpörtek.

MÉRTANI HELYEK

2876. Mi lesz a térben egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmaza?

2877. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál kisebb.

2878. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb.

2879. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, melyek egy adott ponttól adott távolságra vannak, és egy adott síkba esnek.

2880. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, melyeknek egy adott ponttól való távolsága adott távolságnál kisebb, és adott síkba esnek.

dom leírta test térfo-
val; továbbá, hogy a
et térfogata egyenlő
le (2872. ábra).
hossza a. Forgassuk
felszíne és térfogata?
hossza a. Forgassuk
rtengelyre merőleges
színe és térfogata?
ől érintik egymást az
ket az E, illetve E'
z OO' egyenes körül;

sz a C csonka kúpot.
ót. Igazoljuk, hogy a
kétakkora térfogatú,
G' gömbök közé esik.
lő térfogatú azon két
e AE' húrok és az

levő pontok halmaza?
ni helyét, amelyeknek
ágnál kisebb.
ni helyét, amelyeknek
ágnál nagyobb.
át, melyek egy adott
ba esnek.
melyeknek egy adott
és adott síkba esnek.

2881. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb, és egy adott síkba esnek.

2882. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak, és egy adott egyenesre esnek.

2883. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál kisebb, és egy adott egyenesre esnek.

2884. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb, és egy adott egyenesre esnek.

2885. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb.

2886. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott síkra esnek.

2887. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott egyenesre esnek.

2888. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb.

2889. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott síkra esnek.

2890. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,

c) egy adott távolságnál nagyobb,
és egy adott egyenesre esnek.

2891. Határozzuk meg a térben az olyan pontok halmazát, amelyeknek egy adott gömbfelülettől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb.

2892. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott gömbfelülettől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,
és egy adott síkra esnek.

2893. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott gömbfelülettől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolsággal kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,
és egy adott egyenesre esnek.

2894. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott A ponttól adott a és egy adott B ponttól adott b távolságra vannak.

2895. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

2896. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak, és egy adott síkra esnek.

2897. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak, és egy adott gömbre esnek.

2898. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott A ponttól távolabb vannak, mint egy adott B ponttól.

2899. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott A ponttól távolabb vannak, mint egy adott B ponttól, és egy adott síkra esnek.

2900. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott A ponttól távolabb vannak, mint egy adott B ponttól, és egy adott egyenesre esnek.

2901. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egyrészt az adott A és B pontoktól, másrészt az adott C és D pontoktól egyenlő távolságra vannak.

2902. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolsága olyan, hogy arányuk adott állandó.

2903. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolsága olyan, hogy arányuk adott állandó, és egy adott síkra esnek.

2904. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolsága olyan, hogy négyzetük különbsége adott állandó.

2905. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolsága olyan, hogy négyzetük különbsége adott állandó, és egy adott síkra esnek.

2906. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekre két adott ponttól való távolságuk egy-egy adott számmal szorzott négyzeteinek az összege adott állandó.

2907. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeket az jellemez, hogy két adott ponttól való távolságuk összege adott állandó.

2908. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeket az jellemez, hogy két adott ponttól való távolságuk különbségének az abszolút értéke adott állandó.

2909. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeket az jellemez, hogy három nem egy egyenesbe eső adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

2910. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott kör pontjaitól egyenlő távolságra vannak.

2911. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek három (nem egy egyenesre eső) adott ponttól mért távolságai három adott számmal arányosak.

2912. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek három (nem egy egyenesbe eső) adott ponttól egyenlő távolságra vannak, és egy adott gömbfelületre esnek.

2913. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott ponttól és egy adott síktól egyenlő távolságra vannak. (Az adott pont nincs az adott síkon.)

2914. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott ponthoz közelebb vannak, mint egy adott síkhoz.

2915. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott ponttól távolabb vannak, mint egy adott síktól.

2916. Határozzuk meg egy adott síkon az olyan pontok mértani helyét, amelyeket egy adott A és egy adott B ponttal összekötve, a síkkal egyenlő szögeket bezáró egyeneseket kapunk.

2917. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből egy adott szakasz látószöge derékszög.

2918. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből egy adott szakasz látószöge tompaszög.

2919. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből egy adott szakasz látószöge hegyesszög.

2920. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből a tér egy adott szakaszának látószöge derékszög, és egy adott síkra esnek.

2921. Határozzuk meg egy adott pontból egy adott

a) sugársor,
b) síksor

elemeire bocsátott merőlegesek talppontjainak a mértani helyét.

2922. Határozzuk meg egy adott pontnak egy adott

a) sugársor,
b) síksor

elemeire vonatkozó tükörképeinek a mértani helyét.

2923. Adott AB szakasz mozogjon a térben úgy, hogy mindig párhuzamos maradjon egy adott egyenessel, és az A végpontok leírnak

a) síkot,
b) egyenest,
c) gömbfelületet.

Határozzuk meg a B pontok mértani helyét.

2924. Határozzuk meg a KP szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha K a térben rögzített pont, és P

a) síkot,
b) kört,
c) egyenest

ír le.

2925. Határozzuk meg a KP szakaszt adott arányban osztó pontjának a mértani helyét, ha K a térben rögzített pont, és P

a) síkot,
b) kört,
c) egyenest

ír le.

2926. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2927. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két metsző egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2928. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy háromszög oldalegyeneseitől egyenlő távolságra vannak.

2929. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak, és egy adott síkra esnek.

2930. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek két metsző egyenestől egyenlő távolságra vannak, és egy adott síkra esnek.

2931. Adott két kitérő egyenes: e és e'. Keressük az olyan pontok mértani helyét, amelyeket úgy nyerünk, hogy az e egyenes tetszés szerinti E pontját az e' egyenes tetszés szerinti E' pontjával összekötő szakaszt megfelezzük.

2932. Adott két kitérő egyenes: e és e'. Kössük össze az e egyenes tetszés szerinti E pontját az e' egyenes tetszés szerinti E' pontjával. Határozzuk meg az EE' szakaszokat adott arányban osztó pontok mértani helyét.

2933. Adott két egymásra merőleges kitérő egyenes. Egy adott hosszúságú szakasz úgy mozog, hogy végpontjai az egyeneseken vannak. Határozzuk meg a mozgó szakasz felezőpontjának mértani helyét.

2934. Adott két egymásra merőleges kitérő egyenes. Egy adott hosszúságú szakasz úgy mozog, hogy végpontjai az egyeneseken vannak. Határozzuk meg a mozgó szakaszt adott arányban osztó pont mértani helyét.

2935. Határozzuk meg adott irányú egyenesek két adott sík közé eső szakaszai felezőpontjainak a mértani helyét.

2936. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott párhuzamos egyenes derékszög alatt látszik. (Két egyenesnek egy pontra vonatkoztatott „látószög"-én értjük a pont és az egyenesek által meghatározott két sík hajlásszögét.)

2959. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott gömböt adott pontban érintenek.

2960. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott sugarúak, és két adott ponton átmennek.

2961. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek egy adott egyenest egy adott pontjában érintenek.

2962. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek két adott síkot érintenek.

2963. Adott egy sík és a síkon kívül két pont. Határozzuk meg az adott pontokon átmenő és az adott síkot érintő gömbök érintési pontjának a mértani helyét.

2964. Határozzuk meg két adott gömböt főkörben metsző gömbök középpontjának a mértani helyét.

2965. Határozzuk meg három adott gömböt főkörben metsző gömbök középpontjának a mértani helyét.

2966. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyeket két adott gömb főkörben metsz.

2967. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyeket három adott gömb főkörben metsz.

2968. Egy változó sugarú gömb két adott kitérő egyenest érint, és középpontja abban a síkban marad, amely párhuzamos a két egyenessel, és azoktól egyenlő távolságban van. Határozzuk meg a középpontok mértani helyét.

