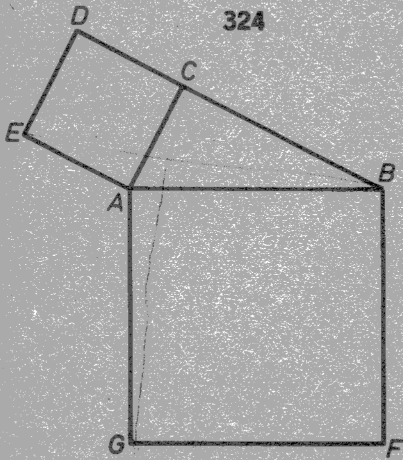
323. Mutassuk meg, hogy egy négyzet két szomszédos csúcsa és a szemközti oldalára állított egyenlő szárú háromszögnek az alappal szemközti csúcsa egyenlő szárú háromszöget határoznak meg.

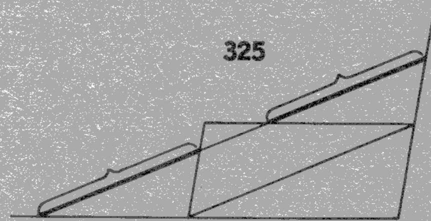
324. Rajzoljunk négyzetet egy derékszögű háromszög átfogójára és egyik befogójára (324. ábra). Bizonyítsuk be, hogy az ábrán $EB = CG$.

325. A 325. ábrán párhuzamost húztunk egy paralelogramma egyik átlójával. Igazoljuk, hogy a kapoccsal jelölt szakaszok egyenlők.

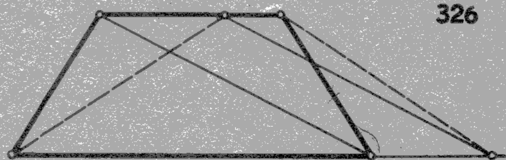
324



325



326



326. Toljuk el egy egyenlő szárú trapéz egyik átlóját a párhuzamos oldalak mentén (326. ábra). Új helyzetének végpontjait egy-egy trapézcsúccsal kötik össze a szaggatott szakaszok. Bizonyítsuk be, hogy a szaggatott szakaszok egyenlők.

327. Egy kör minden érintőjére – az érintési pontból kiindulva – azonos irányban mérjünk fel egy adott szakaszt. Mi lesz a végpontok mértani helye?

EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

TENGELYES TÜKRÖZÉS

328. Tükrözzünk háromszöget

a) egyik oldalára,
b) szögfelezőjére,
c) magasságvonalára.

329. Tükrözzünk kört egy a középpontját nem tartalmazó adott t egyenesre. Mutassuk meg, hogy a szerkesztés elvégzéséhez nincs szükségünk vonalzóra, csupán körzővel is elvégezhető.

330. Adott a síkon egy háromszög három oldalegyenese: a, b, c. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges pontját, tükrözzük azt az a-ra, majd a tükörképet a b-re és így tovább. Mutassuk meg, hogy ha a tükrözést a következő sorrendben végezzük: a, b, c, c, b, a, akkor visszajutunk az eredeti pontba.

331. Legyenek a, b, c egy közös ponttal rendelkező egyenesek. A sík egy tetszőleges pontját tükrözzük az egyenesekre a következő sorrendben: a, b, c, a, b, c.

332. Végezzük el az előző feladatot abban az esetben, ha a, b, c párhuzamos egyenesek.

333. A sík mely egyenesei egyeznek meg tengelyes tükörképükkel?

334. Mutassuk meg, hogy az egyenes és tükörképe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be.

335. Mutassuk meg, hogy egy pontnak és tükörképének a tengely egy tetszőleges pontjától mért távolsága ugyanakkora.

336. Legyen t_1 és t_2 két merőleges egyenes, és menjen át metszéspontjukon az a egyenes. Bizonyítsuk be, hogy ha a-t t_1-re tükrözzük, ugyanazt az egyenest nyerjük, mintha t_2-re tükröztük volna.

337. Mutassuk meg, hogy két egyenlő sugarú körhöz mindig található olyan egyenes, amelyre nézve a két kör tükrös.

338. Hány szimmetriatengelye van

a) az egyenlő szárú háromszögnek?
b) az egyenlő oldalú háromszögnek?

339. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögnek két szimmetriatengelye van, akkor van három is.

340. Nevezzünk meg olyan alakzatot, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.

341. Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely merőleges b-re, és b felezi az e egyenes a és c közötti szakaszát.

342. Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két szemközti csúcsa az a, ill. c egyeneseken van, másik két csúcspontja pedig b-n.

343. Adott az A és B pont és egy t egyenes. Szerkesszünk a t-n olyan T pontot, hogy a TA és TB szakaszok a T pontban t-re állított merőleges különböző oldalán helyezkedjenek el, és mindkét szakasz ugyanakkora szöget zárjon be t-vel.

