SOKSZÖGEK SZÖGÖSSZEGE, KÜLSŐSZÖG-TÉTEL. EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖG

69. Mekkora a *a)* 4, *b)* 8, *c)* 13, *d)* 96, *e)* n oldalú konvex sokszög szögeinek összege?
70. Hány oldalú az a sokszög, melyben a szögösszeg 1620°?
71. Mekkora az egyenlő szögű *a)* ötszög, *b)* hatszög, *c)* hétszög, *d)* tízszög, *e)* n-szög egyik szöge?
72. Mutassuk meg, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 60°-os, akkor a háromszög egyenlő oldalú.
73. Igazoljuk, hogy egy négyszögnek nem lehet minden szöge hegyesszög.
74. Rajzoljunk fel olyan *a)* hatszöget, *b)* nyolcszöget, amelyben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra.
75. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor az oldalszám páros.
76. Hogyan változik meg egy sokszög szögeinek összege, ha az oldalak számát néggyel növeljük?
77. Egy sokszög szögösszege s. Hogyan változik a szögösszeg, ha az oldalak számát kétszeresére növeljük?
78. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében tűzzünk ki egy pontot, és kössük össze a sokszög csúcsaival. Hány háromszög keletkezik így, mekkora ezek szögösszege?
79. Mekkora a *a)* háromszög, *b)* négyszög, *c)* ötszög külső szögeinek összege?
80. Ha egy sokszög belső szögeinek összegéhez hozzáadjuk egyik külső szögét, 1846°-ot kapunk. Hány oldalú a sokszög, és mekkora a külső szög?
81. Egy sokszög belső szögeinek összege 18 540°. *a)* Hány oldalú a sokszög? *b)* Mekkora a külső szögek összege?
82. Bizonyítsuk be, hogy konkáv négyszögben is 360° a belső szögek összege.
83. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.
84. Egy meghatározott körüljárási irányt véve, jelöljük meg egy $ABCD$ konvex négyszög szögeit, és toljuk el azokat az A csúcsba. Mekkora szöget adnak a külső szögek együttesen? Általánosítsuk a feladatot.
85. Tudjuk, hogy egy n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.
86. Mutassuk meg, hogy egy háromszög külső szögei között legfeljebb egy hegyesszög lehet, de mindig van legalább két tompaszög.
87. Melyik az a legkisebb oldalszámú konvex sokszög, amelynek a külső szögei között már biztosan van hegyesszög?
88. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alappal szemközti csúcsban szerkesztett külső szögfelező párhuzamos az alappal.
89. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög egyik külső szögének felezője párhuzamos a szemközti oldallal, akkor a háromszög egyenlő szárú.
90. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó ma-

gasságnak az alappal bezárt szöge mindig fele az alappal szemközti szögnek.

91. Van-e olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben egy szárhoz tartozó magasságnak az alappal bezárt szöge a csúcsnál levő szög harmadrésze?

92. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög egyik külső szöge az egyik nem szomszédos belső szög kétszerese, akkor a háromszög egyenlő szárú.

93. Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög egyik oldalegyenesén levő két külső szög összege a két nem szomszédos belső szög összegével egyenlő.

94. Hány oldalú a konvex sokszög, ha belső szögeinek összege háromszor akkora, mint a külső szögek összege?

95. Egy háromszög két szögének aránya 5:7. A háromszög harmadik szöge $\frac{1}{18}$ egyenesszöggel nagyobb az elsőnél. Mekkorák a háromszög szögei?

96. Egy háromszög egyik szöge 70°. A másik két szög aránya 5:6. Mekkorák a háromszög szögei?

97. Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint *a)* 1:2:3, *b)* 3:4:5, *c)* 3:7:8. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

98. Egy háromszög egyik szöge 42°24′. A másik két szög közül az egyik 27,1°-kal nagyobb a másiknál. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

99. Egy ötszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1:2:3:4:5. Mekkorák az ötszög szögei?

100. Mutassuk meg, hogy egy egyenesre egy külső pontból csak egy merőleges bocsátható.

101. Egy háromszög egyik külső szöge 87°, egyik belső szöge pedig 27°. Mekkorák a háromszög szögei?

102. Van-e olyan háromszög, amelyben az egyik szög kétszer akkora, a másik szög pedig háromszor akkora, mint a harmadik csúcsnál levő külső szög?