2969. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből egy adott R sugarú gömbhöz három, páronként egymásra merőleges érintő húzható.

2970. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből adott R sugarú gömbhöz három olyan érintő síkot fektethetünk, amelyek páronként merőlegesek egymásra.

2971. Adott egy gömb és egy pont. Tekintsük a ponton átmenő és a gömböt metsző síkokat, határozzuk meg a kimetszett körök középpontjának mértani helyét.

2972. Adott egy gömb és egy egyenes. Tekintsük az egyenesre illeszkedő és a gömböt metsző síkokat. Határozzuk meg a kimetszett körök középpontjának a mértani helyét.

2973. Adott síkot adott pontjában érintő gömb változtatja sugarát. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekben egy adott síkkal párhuzamos síkok a gömböket érintik.

2974. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott ponttól és egy adott gömbtől egyenlő távolságra vannak. (Az adott pont nincs az adott gömbön.)

2975. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két adott gömbfelülettől egyenlő távolságra vannak.

2976. Adott egy sík és rajta kívül két pont. Határozzuk meg az adott pontokon átmenő és az adott síkot érintő gömbök középpontjának a mértani helyét.

2977. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömb egyenlő kúpszög alatt látszik.

2978. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömb egyenlő kúpszög alatt látszik.

2979. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömbhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

2980. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömbhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

2981. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömbhöz húzott érintők aránya adott állandó.

2982. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömbhöz húzott érintők úgy aránylanak egymáshoz, mint három adott szám.

2983. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy triéder éleitől egyenlő távolságra vannak.

2984. Adott egy síknégyszög. Határozzuk meg az olyan négyoldalú testszögletek csúcspontjainak a mértani helyét, amelyek minden lapja az adott síknégyszög egy-egy oldalához illeszkedik, és van

a) téglalapmetszete,
b) rombuszmetszete,
c) négyzetmetszete.

(Határozzuk meg a négyzet középpontjának a mértani helyét is.)

2985. Határozzuk meg egy torz négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma középpontjának a mértani helyét, ha a négyszög három csúcsa adott, a negyedik csúcs pedig

a) adott síkot,
b) adott egyenest

ír le.

2986. Egy adott triédert egy sík az ABC háromszögben metszi. Rögzítsük az A és B pontokat. Határozzuk meg a változó ABC háromszögek súlypontjának mértani helyét.

2987. Egy adott triédert egy sík az ABC háromszögben metszi. Rögzítsük az A csúcsot. Határozzuk meg a változó ABC háromszögek súlypontjának a mértani helyét.

2988. Messük az adott $SABC$ tetraédert az ABC alaplapjával párhuzamos síkkal. Ez a sík az SA, SB, SC éleket a D, E, F pontokban metszi. Mozogjon a metszősík párhuzamosan. Határozzuk meg

a) az AEF, BFD, CDE síkok metszéspontjának
b) a BCD, CAE, ABF síkok metszéspontjának

a mértani helyét.

2989. Messük az adott $SABC$ tetraédert az ABC lapjával párhuzamos síkkal. A metszési idom oldalainak felezőpontjait kössük össze az ABC lapnak szemben fekvő csúcsaival. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három egyenes egy pontban metszi egymást. Határozzuk meg e pont mértani helyét.

2990. Az adott $SABC$ tetraéder SA, SB, SC élein kijelöljük az X, Y, Z pontokat úgy, hogy $AX = BY = CZ$, és mindhárom pont az ABC sík ugyanazon félterében legyen. Határozzuk meg a változó XYZ háromszög súlypontjának a mértani helyét.

2991. Adott egy sík és azon egy kör. Az $SABC$ tetraéder ABC háromszöge legyen az adott kör érintőháromszöge, és az S csúcsponthoz tartozó triéder legyen derékszögű. Határozzuk meg az S pont mértani helyét.

2992. Vegyünk fel egy adott $ABCD$ tetraéder AB élén egy X, CD élén egy Y pontot úgy, hogy

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YD}{YC}.$$

Az XY vonaldarabot a P pont $m{:}n$ arányban két részre osztja. Határozzuk meg a P pont mértani helyét, ha X változik.

2993. Adott három, páronként kitérő egyenes. Rögzítsünk ezek közül kettőt, a harmadik egy adott síkban párhuzamosan mozoghat. Határozzuk meg az olyan paralelepipedon középpontjának a mértani helyét, melynek a három egyenes mindegyikére esik egy-egy éle.

2994. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott ponton átmennek, és egy adott síkkal párhuzamosak.

2995. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő és egy adott egyenest metsző egyenesek mértani helyét.

2996. Határozzuk meg egy adott egyenessel párhuzamos és egy adott egyenest metsző egyenesek mértani helyét.

2997. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott egyenessel tőle adott távolságban párhuzamosak.

2998. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2999. Határozzuk meg az olyan adott pontra illeszkedő egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott egyenestől adott távolságra vannak.

3000. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, két adott egyenessel egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3001. Adott egy szög. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek átmennek a szög csúcsán, és a szög egyik szárával nagyobb szöget zárnak be, mint a másik szárral.

3002. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, egy adott egyenesre merőleges egyenesek mértani helyét.

3003. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő és két adott párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra levő egyenesek mértani helyét.

3004. Határozzuk meg két adott metsző síkkal egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3005. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, két adott metsző síkkal egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3006. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, egy adott síkkal adott szöget bezáró egyenesek mértani helyét.

3007. Tekintsünk egy síkot metsző egyenest és ennek talppontján átmenő, a síkon változó egyenest. Határozzuk meg az így kapott szögek szögfelezőinek a mértani helyét.

3008. Adott egy AOB szög. Határozzuk meg az olyan lapszögek élének a mértani helyét, amelyek átmennek az adott szög szárain, és felezősíkjuk átmegy az adott szög szögfelezőjén.

3009. Egy adott lapszög szögfelező síkjában felveszünk egy P pontot. A P ponton át egyeneseket húzunk, melyeknek a lapszöget határoló síkok közé eső darabját a P pont felezi. Határozzuk meg az ilyen egyenesek mértani helyét.

3010. Határozzuk meg egy adott lapszög síkjait érintő forgáskúpok tengelyeinek a mértani helyét.

3024. Egy négyzetnek rajzoljuk be mindkét átlóját. Az oldalakat és az átlókat irányítsuk úgy, hogy összesen 6 vektort kapjunk. Válasszuk ki ezek közül azokat, amelyeknek összege $\mathbf{0}$.

3025. A 3022. ábra vektorai közül állítsuk elő

a) a $\mathbf{g}$-t az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ segítségével;

b) a $\mathbf{h}$-t az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ segítségével;

c) a $\mathbf{k}$-t a $\mathbf{g}$ és $\mathbf{i}$ segítségével.

3026. Egy szabályos háromszög minden oldalára szerkesszünk egy újabb szabályos háromszöget. Az így kapott 9 szakaszt irányítsuk. Jelöljük meg az így nyert vektorok közül az egyenlőket és az ellentetteket.

3027. Egy szabályos hatszög egyik csúcsából a többi öt csúcsba mutató vektorok legyenek rendre

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$.

Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}$;

c) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

d) $\mathbf{a}-\mathbf{c}$;

e) $\mathbf{c}-\mathbf{a}$;

f) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$;

g) $\mathbf{a}+\mathbf{d}-\mathbf{c}-\mathbf{b}$;

h) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{d}-\mathbf{e}$;

i) $\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{b}$;

j) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

3028. Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, *e)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$,

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, *f)* $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$,

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$, *g)* $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$,

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, *h)* $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$,

i) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$.

3029. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$, *c)* $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$,

b) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$, *d)* $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.

3030. Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

c) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$.