344. Egy egyenes országút ugyanazon oldalán helyezkedik el két község. Mindkét községbe bevezetik a villanyt, és a két község számára közvetlenül az országút mellett közös transzformátorállomást létesítenek. Hol kell az állomást elhelyezni, hogy a lehető legrövidebb vezetékre legyen szükség?

345. Mutassuk meg, hogy ha egy fénysugár egy A pontból kiindulva síktükörről való visszaverődés után egy B pontba jut, akkor a megtett út A és B között a lehető legrövidebb.

346. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenlő szárú háromszögben összeadjuk az alap bármely pontjának a két szártól mért távolságát, mindig ugyanazt az értéket kapjuk.

347. Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely pontjának a három oldaltól mért távolságösszege mindig ugyanakkora.

348. Egy háromszög alapján szerkesszünk pontot, amelynek a másik két oldaltól mért távolsága együttvéve akkora, mint egy megadott szakasz.

349. A szabályos háromszög tetszőleges belső pontjából az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai az oldalakat két részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott hat szakasz közül három-három egymáshoz nem csatlakozónak összege független a belső pont választásától.

350. Egy hegyesszög szárai között helyezkedik el az A és B pont. Szerkesszük meg az A és B között a legrövidebb utat, ha annak érintenie kell a két szögszárat is.

351. Egy hegyesszög szárai között adott egy pont. Szerkesszük meg a ponttól kiinduló és oda visszatérő legrövidebb utat, amely érinti a szögszárakat.

352. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán tűzzünk ki egy pontot. Írjunk a háromszögbe lehető legkisebb kerületű háromszöget úgy, hogy egyik csúcsa a kitűzött pont legyen.

353. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő beírt háromszög kerülete annál kisebb, minél közelebb van a kitűzött pont a szemközti csúcshoz.

354. Írjunk egy hegyesszögű háromszögbe egy háromszöget úgy, hogy annak kerülete a lehető legkisebb legyen.

355. Téglalap alakú biliárdasztalra két golyót helyezünk el. Milyen irányba kell ellökni az egyik golyót, hogy az mind a négy falat érintve eltalálja a másik golyót?

356. Egy egyenesen szerkesszük meg azt a pontot, amelynek két adott ponttól mért távolságkülönbsége a lehető legnagyobb.

357. Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest, ez a két szemközti oldalt az A, ill. B pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy A-tól az egyik szomszédos oldalig és onnan a B-be vezető legrövidebb út a téglalap átlójával egyenlő.

358. Egy egyenesen megadunk egy P pontot és rajta kívül A-t. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, hogy az $AX+XP$ összeg egy adott szakasszal legyen egyenlő.

359. Egy egyenesen megadunk egy P pontot és rajta kívül A-t. Szerkesszünk az egyenesen egy X pontot úgy, hogy az $AX-XP$ különbség egy adott szakasszal legyen egyenlő.

360. Megadunk egy a és b egyenest, az előbbin egy A pontot. Szerkesszünk az a-ra olyan X pontot, amely A-tól és b-től is egyenlő távolságra van.

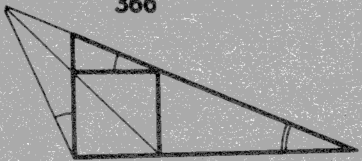
361. Adott az e egyenes és egyik oldalán két pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen az X pontot úgy, hogy AX felezze az e egyenes BX-szel alkotott szögét.

362. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon levő csúcs, továbbá a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes.

363. Adott három egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek az egyik egyenes szögfelezője, a másik kettő pedig egy-egy csúcsán megy át.

364. Adott két, egymást nem metsző kör és közöttük egy egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa a körökön, egy magassága pedig az adott egyenesen van.

365. Tűzzünk ki két pontot. Egyikük körül forgassunk egy rajta átmenő egyenest, és minden helyzetében tükrözzük rajta át a másik kitűzött pontot. Mi a tükörképek mértani helye?



366. A 366. ábrán négyzetet rajzoltunk egy derékszögű háromszögbe, majd meghosszabbítottuk a négyzet egyik átlóját és a háromszög átfogóját, metszéspontjukat pedig összekötöttük a derékszögű csúccsal. Igazoljuk, hogy a jelölt szögek egyenlők.

367. A háromszög egyik oldalán jelöljünk ki egy pontot, és tükrözzük azt végig egymás után a három szögfelezőre. Mutassuk meg, hogy a végeredményül kapott pont az eredetivel egy oldalon van.

368. Megrajzoltuk a háromszög három (egy ponton átmenő) szögfelezőjét, és megadtuk az egyik oldal egy pontját. Szerkesszük meg a háromszöget.

369. Egy háromszögnek két csúcsa és a harmadikból induló szögfelezője van a rajzlapon. Szerkesszük meg a háromszöget.

370. Adott egy kör és a középpontjából kiinduló három félegyenes. Szerkesszünk háromszöget, amelynek az adott félegyenesek szögfelezői, beírt köre pedig az adott kör.