103. Egy háromszög két külső szöge 128° és 116°. Mekkorák a háromszög szögei?

104. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 87°. Mekkorák a háromszög szögei?

105. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge *a)* 96°, *b)* 64°. Mekkorák a szögei?

106. Egy háromszög egyik szöge *a)* 32°, *b)* 42,31°, *c)* 50°14′. Határozzuk meg a másik két szög szögfelezője által alkotott szög nagyságát.

107. Mekkora szöget zárnak be a derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfelezői?

108. Igazoljuk, hogy a háromszög két szögének felezője 90°-kal nagyobb szöget zár be a harmadik szög felénél.

109. Mekkora szöget alkotnak egymással a háromszög magasságvonalai, ha

a) $\alpha = 22{,}5°$ és $\beta = 75°$;
b) $\alpha = 30°$ és $\gamma = 45°$;
c) $\beta = 15°$ és $\gamma = 60°$.

Két egyenes szögén a keletkező kétféle szög közül a kisebbiket értjük.

110. Az *ABC* háromszögben $A\sphericalangle = 47°42'$, $B\sphericalangle = 73°10'$. Mekkora szöget zárnak be egymással az *A* és *B* csúcsokhoz tartozó *a)* szögfelezők, *b)* magasságvonalak?

111. Mekkora szöget zár be az előző feladatbeli háromszögben az A csúcshoz tartozó szögfelező a szemközti oldallal?

112. Egy négyszögben $A\sphericalangle = 72°$, $B\sphericalangle = 122°$, $C\sphericalangle = 68°$. Mekkora szöget zárnak be az A és C csúcsokhoz tartozó szögfelezők?

113. Mekkora szöget zárnak be az előző feladatban az A és B csúcsokhoz tartozó szögfelezők?

114. Egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti szöge 30°. Mekkora szöget zár be az egyik szárhoz tartozó magasságvonal *a)* az alappal, *b)* a másik szárral?

115. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magasság a másik szárral 13°-kal kisebb szöget alkot, mint az alapon levő szög. Mekkorák a háromszög szögei?

116. A derékszögű háromszög egyik szöge 27°. Mekkora szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

117. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben a oldal és m_b magasság által bezárt szög egyenlő b oldal és m_a magasság által bezárt szöggel.

118. Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszögben a derékszög szögfelezője és az átfogóhoz tartozó magasság 45°-kal kisebb szöget zár be, mint a háromszög egyik hegyesszöge.

119. Egy háromszög két szöge α és β. Mekkora szöget zárnak be egymással *a)* a szögek felezői *b)* a külső szögek felezői, *c)* a szögek csúcsaihoz tartozó magasságvonalak?

120. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák a külső szögfelezők által alkotott háromszög szögei?

121. Egy háromszög két szöge 67° és 33°. *a)* Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező? *b)* Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

122. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó szögfelező a szemközti oldallal olyan két szöget zár be, amelyeknek különbsége a háromszög másik két szögének különbségével egyenlő.

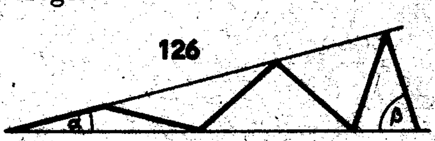
123. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsnál levő szögfelezője olyan két háromszögre bontja a háromszöget, amelyeknek a szögei ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei?

124. Egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti szöge 36°. Bizonyítsuk be, hogy az alapon levő szög szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontja.