3031. Adjunk meg két olyan vektort, amelyeknek összege az egyik vektorral egyenlő hosszú.

3032. Adjunk meg két olyan vektort, amelyeknek különbsége az egyik vektorral egyenlő hosszú.

3033. Szerkesszünk meg füzetünkben egy tetszőleges **v** vektort. Szerkesszünk meg

a) négy olyan különböző vektorpárt, amelyeknek összege **v**;

b) négy olyan különböző vektorpárt, amelyeknek különbsége **v**;

c) szerkesszünk olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyeknek összege **v**;

d) szerkesszünk olyan **a**, **b**, **c** vektorokat, amelyek összegét **v**-hez hozzáadva **0**-t kapunk.

3034. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

3035. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor egyenlő hosszú.

3036. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összegük és különbségük egyenlő hosszú.

3037. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra.

3038. Egy szög csúcsából kiindulva, a szárakon vegyünk fel egy **a**, ill. egy **b** vektort úgy, hogy hosszuk egyenlő legyen. **a** és **b** segítségével állítsunk elő olyan vektort, amely a szög felezőjének irányába mutat.

3039. Az $ABCD$ paralelogramma síkjában O tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

3040. Melyik vektorra igaz az, hogy egyenlő az ellentettjével?

3041. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$, akkor a **v** is nullvektor.

3042. Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}$.

3043. Az $ABCD$ paralelogramma A, B, C csúcsaihoz egy tetszőleges O pontból rendre az **a**, **b**, **c** vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$ vektort.

3044. Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az **a**, B csúcsába a **b**, a BC felezőpontjához pedig a **p** vektor vezet. Állítsuk elő az **a**, **b**, **p** segítségével

a) az O-ból a C-hez vezető vektort;

b) az $\overrightarrow{AC}$ vektort.

3045. Egy háromszög minden oldalvektorát állítsuk elő a 3045. ábrán látható módon két egyenlő vektor összegeként. Mutassuk meg, hogy

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$;
b) $\mathbf{x} = \mathbf{a}$;

fogalmazzuk meg ennek geometriai jelentését.

3046. A 3045. ábra jelöléseit használva, bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek az oldalai párhuzamosak és egyenlők az ABC háromszög $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ súlyvonalaival.

3047. Egy $2n$ oldalszámú sokszög oldalait irányítsuk valamilyen körüljárás szerint, és számozzuk meg ugyanebben a sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egy olyan n oldalú sokszög, amelynek oldalai rendre párhuzamosak és egyenlők az eredeti sokszög páratlan számozású oldalaival, akkor létezik olyan n oldalú sokszög is, amelynek oldalai a páros számozású oldalakkal egyenlők.

3048. Egy háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk négyzeteket. Két különböző négyzet egy-egy csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha össze vannak kötve ugyanazzal a háromszögcsúccsal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldalai egyenlők és párhuzamosak az egy-egy szomszédos csúcspárt összekötő szakaszokkal.

3049. Egy négyszög oldalai között nincs két párhuzamos. Hány olyan négyszög van, amelynek oldalai párhuzamosak és egyenlők az eredeti négyszög egy-egy oldalával? (Itt egymást metsző oldalakat is megengedünk.)

3050. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hossza egyenlő, és 120°-os szöget zárnak be egymással. Határozzuk meg az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ hosszát.

3051. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza kétszerese a $\mathbf{b}$ vektorénak. Mekkora a két vektor szöge, ha $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{b}$-re?

3052. Három egyenlő hosszú vektor (nem $\mathbf{0}$-vektorok) összege $\mathbf{0}$. Mekkora szöget zárnak be egymással?

3053. Egy háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Bizonyítsuk be, hogy O-ból felmért $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{m}$ vektor végpontja a háromszög magasságpontja.

3054. Egy O pontból egy tetszőleges A ponthoz az $\mathbf{a}$ vektor, egy másik B ponthoz a $\mathbf{b}$ vektor mutat. Bizonyítsuk be, hogy az AB szakasz F felezőpontjába mutató $OF = \mathbf{f}$-re fennáll az

$$\mathbf{f}+\mathbf{f} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$$

egyenlőség.

3055. Egy kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével (összegként, ill. különbségként)

a) az összes lapátlóvektorokat;
b) testátlóvektorokat.

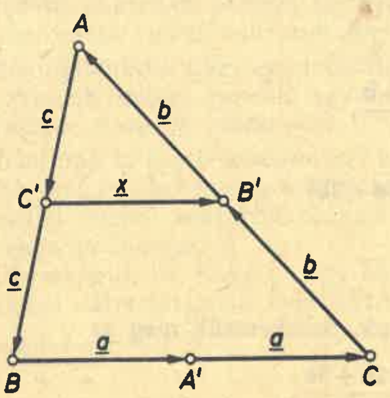
3056. Egy kocka egy A csúcsából kiinduló és az A-t tartalmazó lapok középpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Állítsuk elő ezek segítségével

a) az A csúcsból kiinduló élvektorokat,
b) a testátlóvektorokat.

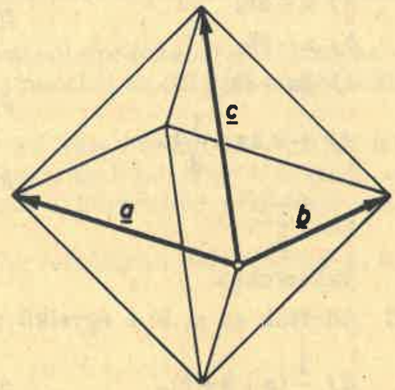
3057. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ vektorok közül bármelyik kettő 60°-os szöget zár be egymással.

3058. A tetraéder egy csúcsából a másik három csúcsba mutató vektorok **a**, **b** és **c**. Állítsuk elő ezek segítségével a másik három oldalvektort.

3059. Egy szabályos oktaéder egyik csúcsából kiinduló három élvektor **a**, **b**, **c** (3059. ábra). Állítsuk elő ezek segítségével a többi élvektort.



3045



3059

3060. Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok **a**, **b**, **c**. Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A-ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba.

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, *d)* $\mathbf{b}-\mathbf{b}$,

b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, *e)* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$,

c) $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, *f)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

3061. Az **a**, **b**, **c** nem egysíkú vektorok olyanok, hogy közülük bármelyik merőleges a másik kettő összegére. Adjunk meg ilyen vektorokat.

3062. Egy paralelepipedon középpontjából egy lap három csúcsához az **a**, **b**, **c** vektorok mutatnak. Határozzuk meg a többi 5 csúcsba tartó vektorokat. (**b** és **c** egy lap szemközti csúcsaihoz tartozó vektorok.)

3063. Legyen $ABCD$ egy szabályos tetraéder és rajta kívül O olyan pont, hogy az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, továbbá az O és D pontok az ABC sík különböző oldalán vannak. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$$

VEKTOR SZORZÁSA SZÁMMAL

3064. Adott az **a** vektor. Szerkesszük meg a

$$2\mathbf{a},\ -2\mathbf{a},\ 1{,}5\mathbf{a},\ 3\mathbf{a},\ -2{,}5\mathbf{a},\ \frac{3}{2}\mathbf{a},\ \frac{\mathbf{a}}{2}\ \text{vektorokat.}$$

3065. Adott a $\mathbf{b}$ vektor. Szerkesszük meg a

$$-\frac{4}{3}\mathbf{b},\ 2\mathbf{b},\ 0{,}5\mathbf{b},\ \frac{\mathbf{b}}{3},\ \frac{4\mathbf{b}}{5},\ -\mathbf{b},\ \frac{\mathbf{b}}{4}\ \text{vektorokat.}$$

3066. Adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok. Szerkesszük meg az

a) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$,

b) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$,

c) $2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$,

d) $-0{,}5\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$,

e) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$,

f) $\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$,

g) $\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$,

h) $\frac{1}{2}(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})$

vektorokat.

3067. Adottak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egysíkú vektorok. Szerkesszük meg az

a) $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$,

b) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$,

c) $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{c}$,

d) $3\left[2\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{c})\right]$,

e) $\frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}}{3}$,

f) $\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$,

g) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{c}}{2}$

vektorokat.

