b) $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $\cos\frac{11\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

c) $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}$; $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$; $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}$; $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{10}$;

d) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}$; $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}$; $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$; $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{12}$;

e) sin 0,5; sin 3,14; sin (−2); sin (−100); sin 1962;
f) cos 3; cos 9,42; cos 0,3; cos 11; cos 48;
g) tg 9,5; tg 0,1; tg 7; tg 52; tg 360;
h) ctg 1,2; ctg 2; ctg 120; ctg 235; ctg 1000?

AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALKALMAZÁSA

397. Vezessük le: $\mathrm{ctg}\,(\alpha\pm\beta)$ kifejezését a $\mathrm{tg}\,(\alpha\pm\beta)$ képlet levezetése mintájára, valamint a $\mathrm{ctg}\,(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{\mathrm{tg}\,(\alpha\pm\beta)}$ összefüggés alapján!

398. $\sin(x+y)$; $\sin(x-y)$; $\cos(x+y)$ és $\cos(x-y)$ kifejezések felhasználásával alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $\sin(x+y)+\sin(x-y)$;
b) $\sin(x+y)-\sin(x-y)$;
c) $\cos(x+y)+\cos(x-y)$;
d) $\cos(x+y)-\cos(x-y)$.

Írjunk $x+y$ helyett α-t és $x-y$ helyett β-t. Hogyan alakulnak a kapott egyenlőségek?

399. Az addíciós összefüggések alapján hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sin\ (90°+\alpha)=$
b) $\cos\ (90°+\alpha)=$
c) $\mathrm{ctg}\ (90°+\alpha)=$
d) $\sin\ (90°-\alpha)=$
e) $\cos\ (90°-\alpha)=$
f) $\mathrm{ctg}\ (90°-\alpha)=$
g) $\sin\ (180°+\alpha)=$
h) $\sin\ 180°-\alpha)=$
i) $\cos\ (180°+\alpha)=$
j) $\cos\ (180°-\alpha)=$
k) $\mathrm{tg}\ (180°+\alpha)=$
l) $\mathrm{tg}\ (180°-\alpha)=$
m) $\sin\ (270°+\alpha)=$
n) $\cos\ (270°+\alpha)=$
o) $\mathrm{ctg}\ (270°+\alpha)=$
p) $\sin\ (\alpha-180°)=$
r) $\cos\ (\alpha-180°)=$
s) $\mathrm{tg}\ (\alpha-180°)=$

400. Az addíciós tételek alapján írjuk egyszerűbben a következő kifejezéseket:

a) $\mathrm{tg}\,(45°+\alpha)=$
b) $\mathrm{tg}\,(45°-\alpha)=$
c) $\sin(\alpha+60°)+\sin(\alpha-60°)=$
d) $\cos(45°+\alpha)+\cos(45°-\alpha)=$
e) $\sin(45°-\alpha)-\cos(30°+\alpha)+\sin^2 30°-\cos(45°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)+$
$+\sin^2 60°=$
f) $\sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°)=$
g) $\sin^2 30°+\mathrm{tg}\,30°\cdot\mathrm{tg}\,120°+\sin^2 120°=$

401. Számítsuk ki a 30°-; 45°-; 60°- és 90°-os szögek tanult szögfüggvényeinek értékét felhasználva a 15°-, a 75°-, a 105°-, a 120°- és a 135°-os szögek szögfüggvényértékeit!

402. Az egységsugarú körbe rajzolt szabályos tízszögből határozzuk meg a 18°-os és a 72°-os szögek szögfüggvényértékeit.

403. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú körbe szerkesztett $ABCDE$ szabályos ötszögben $(AB \cdot AC)^2 = 5$.

404. Számítsuk ki a 63°-os és a 27°-os szögek szögfüggvényértékeit a 45°-os és az előző feladatban kapott 18°-os szögek szögfüggvényértékei segítségével.

405. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora:

$\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$; $\operatorname{ctg} 2\alpha$; ha

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$;

b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4$;

d) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.