125. Egy egyenlő szárú háromszög alapszögének felezője a háromszög alapjával egyenlő. Mekkorák a háromszög szögei?

126. A 126. ábrán vastagon húzott szakaszok egyenlők. Mekkora a β, ha $\alpha = 15°$?

126



127. A 126. ábrán hat egyenlő szakaszból áll a vastag törött vonal. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ez a törött vonal már nem folytatható tovább az ábrán látható módon. *b)* Hogyan kellene megválasztani az α-t, hogy a törött vonal tíz egyenlő szakaszt is tartalmazzon?

128. Mutassuk meg, hogy ha az előző feladatban szereplő törött vonal n számú szakaszból áll, akkor α kisebb 90° n-ed részénél.

129. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel az E és D pontokat úgy, hogy $BE = BC$ és $AD = AC$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett CDE háromszög egyenlő szárú, és csúcsnál levő szöge 45°.

130. Adott ABC háromszög AC oldalán vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AB$ és $CE = CB$ legyen. Határozzuk meg az így létrejött DBE háromszög szögeinek nagyságát.

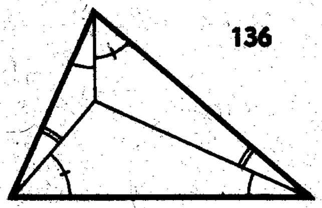
131. Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelező messe a BC oldalt egy D pontban, a külső szögfelező pedig ugyanennek az oldalnak a meghosszabbítását egy E pontban. *a)* Milyen összefüggés van az ABC háromszög szögei között, ha $AD = AE$? *b)* Mekkorák a háromszög szögei, ha $C\sphericalangle = 34°$?

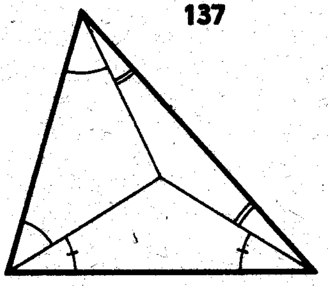
132. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A-n túl egy D pontig úgy, hogy $BA = AD$ legyen. Igazoljuk, hogy a DBC háromszög derékszögű.

133. Legyen BC az ABC háromszög leghosszabb oldala. Mérjük rá BC-re B-ből kiindulva AB-t és C-ből kiindulva AC-t, a felmért szakaszok végpontja E, ill. F. *a)* Mekkora az $EAF\sphericalangle$, ha a háromszög szögei α, β, γ? *b)* Mutassuk meg, hogy ha a háromszög derékszögű, $EAF\sphericalangle = 45°$.

134. Szerkesszünk az ABC háromszög A csúcsából a C csúcsbeli belső szögfelezővel párhuzamost. Igazoljuk, hogy ez a BC oldal meghosszabbításából az AC oldallal egyenlő szakaszt vág le.

135. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög BC oldalát a C csúcson túl az AC oldallal egyenlő szakasszal. Kössük össze ennek végpontját az A csúccsal, és mutassuk meg, hogy az összekötő egyenes párhuzamos a $C\sphericalangle$ belső szögfelezőjével.


136


137

136. A 136. ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe berajzolt szakaszok a magasságvonalak egyenesein vannak.

137. A 137. ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Számítsuk ki a belső pontnál levő szögeket, ha ismerjük a háromszög szögeit.

138. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja.

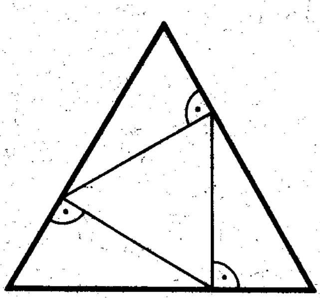
139. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, akkor a háromszög derékszögű.

140. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak.

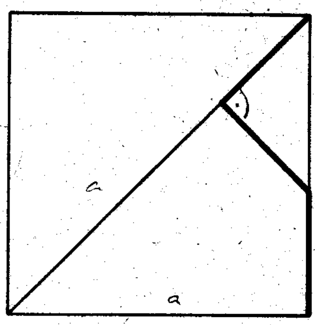
141. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak.

142. Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög oldalait három egyenlő részre osztó pontoknak a 142. ábrán látható összekötésekor keletkező megjelölt szögek derékszögek.

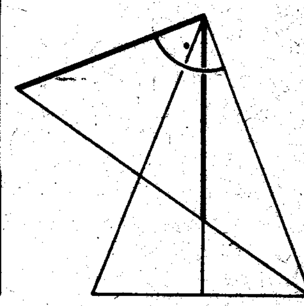
143. Egy négyzet átlóira a csúcsokból mérjük rá sorra a négyzet oldalait. Az így kapott pontokat kössük össze. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett négyszög ismét négyzet. *b)* Határozzuk meg az új négyzet oldalának hosszát.



142



145



146

144. Hosszabbítsuk meg egy négyzet átlóit mindkét irányban annyival, amekkora a négyzet oldala; az így kapott végpontok ismét négyzetet alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy e négyzet oldala az eredeti négyzet átlójának és oldalának összegével egyenlő.

145. Mérjük rá egy négyzet egyik átlójára az egyik csúcsból kiindulva a négyzet oldalát: a kapott végpontban emeljünk merőlegest az átlóra. Bizonyítsuk be, hogy a 145. ábrán vastagon jelölt három szakasz egyenlő.

146. Az egyenlő szárú háromszög csúcsában emeljünk merőlegest az egyik szárra. Szerkesszük meg e szár és az alap szögének, majd a csúcsnál levő szögnek a szögfelezőjét is. Igazoljuk, hogy a 146. ábrán vastagon jelölt szakaszok egyenlők.

147. Mutassuk meg, hogy ha az egyenlő szárú háromszög egyik szárának és a hozzá tartozó szögfelező irányának ismeretében meg tudnánk szerkeszteni a háromszöget, akkor tetszőleges szöget is tudnánk harmadolni.

148. Két, egymást kívülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos, de ellentétes irányú sugarakat. Igazoljuk, hogy e sugarak végpontjai és a körök érintkezési pontjai egy egyenesen vannak.

149. Az ABC háromszög AB alapját hosszabbítsuk meg A-n túl az AC szakasszal, B-n túl pedig a BC-vel, a kapott új végpontokat kössük össze C-vel. Mekkorák az így keletkezett háromszög szögei, ha az eredetié α, β, γ?

150. Az ABC háromszög A és B csúcsához tartozó belső szögfelezők metszéspontján keresztül szerkesszünk párhuzamost az AB oldallal. Mutassuk meg, hogy ennek a háromszög belsejében levő szakasza egyenlő az AC és BC oldalakból lemetszett kisebb szakaszok összegével.

151. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögben az átfogó a leghosszabb oldal.

152. Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontot egy egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül az egyenesre merőleges szakasz a legrövidebb.

153. Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra való vetületei mindig kisebbek a befogóknál.

154. Az ABC derékszögű háromszögben osszuk fel egyenlő részekre a BC befogót, és kössük az osztópontokat össze az A hegyesszögű csúccsal. Vizsgáljuk meg azokat az A-nál keletkezett szögeket, amelyeknek szárai két szomszédos osztóponton mennek át, és mutassuk meg, hogy ezek annál kisebbek, mennél távolabb vannak az AC befogótól.

155. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög kétszerese a másiknak, akkor az átfogó is kétszerese az egyik befogónak.

156. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján bárhol felvett pontnak a szemközti csúcstól való távolsága kisebb a száraknál.

157. Igazoljuk, hogy a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal bármely pontjával összekötő szakasz rövidebb a másik két oldal egyikénél.

158. Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megegyezik két oldalban, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben nagyobb, amelyikben a két oldal nagyobb szöget zár be.

159. Egy konvex négyszög a, b, c, d oldalaira fennáll az $a>b>c>d$ egyenlőtlenség. Igazoljuk, hogy az a és b által alkotott szög kisebb, mint a c és d által alkotott szög.