3068. Legyenek A, B, C, D, E adott pontok. Mekkora λ értéke, ha

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\lambda(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}).$$

3069. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az $|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor párhuzamos az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögfelezőjével.

3070. Mutassuk meg, hogy ha az AB szakasz végpontjainak a helyvektorai $\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$, akkor felezőpontjának helyvektora $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$.

3071. Egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vezetnek. Bizonyítsuk be, hogy az AB szakasz harmadolópontjaihoz vezető vektorok

$$\frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}\ \text{és}\ \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}.$$

3072. Bizonyítsuk be, hogy ha egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vezetnek, akkor az AB szakaszt $\lambda:\mu$ arányban osztó P pontba a

$$\frac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\mu+\lambda}\ \text{vektor vezet.}$$

3073. A sík eg
segítség
pedig –
mutató
3074. Bizonyít
vezető
pontokh
3075. Bizonyít
vektorol
vezető
3076. Jelöljün
jük meg
csaiba v
vektorol
3077. Bizonyít
akkor sz
$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$
3078. Bizonyít
vektorok
3079. Legyen
Bizonyít
$\overrightarrow{AX}+B$
3080. Egy tet
rendjébe
BDF há
3081. A 3077.
köré írt
vannak.
3082. Jelölje
meghatá
szög mi
3083. Bizonyít
háromsz
felezi a s
3084. Bizonyít
tól mért
csúcsból
3085. Bizonyít
3082–8
3086. Adott k
csúcsaib
irányuka
pontjai
szögek s
3087. Legyen
ill. S_2. A

3073. A sík egy O pontjából egy P pontjához vezető vektor adott **a** és **b** vektorok segítségével $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ alakban adható meg, egy Q pontba vezető vektor pedig $-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ alakban. Határozzuk meg a PQ szakasz felezőpontjához mutató vektort.

3074. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy háromszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

3075. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanabból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.

3076. Jelöljünk ki egy sokszögön egy körüljárási irányt és minden oldalon jelöljük meg az első harmadoló pontot. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő a harmadoló pontokba vezető vektorok összegével.

3077. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög csúcsainak helyvektorai **a**, **b**, **c**, akkor súlypontjának helyvektora

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

3078. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontjából a csúcsokba vezető vektorok összege **0**.

3079. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, az XYZ háromszögé pedig Q. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ} = 3\overrightarrow{SQ}.$$

3080. Egy tetszőleges hatszög oldalfelező pontjai valamilyen körüljárás sorrendjében legyenek A, B, C, D, E, F. Bizonyítsuk be, hogy az ACE és BDF háromszögek súlypontja azonos.

3081. A 3077. feladat eredményét felhasználva, igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesen vannak. (Ez a háromszög Euler-egyenese. L. még az 1377. feladatot.)

3082. Jelölje F a háromszög köré írt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy F a háromszög minden oldalfelező pontjától egyenlő távolságra van.

3083. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő F pontra tükrözve a háromszög tetszőleges oldalfelező pontját, olyan pontot kapunk, amely felezi a szemközti csúcs és a magasságpont közötti szakaszt.

3084. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának egy oldaltól mért távolsága feleakkora, mint a magasságpontnak a szemközti csúcsból mért távolsága.

3085. Bizonyítsuk be vektorok segítségével a Feuerbach-kör létezését (l. a 3082–83. feladatot).

3086. Adott két tetszőleges háromszög: ABC és $A'B'C'$. Az ABC háromszög csúcsaiból kiindulva, másoljuk át az $A'B'C'$ háromszög egy-egy oldalát, irányukat és hosszukat megtartva. Az átmásolt szakaszok szabad végpontjai legyenek X, Y, Z. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ háromszögek súlypontja közös.

3087. Legyen $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ két tetszőleges háromszög, súlypontjaik S_1, ill. S_2. A megfelelő csúcsok összekötő szakaszainak felezőpontjai (ha nincsenek egy egyenesen) által alkotott háromszög súlypontja S. Bizonyítsuk be, hogy S felezi az S_1S_2 szakaszt.

3088. Egy négyszög súlypontjának nevezzük azt a pontot, amelynek helyvektora a csúcsokhoz tartozó helyvektorok összegének a negyede. Bizonyítsuk be, hogy a súlypont független a kezdőpont választásától, azaz tetszőleges kezdőpont esetén a fentebb definiált vektor végpontja mindig ugyanaz.

3089. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezve metszik egymást, és metszéspontjuk a négyszög súlypontja (l. a 3088. feladatot).

3090. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög súlypontja (l. a 3088. feladatot) felezi az átlók felezőpontját összekötő szakaszt.

3091. Egy paralelogramma belsejében fekvő M ponton át húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal; ezek az A, C, ill. B, D pontokban metszik az oldalakat. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög középvonalainak metszéspontja felezi az M-et a paralelogramma középpontjával összekötő szakaszt.

3092. AB és $A'B'$ tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontjai F és F'. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', FF' szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

3093. Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai legyenek:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CD} = \mathbf{c}.$$

Állítsuk elő ezek segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort.

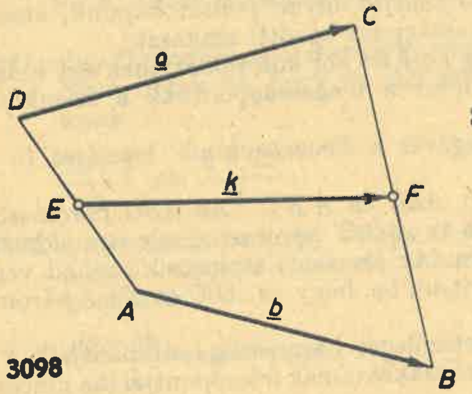
3094. Egy C pont helyvektora $\mathbf{c}$, egy tetszőleges P ponté $\mathbf{p}$. Határozzuk meg a P pont C-re vonatkozó tükörképének helyvektorát.

3095. Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk először egy A pontra, majd a tükörképet egy B pontra, az így nyert képet pedig egy C pontra; tovább folytatva újra A-ra, B-re és végül C-re. Bizonyítsuk be, hogy a hatodik tükrözés visszaviszi a P pontot az eredeti helyzetbe.

3096. Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk egy paralelogramma egy csúcsára, majd az eredményt egy vele szomszédos csúcsra és így körbe a paralelogramma minden csúcsára. Bizonyítsuk be, hogy a negyedik tükrözés visszavisz az eredeti pontba.

3097. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontot egy síknégyszög oldalfelező pontjaira tükrözve, a tükörképek egy paralelogramma csúcsai.

3098. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egy négyszög szemközti oldalvektorai (3098. ábra). Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{k}$ középvonalvektorra áll a $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ egyenlőség.



3098

3099. Feleltessük meg egymásnak két tetszőleges paralelogramma csúcsait úgy, hogy az egymásnak megfelelő csúcsok mindkét paralelogrammánál azonos sorrendben kövessék egymást, és bizonyítsuk be, hogy a megfelelő csúcsok összekötő szakaszainak felezőpontjai ugyancsak paralelogramma csúcsai.

3100. Az $ABCD$ húrnégyszög ABC, BCD, ABD, ACD részháromszögének szerkesszük meg a magasságpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek a magasságpontok az $ABCD$-vel egybevágó négyszöget alkotnak.

3101. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges húrnégyszög középpontját súlypontjára tükrözve olyan pontot kapunk, amely rajta van bármely oldalfelező ponttól a szemközti oldalra állított merőlegesen (a húrnégyszög magasságpontja).

3102. Az ABC háromszög minden oldalát osszuk fel három egyenlő részre, és jelöljük meg az AB, BC, CD oldalon rendre az A, B, C pontokhoz közelebbi harmadolópontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok olyan háromszöget határoznak meg, amelynek súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.