371. Tükrözzük a háromszöget egyik oldalfelező merőlegesére, így egy egyenlő szárú trapézt kapunk. Mutassuk meg, hogy ebből a trapézból egyik átlója olyan háromszöget metsz le, amelynek két oldala az eredeti háromszög két oldalával egyenlő, a két oldal által bezárt szög pedig az eredeti háromszög két szögének a különbsége.

372. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert két oldala és az ezekkel szemközti szögek különbsége.

373. Ismeretes egy háromszög alapegyenese, a szemközti csúcsból induló szögfelező egyenese és a másik két oldal hossza. Szerkesszük meg a háromszöget.

374. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott $\beta-\gamma$, m_a, b.

375. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő szögek különbsége és a hozzá tartozó magasság.

376. Egy szög egyik szárának tetszés szerinti pontjából szerkesszünk párhuzamost a szögfelezővel. Igazoljuk, hogy ezen egyenes bármely pontjának a szögszáraktól való távolságai ugyanannyival térnek el egymástól.

377. Szerkesszünk négyszöget, ha ismerjük oldalait, és tudjuk, hogy egyik átlója felezi az egyik szöget.

378. Mutassuk meg, hogy egy pontnak három különböző egyenesre vonatkozó tükörképe akkor és csak akkor lehet egy egyenesen, ha a pontból az egyenesre emelt merőlegesek talppontjai is egy egyenesen vannak.

379. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsának a másik két csúcshoz tartozó négy szögfelezőre vonatkozó tükörképei egy egyenesen vannak.

380. Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak.

381. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott három oldalfelező merőlegese és az egyik oldal egy pontja.

382. Egy egyenes egyik partján két kör helyezkedik el. Szerkesszünk az egyenesen pontot, amelyből a körökhöz húzott érintők egyenlő szöget zárnak be az egyenessel.

383. Egy szög szárai között adott két pont. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja az egyik szögszáron van, szárai átmennek egy-egy adott ponton, harmadik csúcsa pedig a másik szögszáron helyezkedik el.

384. Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott annak AB és CD oldala, a BC és AD oldalak összege és az A csúcsnak a CD oldaltól mért távolsága; továbbá tudjuk, hogy a C és D csúcsnál fekvő szögek egyenlők.

385. Mutassuk meg, hogy ha egy sokszögnek több szimmetriatengelye van, akkor azok egy ponton mennek át.

386. Osszunk fel egy félkört páratlan számú egyenlő részre. Az osztópontokon át szerkesszünk párhuzamosokat az átmérővel. Húzzuk meg a két középső osztóponthoz tartozó sugarakat, és bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosok két sugár közé eső részeinek összege független az osztópontok számától.

387. Egy körön tűzzünk ki két pontot, és egy átmérőt forgassunk a középpont körül úgy, hogy azokat el ne válassza. Az átmérő minden helyzetében szerkesszük meg annak a fénysugárnak az útját, amely az egyik kitűzött pontból indul, és az átmérőtől visszaverődve a másik kitűzött ponthoz ér. Mi lesz az átmérőn levő ütközési pontok mértani helye?

388. Bizonyítsuk be, hogy ha két egybevágó háromszög ellentétes körüljárású, akkor a megfelelő csúcsokat összekötő szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

389. Rajzoljunk fel egy tetszőleges négyszöget, és tükrözzük azt egyik csúcsára.

390. Mutassuk meg, hogy egy szakasz és egy pontra vonatkozó tükörképe vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesbe esnek.

391. Adjunk meg két párhuzamos és egyenlő szakaszt. Szerkesszük meg azt a pontot, amelyre tükrözve a szakaszokat, egymásba mennek át.

392. Soroljunk fel középpontosan szimmetrikus alakzatokat.

393. Mutassuk meg, hogy ha a háromszöget egyik oldalának felezőpontjára tükrözzük, paralelogrammát kapunk.

394. Tükrözzünk egy egyenlő oldalú háromszöget középpontjára. Mi lesz az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?

395. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög nem lehet középpontosan tükrös alakzat.

396. Mutassuk meg, hogy ha a középpontos tükrözésnél egy egyenes önmagába megy át, akkor a középpont rajta van az egyenesen.

397. Igazoljuk, hogy egy háromszög pontra vonatkozó tükörképét úgy is megszerkeszthetjük, hogy a háromszöget a középpont körül 180°-kal elfordítjuk.

398. Tűzzünk ki egy t egyenest és rajta egy O pontot. A sík egy tetszőleges pontját tükrözzük a t-re, a tükörképet az O-ra, majd ismét a t-re és újra az O-ra. Mutassuk meg, hogy így mindig visszajutunk az eredeti pontba.

399. Jelöljük ki a síkon az A és B pontokat. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P pontját az A-ra, majd a tükörképet B-re. Mutassuk meg, hogy így ugyanoda jutunk, mint ha pontunkat az AB-vel párhuzamosan az AB szakasz kétszeresével eltoljuk; az eltolás iránya A-ból B felé mutat.