160. Vegyünk fel az ABC háromszög belsejében egy P pontot, és bizonyítsuk be, hogy az APB szög mindig nagyobb, mint az ACB szög.

161. Milyen irányban bocsássunk a tükör előtt álló A pontszerű fényforrásból fénysugarat a tükörre, hogy a visszavert fénysugár adott B ponton menjen át?

162. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap bármelyik pontjára nézve a száraktól mért távolságok összege állandó.

163. Igazoljuk, hogy ha bárhol is veszünk fel az egyenlő oldalú háromszög belsejében egy pontot, a három oldaltól mért távolságainak összege mindig ugyanakkora.

164. Létezik-e olyan háromszög, melynek oldalai *a)* 10, 12, 13, *b)* 1, 2, 3, *c)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, *d)* 1911, 1918, 3826?

165. Egy háromszög egyik oldala 1,8 m, a másik 0,7 m. Mekkora a harmadik oldal, ha tudjuk, hogy mértékszáma egész szám?

166. Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 3 és 6 cm. Mekkora a harmadik oldal?

167. Az egyenlő szárú háromszög egyik szárához húzott súlyvonal a háromszög kerületét 15 cm és 6 cm hosszúságú részekre osztja. Mekkorák a háromszög oldalai?

168. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalai közül a a legnagyobb, akkor a $2a$, b, c oldalakból nem lehet háromszögeket szerkeszteni.

169. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldala kisebb a fél kerületnél.

170. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely két belső pontjának távolsága kisebb a legnagyobb háromszögoldalnál.

171. Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely belső pontja és az egy-egy csúcs közti három szakaszból mindig lehet háromszöget szerkeszteni.

172. Igazoljuk, hogy ha P az ABC háromszög belső pontja, akkor $PB+PC<AB+AC$.

173. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege a kerület és a fél kerület közé eső számérték.

174. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik magassága kisebb, mint a vele azonos kezdőpontú oldalak összegének fele.

175. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög magasságvonalainak összege kisebb a háromszög kerületénél.

176. Legyen D az ABC háromszög AC oldalának tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB+BC-AC<2BD$.

177. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik oldalához tartozó súlyvonal kisebb a másik két oldal számtani közepénél.

178. Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege a kerület és a fél kerület közé esik.

179. Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege nagyobb a kerület háromnegyedénél.

180. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezőn jelöljünk ki egy tetszőleges A_1 pontot. Mutassuk meg, hogy az A_1BC háromszög kerülete nagyobb, mint az ABC háromszögé.

181. Igazoljuk, hogy a konvex négyszög szemközti oldalainak összege kisebb, mint az átlók összege.

182. Igazoljuk, hogy a konvex négyszög átlóinak összege kisebb a négyszög kerületénél, de nagyobb a négyszög fél kerületénél.

183. Mutassuk meg, hogy egy négyszögben bármelyik oldal kisebb a másik három összegénél.

184. Egy négyszög oldalai (ebben a sorrendben) 2, 6, 3 és 8 cm-esek. Bizonyítsuk be, hogy egyik átló sem érheti el a 9 cm-t.

185. Mutassuk meg, hogy a konvex négyszög síkjában az átlók metszéspontjában legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

186. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontnak egy sokszög csúcsaitól mért távolságösszege nagyobb a sokszög fél kerületénél.

187. Mutassuk meg, bárhogyan is adunk meg a síkon négy pontot (három nem lehet egy egyenesen), mindig ki lehet választani közülük hármat úgy, hogy azok ne legyenek egy hegyesszögű háromszög csúcsai.

188. Adjunk meg a síkon négy olyan pontot, hogy az általuk meghatározott négy háromszög mindegyike tompaszögű legyen.

189. A P és Q pontoknak a sík A és B pontjaitól mért távolságösszege egyenlő. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontjára ez az érték kisebb.