3103. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain jelöljünk ki egy-egy A', B', C' pontot. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', CC' szakaszokat egy háromszöggé lehet összetolni, ha az A', B', C' pontok a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják.

3104. Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Határozzuk meg az A-ból a lapközéppontokba vezető vektorokat.

3105. Egy kocka középpontjából három, egy közös csúccsal rendelkező lap középpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$. Határozzuk meg a csúcsokba vezető vektorokat.

3106. Egy paralelepipedonnak válasszuk ki egyik testátlóját; ennek egyik végpontjából kiinduló élek második végpontjai A, B és C; a másik végpontjából induló élek pedig az X, Y, Z pontokban végződnek. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ síkok három egyenlő részre osztják a testátlót.

3107. Egy tetraéder egyik lapjának súlypontját kössük össze a szemközti csúccsal, és az összekötő szakaszt osszuk négy egyenlő részre; a laphoz legközelebbi negyedelőpont a tetraéder súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder csúcsainak helyvektorai $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, akkor a súlypont helyvektora – bármely lapból indulunk is ki –

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}.$$

3108. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontjából a csúcsokhoz vezető vektorok összege $\mathbf{0}$.

3109. Bizonyítsuk be, hogy ha egy S pontból a tetraéder csúcsaihoz vezető vektorok összege $\mathbf{0}$, akkor az S pont a tetraéder súlypontja.

3110. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választunk ki n pontot a térben, megadható egyetlen olyan S pont, hogy ebből a pontokhoz vezető vektorok összege $\mathbf{0}$ legyen.

3111. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlypontja és a lapsúlypontok meghatározta tetraéder súlypontja egybeesik.

3112. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja felezi bármely két szemközti él felezőpontját összekötő szakaszt.

3113. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder két szemközti élpárjának felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

3114. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő egyenes merőleges a két élre.

3115. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor a tetraéder szemközti élei egyenlők, azaz lapjai egybevágók.

3116. Egy tetraéder A és B csúcsát tükrözzük a velük szemközti lap súlypontjára, így egy A_1, B_1 pontpárt kapunk. Bizonyítsuk be, hogy

$$A_1B_1 = \frac{5}{3}AB.$$

3117. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C, D, E, F egy hatszög egymás utáni oldalfelező pontjai, akkor

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF} = \mathbf{0}.$$

3118. Legyen $ABCDEF$ egy szabályos hatszög. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

3119. Legyen az $A_1A_2\dots A_n$ szabályos n-szög középpontja O és síkjának egy pontja Q. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{QO} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+\dots+\overrightarrow{QA_n}).$$

3120. Az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög középpontja K_1, a $B_1B_2B_3B_4B_5$ szabályos ötszögé pedig K_2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_4B_4}+\overrightarrow{A_5B_5} = 5\overrightarrow{K_1K_2}.$$

3121. Legyen $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ két négyzet. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{DB_1}.$$

3122. Adottak A és B pontok és egy λ szám. Adjunk meg olyan P pontot, hogy

a) $\overrightarrow{AP}$ és $\lambda\,\overrightarrow{BP}$ egyenlő legyen;

b) $\overrightarrow{AP}$ és $\lambda\,\overrightarrow{BP}$ ellentettek legyenek.

3123. Létezik-e egy ABC háromszög síkjában olyan P pont, hogy

$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$$

egyenlő legyen $\mathbf{0}$-ral?

3124. Legyen $A_1A_2\dots A_n$ és $B_1B_2\dots B_n$ két tetszőleges n-szög, és jelölje $B_{i_1}B_{i_2}\dots B_{i_n}$ a második sokszög csúcsainak tetszőleges sorrendjét. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\dots+\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{A_1B_{i_1}}+\overrightarrow{A_2B_{i_2}}+\dots+\overrightarrow{A_nB_{i_n}}.$$

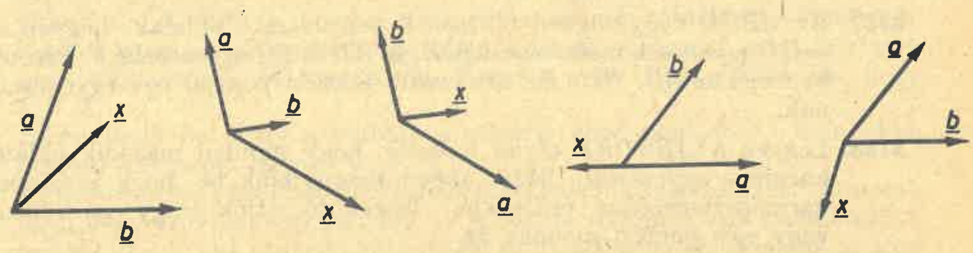
3125. Az O középpontú kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra, és egyeneseik metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}.$$

VEKTOROK FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐKRE

3126. Egy háromszögnél jelöljünk meg két közös kezdőpontú oldalvektort és az ezekkel közös kezdőpontú súlyvonalvektort. Bontsuk fel a súlyvonalvektort az oldalvektoroknak megfelelő irányú összetevőkre.

3127. Az ábrán adottak az **a**, **b**, **x** vektorok. Bontsuk fel rajzban az **x**-et **a** és **b** irányú összetevőkre.



3127

3128. Adott egy négyzet egyik oldalvektora és a vele közös kezdőpontú átlóvektor. Bontsuk fel a négyzet többi oldalvektorát a két vektorral párhuzamos összetevőkre.

3129. *a)* Bontsuk fel egy háromszög egyik szögfelező vektorát a kezdőpontjából kiinduló oldalvektorokkal párhuzamos összetevőkre.

b) Legyenek a háromszög oldalai a, b, c. Határozzuk meg a párhuzamos összetevők együtthatóit is!

3130. Az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak, és egyik sem nullvektor. Határozzuk meg α és β értékét, ha

a) $3\mathbf{a}+5\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}+(2\beta+1)\mathbf{b}$;
b) $(\alpha+\beta-1)\mathbf{a}-(2\alpha-\beta)\mathbf{b} = \mathbf{0}$;
c) $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} = (\beta+1)\mathbf{a}-(\alpha-1)\mathbf{b}$;
d) $(2\alpha-\beta-1)\mathbf{a}-(3\alpha+\beta+10)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

3131. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D. Szerkesszük meg azt a D' pontot, amelyre $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$, és állítsuk elő a $\overrightarrow{D'A}$ és $\overrightarrow{D'B}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

3132. Egy szabályos háromszög két, közös kezdőpontú oldalvektora **a** és **b**, állítsuk elő ezek segítségével a b oldalhoz tartozó magasságvonal-vektort.

3133. Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló **a**, **b**, **c** vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek, és **a** és **b** nem egyállásúak, akkor **c** előállítható

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$$

alakban, ahol $\alpha+\beta = 1$.

3134. Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló **a**, **b**, **c** vektorok olyanok, hogy **a** és **b** nem egyállásúak, és

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},$$

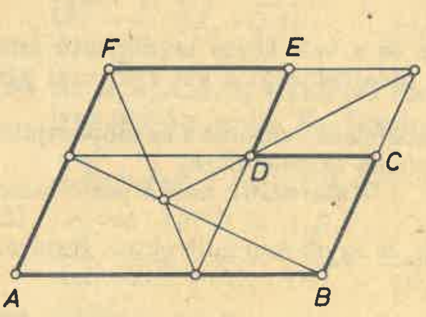
ahol $\alpha+\beta = 1$, akkor az **a**, **b**, **c** vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek.

3135. Az O pontból két félegyenes indul ki, az egyiken levő A_1, ill. A_2 pontba O-ból az **a**, ill. $\lambda\mathbf{a}$ vektor vezet, a másikon levő B_1, ill. B_2 pontba viszont a **b**, ill. $\mu\mathbf{b}$ vektor. Határozzuk meg az A_1B_2 és B_1A_2 egyenesek metszéspontjába mutató **v** vektort ($\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$; az A_1 és A_2, ill. B_1 és B_2 pontok különbözők).