406. Számítsuk ki $\operatorname{tg} 2\alpha$ értékét, ha $\sin(90°-\alpha) = \frac{1}{3}$ $(0 < \alpha < 90°)$.

407. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, ha

a) $\cos\alpha = \frac{7}{25}$;

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

c) $\cos\alpha = \frac{7}{16}$;

d) $\cos\alpha = 0$;

e) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.

408. Számítsuk ki a 36°-os szög szögfüggvényértékeit a 18°-os szögre kapott szögfüggvényértékek segítségével.

409. Számítsuk ki a 15°-, 22,5°-, 67,5°-os s végül a 7,5°-os szögek szögfüggvényértékeit a 30°-, 45°-, 135°-os s végül a feladatban kapott 15°-os szögek szögfüggvényértékei segítségével.

410. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy a $2x$-nek függvényeit x függvényeivel helyettesítjük:

a) $\frac{\sin 2x}{2\sin x} =$

b) $\cos 2x + 2\sin^2 x =$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x =$

d) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x =$

e) $\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{\sin 2x}=$

f) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\sin^2 2x}=$

g) $(\cos x+\sin x+1)\cdot(\cos x+\sin x-1)-\sin 2x=$

h) $\dfrac{(2+\sin 2x)\cdot(\sin x-\cos x)+(2-\sin 2x)\cdot(\sin x+\cos x)}{(2+\sin 2x)\cdot(\sin x-\cos x)-(2-\sin 2x)\cdot(\sin x+\cos x)}=$

411. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy az x-nek függvényeit az $\dfrac{x}{2}$ függvényeivel helyettesítjük s a $2x$ függvényeit x függvényeivel:

a) $\dfrac{\sin^3 x+\sin x\cdot\cos^2 x}{1+\cos x}=$

b) $\dfrac{\cos 2x-2\cos x+1}{\cos 2x+2\cos x+1}=$

c) $\dfrac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=$

d) $\dfrac{2\sin x+\sin 2x}{1-\cos 2x}=$

412. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\sin x \leqq \dfrac{3}{4}-\dfrac{\cos 2x}{4}$;

b) $\cos x \leqq \dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 2x}{4}$.

413. Fejezzük ki α; β; γ szögfüggvényeivel a következő kifejezéseket:

a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$; c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

414. Fejezzük ki α szögfüggvényeivel:

a) $\sin 3\alpha$;
b) $\cos 3\alpha$;
c) $\operatorname{tg} 3\alpha$;
d) $\sin 4\alpha$;
e) $\cos 4\alpha$;
f) $\sin 6\alpha$;
g) $\cos 6\alpha$;
h) $\sin 8\alpha$;
i) $\cos 8\alpha$;
j) $\sin 5\alpha$;
k) $\cos 5\alpha$;
l) $\sin 10\alpha$;
m) $\cos 10\alpha$

szögfüggvényeket!

415. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket, felhasználva az előző feladat eredményeit:

a) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{2\cdot\cos^3\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}=$

b) $\dfrac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}=$

c) $\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=$

d) $\dfrac{\sin 3\alpha+4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha-4\cos^3\alpha}=$

e) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin^3\alpha}{2\cos^3\alpha-\cos\alpha}=$

f) $\dfrac{\cos 3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}=$

g) $\sin 3\alpha-\cos 3\alpha+(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(1-2\sin 2\alpha)=$

h) $\cos(30^\circ+\alpha)\cdot\cos(30^\circ-\alpha)-\dfrac{\sin 3\alpha}{4\sin\alpha}=$

i) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}=$

j) $\sin 3\alpha\cdot\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\cdot\cos 3\alpha=$

416. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

a) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}=2;$

b) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}=2;$

c) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha};$

d) $\dfrac{4\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha};$

e) $\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1.$

417. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

a) $\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta;$
b) $\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta;$
c) $\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos\beta;$
d) $\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)=-\sin\beta;$
e) $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin\beta+\cos\beta);$
f) $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\cos\beta-\sin\beta);$
g) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ vagy
$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha;$
h) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta;$
i) $\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\cos\beta;$
j) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta;$
k) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha;$
l) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha;$
m) $\sqrt{(1+\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)}=\pm\cos\alpha;$
n) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha;$
o) $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha.$

418. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha=$
b) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=$
c) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=$
d) $\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=$
e) $1+\sin\alpha+\cos\alpha=$
f) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=$

419. Bizonyítsuk be, hogy

$\cos^2(\alpha+x)+\cos^2 x-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$ kifejezés független x-től.