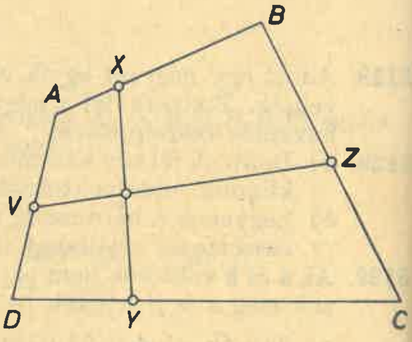
3136. Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő egyenes párhuzamos az alapokkal.

3137. Az $ABCD$ négyszögben nincsenek párhuzamos oldalak. Legyen az AB és CD egyenesek metszéspontja E, az AD és BC egyeneseké F. Bizonyítsuk be, hogy az AC, BD, EF szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

3138. Legyen a $ABCDEF$ olyan hatszög, hogy minden második oldala párhuzamos egymással. (3138. ábra.) Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokat a harmadszomszédos csúcsokkal összekötő átlók vagy párhuzamosak, vagy egy ponton mennek át.



3138



3139

3139. Az $ABCD$ négyszög AB, ill. CD oldalán vegyünk fel egy X, ill. Y pontot úgy, hogy azok az AB, ill. CD oldalakat ugyanabban a $\frac{\lambda}{\mu}$ arányban osszák (3139. ábra). Milyen arányban osztja a VZ középvonalat az XY egyenes P metszéspontja?

3140. Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló **a**, **b**, **c**, **d** vektorok közül **a**, **b**, **c** nem egysíkú, végpontjaik akkor és csakis akkor vannak egy síkon, ha

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},$$

ahol $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

3141. Jelentse $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ azokat a vektorokat, amelyeket az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektoroktól α szögű pozitív irányú elforgatással kaptunk. Bizonyítsuk be, hogy ha

$\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$,

akkor $\mathbf{c}' = \mathbf{a}'+\mathbf{b}'$,

azaz $(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}'+\mathbf{b}'$.

3142. Jelentse $\mathbf{a}'$ az $\mathbf{a}$ vektor α szögű pozitív irányú elforgatottját. Mutassuk meg, hogy ha

$\mathbf{a}+\mathbf{a}' = \mathbf{0}$,

akkor $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, feltéve, hogy α nem egész számú többszöröse 180°-nak.

3143. Legyen $\mathbf{a}'$ az $\mathbf{a}$ valamely elforgatottja, ahol az elforgatás szöge 360°-nak nem többszöröse, és tegyük fel, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

3144. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege $\mathbf{0}$.

3145. Egy háromszög két oldala fölé (kifelé) szerkesszünk négyzeteket. Mutassuk meg, hogy ezek két legközelebbi — a háromszögcsúcsoktól különböző — csúcsát összekötő szakasz kétakkora, mint a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal.

3146. Az $ABCD$ négyszög belsejében O olyan pont, hogy az ABO és CDO egyenlő szárú derékszögű háromszögek (a derékszögű csúcsok O-nál). Bizonyítsuk be, hogy

a) a négyszög átlói merőlegesek és egyenlők;
b) a négyszög oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

3147. Tetszőleges ABC háromszög oldalaira szerkesszünk kifelé négyzeteket. Legyenek ezek (pozitív körüljárással) $BAEF$, $CBGH$, $ACJK$; a négyzetek középpontjai rendre X, Y, Z. Szerkesszük meg ezeken kívül a $BFPG$, $CHQJ$, $AKRE$ paralelogrammákat. Így egy összetett alakzatot nyerünk. Bizonyítsuk be, hogy érvényesek a következő állítások:

a) Az FG, HJ, KE szakaszok kétszer akkorák, mint az ABC háromszög súlyvonalai, és merőlegesek azokra.
b) Az A, B, C csúcsokból rendre a KE, FG, HJ szakaszokra állított merőlegesek egy pontban, az ABC súlypontjában metszik egymást.
c) Az AR, BP, CQ szakaszok merőlegesek az ABC egy-egy oldalára, és egyenlők velük.
d) Az XYZ háromszög oldalaira befelé szerkesztett négyzetek középpontjai felezik az ABC háromszög oldalait.
e) Az X, Y, Z pontok a PQR háromszög oldalfelező pontjai.
f) Az XQ, YR, PZ egyenesek egy pontban metszik egymást.
g) Az ABC, XYZ, EGJ, FHK háromszögek súlypontjai egybeesnek.
h) Az AH és BJ; BK és CE; CF és AG szakaszok páronként egyenlők, és merőlegesek egymásra.

3148. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők, és merőlegesek egymásra, akkor oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

3149. Egy négyszög oldalai fölé kifelé szerkesszünk négyzeteket. Jelöljük meg a szomszédos négyzetközéppontok összekötő szakaszainak középpontjait; bizonyítsuk be, hogy ezek négyzetet alkotnak.

3150. Egy paralelogramma oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai négyzetet alkotnak.

3151. Egy ABC háromszög AB, BC, CA oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyzeteket, ezek középpontjai rendre X, Y, Z. Mutassuk meg, hogy az XY és BZ szakaszok egyenlők és merőlegesek egymásra.

3152. Legyenek ABC és $A_1B_1C_1$ azonos körüljárású egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok felezőpontjai ugyancsak egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak.

3153. Bizonyítsuk be, hogy előző feladatunk feltételei között és bizonyítandó állításában „egyenlő szárú derékszögű" helyett „egyenlő szárú hasonló" is állhat.

3154. Jelentse $\mathbf{a}'$ azt a vektort, amely $\mathbf{a}$-ból 60°-os pozitív irányú elforgatással származik, és legyen $(\mathbf{a}')' = \mathbf{a}''$, azaz $\mathbf{a}''$-vel jelöljük $\mathbf{a}'$ 60°-os elforgatottját. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$.

3155. Legyenek ABC és AB_1C_1 azonos körüljárású szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az A, a BB_1 és CC_1 szakaszok felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.

3156. Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és $A'B'C'$ egyező körüljárású szabályos háromszögek, akkor az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontjai szabályos háromszög csúcsai.

3157. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalai fölé kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy az A pont, továbbá a szabályos háromszögeknek a paralelogrammán nem levő csúcsai szabályos háromszöget alkotnak.

3158. Egy körben helyezzünk el három sugár hosszúságú húrt, legyenek ezek: AB, CD, EF. Bizonyítsuk be, hogy a BC, DE, FA szakaszok felezési pontjai szabályos háromszög csúcsai.

3159. Legyenek OAB, OCD, OEF tetszőleges szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy a BC, DE, FA szakaszok felezési pontjai szabályos háromszög csúcsai.

3160. Egy háromszög oldalai fölé (mind kifelé vagy mind befelé) szerkesszünk szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a középpontjai ismét szabályos háromszöget alkotnak.

3161. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex hatszög minden második csúcsánál 120°-os szög van, és egy-egy 120°-os szöget közrefogó oldalpár egyenlő oldalakból áll, akkor ezek a csúcsok szabályos háromszöget alkotnak.

3162. Az AB szakaszon jelöljünk ki tetszőleges C pontot. A szakasz egyik oldalára AC és CB fölé, másik oldalára pedig AB fölé szerkesszünk szabályos háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

3163. Jelölje $\mathbf{a}'$ az $\mathbf{a}$ vektorból α szögű pozitív forgással származó vektort. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ akkor és csakis akkor egyező körüljárású hasonló háromszögek, ha

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}' \quad \text{és} \quad \overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{XY}'.$$

teket. Jelöljük meg a
inak középpontjait;

é négyzeteket. Bizo-
ak.

sszünk kifelé négyze-
meg, hogy az XY és

lő szárú derékszögű
C_1 szakaszok felező-
zöget alkotnak.

zött és bizonyítandó
yenlő szárú hasonló"

irányú elforgatással
a' 60°-os elforgatott-

ályos háromszögek.
elezőpontjai egy sza-

örüljárású szabályos
ezőpontjai szabályos

elé szabályos három-
A pont, továbbá a
evő csúcsai szabályos

húrt, legyenek ezek:
A szakaszok felezési

háromszögek. Bizo-
si pontjai szabályos

befelé) szerkesszünk
knek a középpontjai

n második csúcsánál
gó oldalpár egyenlő
romszöget alkotnak.
szakasz egyik oldalá-
rkesszünk szabályos
ai szabályos három-

l származó vektort.
csakis akkor egyező

3164. Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és XYZ egyező körüljárású hasonló háromszögek, akkor ezekhez hasonló az AX, BY, CZ szakaszok felezési pontjai által meghatározott háromszög is.

VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA

Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatának nevezik azt a számot, amelyet akkor kapunk, ha a vektorok hosszának szorzatát megszorozzuk a vektorok szögének cosinusával. A skaláris szorzat jelölése: **ab** vagy **a·b**. Tehát

$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$.

(Ha az **a**, ill. a **b** hosszát $|\mathbf{a}|$, ill. $|\mathbf{b}|$ jelöli, és a vektorok szögét $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$-vel írjuk.)

Az alábbi néhány feladat rámutat a skaláris szorzat legjellemzőbb tulajdonságaira, majd néhány alkalmazására. E feladatok megoldása során találkozunk a vektor koordinátái (3216.), a sík normálvektora (3231.), a sík egyenlete (3231.), egyenes irányvektora, paraméteres vektoregyenlete és egyenletrendszere (3242–3243.), vektor vetülete (3180.) fogalmakkal.

3165. Igazoljuk, hogy $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (a skaláris szorzás kommutatív).

3166. Igazoljuk, hogy egyező irányú vektorok skaláris szorzata egyenlő a vektorok hosszának szorzatával.

3167. Igazoljuk, hogy ellenkező irányú vektorok szorzata egyenlő a vektorhosszak szorzatának -1-szeresével.

3168. Igazoljuk, hogy $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ (az $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$ jelölést alkalmazva).

3169. Igazoljuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata nulla.

3170. Igazoljuk, hogy $(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab})$ (α tetszőleges valós szám).

3171. Milyen **a**, **b** vektorokra teljesül, hogy

$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$?

3172. Milyen **a**, **b** vektorokra teljesül, hogy

$\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$?

3173. Milyen **a**, **b** vektorokra teljesül, hogy

a) $\mathbf{ab} > 0$,

b) $\mathbf{ab} < 0$,

c) $\mathbf{ab} = 0$?

3174. Bizonyítsuk be, hogy két egységvektor skaláris szorzata egyenlő a vektorok szögének cosinusával.

3175. Bizonyítsuk be, hogy az $(\mathbf{ab})\mathbf{c} \neq (\mathbf{bc})\mathbf{a}$.

3176. Milyen esetben teljesül, hogy

$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = (\mathbf{bc})\mathbf{a}$?

3177. Milyen esetben teljesül, hogy

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$?

3178. Az ABC szabályos háromszögben tekintsük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ vektorokat. Határozzuk meg az

$$\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$$

értékét.

3179. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ szorzatot, ha az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 10$ cm.

3180. Nevezzük valamely vektor egy egyenesen levő merőleges vetületének azt a vektort, amelyiknek kezdőpontja, illetve végpontja az eredeti vektor kezdő-, illetve végpontjának a vetülete. Legyen az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos egyenesen levő vetülete $\mathbf{a}'$, és legyen $\mathbf{e}$ egységvektor. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{ae}) \cdot \mathbf{e}.$$

3181. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}$-nak a $\mathbf{b}$-vel párhuzamos összetevője $(\mathbf{b}^0\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}^0$, és a $\mathbf{b}$-re merőleges összetevője $\mathbf{a} - (\mathbf{b}^0\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}^0$. ($\mathbf{b}^0$-lal jelöltük a $\mathbf{b}$-vel egyező irányú egységvektort.)

3182. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor és $\mathbf{c}^0$ tetszőleges egységvektor.

a) Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$-nek a $\mathbf{c}^0$-lal párhuzamos egyenesen levő merőleges vetületének az összege egyenlő az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ merőleges vetületével.

b) Igazoljuk, hogy $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}^0 = \mathbf{ac}^0 + \mathbf{bc}^0$.

c) Igazoljuk, hogy $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tetszőleges vektorok. (A skaláris szorzás disztributív.)

3183. Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + \mathbf{ad} + \mathbf{bd}.$$

3184. Igazoljuk, hogy az $(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{ac}) \cdot \mathbf{b}$ vektor merőleges $\mathbf{a}$-ra.

3185. Tekintsük az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorokat. Van-e olyan k szám, hogy $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ merőleges a $\mathbf{b}$-re?

3186. Milyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokhoz található olyan $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, hogy $\mathbf{ap} = \mathbf{bp} = \mathbf{cp}$?

3187. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szögét, ha $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ egymásra merőleges vektorok.

3188. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha

$3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ és $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$,

illetve

$\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ és $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$

egymásra merőleges vektorok.

3189. Adott a háromszög a és b oldala és az ezek bezárta γ szög. Határozzuk meg a γ szög szögfelezőjének a hosszát.

3190. Tekintsünk a síkon két koncentrikus kört, az egyikbe írt ABC szabályos háromszöget és a másikon mozgó P pontot. Igazoljuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

állandó.

3191. Igazoljuk, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra.

3192. Bizonyítsuk be Thalész tételét.

c) Az előbbi eredményekből hogyan következik, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást?

3203. Vezessük le az $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}$ azonosságból a skaláris szorzat értelmezése alapján a cosinustételt.

3204. *a)* Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$ és $\mathbf{b}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = 0$, akkor $\mathbf{c}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$.
b) Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a tetraéder egyik csúcsából induló élvektorok. Mit jelent akkor az *a)*-ban bizonyított tétel?

3205. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kezdőpontja közös, továbbá $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Keressük a velük egyező kezdőpontú $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ vektorok végpontjainak a mértani helyét, ha λ tetszőleges valós szám lehet.

3206. Adott az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{e}$ egységvektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha $\mathbf{e}\cdot\overrightarrow{OX} = 3$.

3207. Adott az $\overrightarrow{OA}$ vektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX} = 2$.

3208. Adott az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX} = 0 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OX} = 2.$$

3209. Adott az $\overrightarrow{OA}$. Határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, hogy $\overrightarrow{OX}$-nek az $\overrightarrow{OA}$-ra való merőleges vetületének hossza megegyezzék az $\overrightarrow{OA}$-nak az $\overrightarrow{OX}$-re való merőleges vetületének hosszával.

3210. Adott $\overrightarrow{OA}$-hoz határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, amelyekre

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OA}|.$$

3211. Adott $\overrightarrow{OA}$-hoz határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, amelyekre

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX}|.$$

3212. Adottak az A, B pontok és a k^2 szám. Keressük az olyan P pontoknak a mértani helyét, amelyekre

$$PA^2-PB^2 = k^2.$$

3213. Adottak az A, B pontok, továbbá a k^2 szám. Keressük az olyan P pontoknak a mértani helyét, amelyekre

$$PA^2+PB^2 = k^2.$$

3214. Igazoljuk, hogy $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}) = a_1b_1+a_2b_2$, ha $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ egymásra merőleges egységvektorok.

3215. Igazoljuk, hogy $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok.

3216. Legyenek $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok. Igazoljuk, hogy a tér minden $\mathbf{a}$ vektorához egyértelműen található olyan a_1, a_2, a_3 számhármas, hogy $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$. E számhármast nevezzük $\mathbf{a}$ koordinátáinak.

3217. Határozzuk meg $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-t, ha

a) $\mathbf{a}(1, 2, 5)$; $\mathbf{b}(-1, 3, -7)$;
b) $\mathbf{a}(0, 2, 3)$; $\mathbf{b}(-2, 1, 3)$;
c) $\mathbf{a}(2, 3, 4)$; $\mathbf{b}(5, 7, -1)$;
d) $\mathbf{a}(\sqrt{2}, 5, 1)$; $\mathbf{b}(\sqrt{3}, -12, 2)$.

3218. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ hosszát, ha

a) $\mathbf{a}(1, 3, 5)$,
b) $\mathbf{a}(-1, -2, 7)$.

3219. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$-val egyező irányú egységvektor koordinátáit, ha

a) $\mathbf{a}(1, 3, 5)$,
b) $\mathbf{a}(-1, -2, 7)$,
c) $\mathbf{a}(2, -2, 3)$.

3220. Mekkora szöget zárnak be az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok, ha

a) $\mathbf{a}(-1, 3, 7)$; $\mathbf{b}(2, 5, -4)$;
b) $\mathbf{a}(2, -3, 5)$; $\mathbf{b}(-1, -2, 5)$.

3221. Tekintsük az x, y, z derékszögű koordináta-rendszert, ahol $O(0, 0, 0)$ $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$; $C(0, 0, 1)$. Legyenek továbbá $\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OC}$. Igazoljuk, hogy a tér bármely P pontjának koordinátái megegyeznek a P pont $\overrightarrow{OP}$ helyvektorának a koordinátáival.

3222. Bontsuk fel az $\mathbf{a}(1, 2, -1)$ vektort a $\mathbf{b}(3, -1, -2)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

3223. Legyen $\mathbf{a}(3, -1, 2)$ és $\mathbf{b}(5, 2, -3)$, és legyen közös a kezdőpontjuk. Így meghatároznak egy síkot. Keressünk e síkban olyan vektorokat, melyek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$-vel egyenlő szögeket zárnak be.

3224. Adott $\mathbf{a}(1, -1, 2)$. Határozzuk meg a $\mathbf{b}(5, -1, x)$ harmadik koordinátáját úgy, hogy $\mathbf{b}$ merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra.

3225. Legyenek $\mathbf{a}(5, -1, 2)$ és $\mathbf{b}(-2, 3, 1)$. Keressünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyik merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re is.

3226. Legyenek $\mathbf{a}(1, 1, 1)$ és $\mathbf{b}(0, 1, 1)$. Keressünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyik $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel 45°-os szöget zár be.

3227. Tekintsük az $\mathbf{a}(1, 2, 2)$; $\mathbf{b}(-2, -1, 2)$; $\mathbf{c}(3, 2, \sqrt{3})$ vektorokat. Keressünk olyan vektorokat, amelyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokkal egyenlő szöget zárnak be.

3228. Az $\overrightarrow{AO}$ $(2, -4, 7)$ vektort tükrözzük az $\overrightarrow{OB}$ $(-5, 2, 0)$ vektor egyenesére. Határozzuk meg a tükörképvektor koordinátáit.

3229. Tükrözzük az $\mathbf{a}(-2, -5, 7)$ vektort olyan síkra, amelyik merőleges a $\mathbf{b}(1, -1, 1)$ vektorra. Határozzuk meg a tükörképvektor koordinátáit.

3230. Adott az O és a P_0 pont, továbbá az $\mathbf{n} \neq 0$ vektor. Igazoljuk, hogy P akkor és csak akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő és az $\mathbf{n}$-re merőleges síkra ha

$$\mathbf{n}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}) = 0.$$

3231. Igazoljuk, hogy a $P(x, y, z)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és az $\mathbf{n}(A, B, C)$ vektorra merőleges síkra, ha

$$Ax+By+Cz = Ax_0+By_0+Cz_0.$$

(Ez utóbbi egyenletet a szóban forgó sík egyenletének, **n**-et e sík normálvektorának nevezik.)

3232. Írjuk fel a $P_0(1, 5, -7)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(1, -1, 2)$ normálvektorú sík egyenletét.

3233. Írjuk fel a $P_0(2, 5, 5)$ ponton átmenő és az xy síkkal párhuzamos sík egyenletét.

3234. Határozzuk meg a sík egy pontjának és egy normálvektorának a koordinátáit, ha egyenlete

a) $2x+5y-4z = 11$,

b) $2x-11y = 7$,

c) $6x = 13$.

3235. Igazoljuk, hogy $Ax+By+Cz = D$ sík egyenlete, ha A, B, C közül legalább az egyik nem nulla.

3236. Igazoljuk, hogy

$$|\mathbf{n}^0(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})|$$

a P pontnak és a P_0 ponton átmenő, az $\mathbf{n}^0$ egységvektorra merőleges síknak a távolsága.

3237. Határozzuk meg a P pontnak a P_1 ponton átmenő és **n** normálvektorú síktól való távolságát, ha

a) $P(5, 7, 2)$, $P_0(-2, 3, 4)$, $\mathbf{n}(1, 2, 1)$,

b) $P(0, 0, 0)$, $P_0(7, 3, 2)$, $\mathbf{n}(2, -1, 1)$.

3238. Írjuk fel az $A(2, 1, 3)$ ponton átmenő és a $2x-7y+5z = 6$ síkkal párhuzamos sík egyenletét, és határozzuk meg a két sík távolságát.

3239. Számítsuk ki a $2x-y+5z = 7$ és az $5x+2y-z = 3$ egyenletű síkok hajlásszögét.

3240. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ és az $A_2x+B_2y+C_2z = D_2$ síkok

a) párhuzamosak,

b) merőlegesek

legyenek.

3241. Írjuk fel az $A(1, 2,3)$; $B(-1, -2, 3)$ pontok meghatározta szakasz felező-merőleges-síkjának az egyenletét.

3242. Igazoljuk, hogy P akkor és csak akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő és a **v**-vel párhuzamos egyenesre, ha

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0}+t\mathbf{v},$$

ahol t tetszőleges valós szám.

3243. Igazoljuk, hogy $P(x, y, z)$ akkor és csak akkor illeszkedik a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektorral párhuzamos egyenesre, ha

$$x = x_0 + tv_1,$$
$$y = y_0 + tv_2,$$
$$z = z_0 + tv_3,$$

illetve ha v_1, v_2, v_3 egyike sem nulla:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}.$$

(Ez az egyenes paraméteres egyenletrendszere, ill. egyenletrendszere.)

3244. Írjuk fel az egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ill. egyenletrendszerét, ha

a) $P_0(1, -1, 2)$; $\mathbf{v}(5, 1, -3)$,
b) $P_0(0, 0, 0)$; $\mathbf{v}(1, 2, -1)$,
c) $P_0(2, 3, 4)$; $\mathbf{v}(0, 1, 2)$,
d) $P_0(7, -2, 5)$; $\mathbf{v}(0, 0, 1)$.

3245. Írjuk fel az A, B pontokat összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ill. egyenletrendszerét, ha

a) $A(1, 2, -3)$; $B(2, -1, -5)$,
b) $A(0, 1, 3)$; $B(-2, -3, 7)$.

3246. Határozzuk meg az egyenes egy pontjának és irányvektorának koordinátáit, ha egyenletrendszere

a) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-7}{6}$,

b) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-5}{4}$.

3247. Határozzuk meg az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+7}{3} = z$ és az $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{5}$ egyenesek hajlásszögét.

3248. Határozzuk meg a $2x-5y-7z = 3$ és az $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z}{2}$ egyenes hajlásszögét.

3249. Határozzuk meg a $4x+5y-7z = 4$, a $2x-3y+7z = 3$ és a $3x-4y+z = 10$ síkok közös pontját.

3250. Számítsuk ki az $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{2}$ egyenes és az $x-y+2z = 0$ sík metszéspontjának koordinátáit.