420. Igazoljuk, hogy

a) $\cos 36°-\sin 18°=\dfrac{1}{2}$;

b) $\sin 75°-\sin 15°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (=\sin 45°)$;

c) $\mathrm{tg}\,15°+\mathrm{ctg}\,15°=4$;

d) $\mathrm{tg}\,135°+(1-\cos 15°)\cdot(1+\sin 75°)+\mathrm{ctg}\,45°+\cos 75°\cdot\cos 15°\cdot\mathrm{ctg}\,15°=$
$=1$;

e) $\cos 24°+\cos 48°-\cos 84°-\cos 12°=\dfrac{1}{2}$;

f) $\sin 18°\cdot\sin 234°=-\dfrac{1}{4}$;

g) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=\dfrac{1}{2}$, ha $\alpha=20°$;

h) $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha=-\dfrac{1}{2}$, ha $\alpha=20°$;

i) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-\cos 4\alpha=\dfrac{1}{2}$, ha $\alpha=20°$;

j) $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$;

k) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$;

l) $\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{3\pi}{n}+\cos\dfrac{5\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{(n-2)\pi}{n}=\dfrac{1}{2}$;

m) $\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$;

n) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$;

o) $\mathrm{tg}\,20°\cdot\mathrm{tg}\,40°\cdot\mathrm{tg}\,60°\cdot\mathrm{tg}\,80°=3$;

p) $\cos 12°\cdot\cos 24°\cdot\cos 36°\cdot\cos 48°\cdot\cos 60°\cdot\cos 72°\cdot\cos 84°=\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$;

r) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4;$

s) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2 \cdot \cos 15^\circ;$

t) $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3};$

u) $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0;$

v) $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2};$

w) $(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1)^3 + 27 \sin^6 \alpha \cdot \cos^6 \alpha = 0;$

z) $2 \cdot (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3 \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0.$

421. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám és $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$, akkor:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \ldots\ldots \cos n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

422. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám és $\alpha = \dfrac{\pi}{2n}$, akkor:

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin (2n-1)\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

423. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

424. Mely α hegyesszögre lesz:

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7?$$

425. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

a) $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} + \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)} = 0;$

b) $\sin^2 (\alpha - \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin (\alpha - \beta) \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha;$

c) $\sin \alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$

d) $\cos \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$

e) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

f) $2\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \sin 2\alpha$;

g) $2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha$;

h) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$ és $\dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$;

i) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$ és $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1} = \cos 2\alpha$;

j) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

k) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

l) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$;

m) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$;

n) $\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$;

o) $2\cdot\cos^2(45^\circ+\alpha) = 1-\sin 2\alpha$;

p) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 4\cdot\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

r) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\beta)^2 = 4\cdot\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

s) $\operatorname{ctg} a-\sin 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos 2\alpha$;

t) $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

426. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\sin 3\alpha = 4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

b) $\cos 3\alpha = 4\cdot\cos\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

427. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \neq 90^\circ+k\cdot 360^\circ$ (k egész szám), akkor

$$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

428. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sin\alpha \neq -1$, akkor:

$$\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

429. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sin\alpha \neq -1$, akkor

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

430. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \neq 90+k\cdot 180^\circ$, akkor

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$$

431. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\cos 2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$ ha $\alpha \neq k\cdot 90^\circ$;

b) $\dfrac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\alpha$, ha $\alpha \neq k\cdot 180^\circ$;

c) $8\cdot\cos^4\alpha-5\cdot\cos^2\alpha+2-2\sin^2\alpha+3\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=5\cos^4\alpha$;

d) $\cos\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

432. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

b) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$;

c) $\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$;

d) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

e) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

f) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

g) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

h) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

433. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\cos\frac{\alpha}{3}+\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}+\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}=0;$

b) $\cos\frac{\alpha}{3}\cdot\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}+\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}+\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}\cdot\cos\frac{\alpha}{3}=-\frac{3}{4};$

c) $\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}=\frac{\cos\alpha}{4}.$

434. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, akkor:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2};$

b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2};$

c) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma;$

d) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-1;$

e) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma;$

f) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=1;$

g) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2};$

h) $t=s^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, ha t háromszög területe, $s=$ a háromszög félkerülete;

i) $r=\frac{s}{4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$, ha $r=$ a háromszög köré írt kör sugara;

j) $t=2r^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma;$

k) $\varrho=4r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$, ha ϱ a háromszögbe írt kör sugara;

l) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma;$

m) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$

n) $d_1\cdot d_2\cdot d_3=4\cdot\varrho^2\cdot r$, ha ϱ a háromszögbe írt kör sugara; r a háromszög köré írt kör sugara; d_1, d_2, d_3, a beírt kör középpontjának távolsága a csúcsoktól.

435. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben:

a) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$ (tangenstétel);

$$b)\ \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};\qquad c)\ \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

SZÖVEGES FELADATOK HÁROMSZÖGEKRE, NÉGYSZÖGEKRE, SOKSZÖGEKRE AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALAPJÁN

436. Bizonyítsuk be a következő tételt: Ha c a derékszögű háromszög átfogója, a és b pedig a befogói, akkor c^2, $2ab$ és b^2-a^2 szintén derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai, s ennek egyik hegyesszöge az eredeti háromszög kisebbik hegyesszögének kétszerese.

437. Bebizonyítandó, hogy bármely derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{b+c}$ (c az átfogó). Fejezzük ki $\frac{\alpha}{2}$ minden szögfüggvényértékét a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ segítségével.

438. Valamely derékszögű háromszögben az átfogó és az egyik befogó összege: $c+b=14$ cm; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, ahol α az a befogóval szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög oldalainak mértékszámát trigonometriai táblák felhasználása nélkül.

439. Egy derékszögű háromszögben adott a derékszög felezője: f_γ és az α hegyesszög. Fejezzük ki a háromszög oldalait és területét a megadott alkotórészekkel, és állapítsuk meg, mikor lesz a háromszög területe a legkisebb.

440. Egy háromszögnek adott két oldala, és tudjuk, hogy a szögek aránya 1:2. Mekkorák a háromszög szögei és az ismeretlen harmadik oldala?

a) $a=5$ cm; $b=4$ cm; *b)* $a=7$ cm; $b=4$ cm.

441. Egy háromszög két oldala 3 és 4 cm, az általuk közbezárt szög 60°. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?

442. Egy háromszög két oldala 10 cm és 5 cm; az általuk bezárt szög kétszerese a rövidebbik oldallal szemben fekvő szögnek. Mekkorák a háromszög szögei?

443. Egy háromszög két oldalának összege 132,7 cm, a harmadik oldalon fekvő szögek 27°45′ és 72°17′ nagyságúak. Mekkorák a háromszög oldalai?

444. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm, egyik oldala 7 cm és a másik két oldal aránya 5:3. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

445. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha adott a, α és $m_b:m_c=k$!
Számítsuk ki a feladatot, ha $a=260$ cm; $\alpha=67°23'$ és $m_b:m_c=21:13$.

446. Egy háromszögben két oldal aránya 1:2; az általuk bezárt szög 40°, a harmadik oldal 15 cm. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

447. Egy háromszög szögei tangenseinek aránya 1:2:3. Mi az oldalak aránya?

448. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei és oldalai, ha tudjuk, hogy $a:b = 1:2$; $\alpha:\beta = 1:3$ és $c = 5$ cm?

449. Egy háromszög két oldala 15 cm és 9 cm hosszú. A nagyobbik oldallal szemközti szög háromszor akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög.

a) Mekkorák a háromszög szögei és a harmadik oldal?

b) Mekkora a háromszögbe írható kör sugara?

450. Egy síktükörtől az A pont 4, a B pont 9 m-re s a két pont egymástól 20 m-re van. Mekkora beesési szöggel esik a tükörre az A pontból kiinduló fénysugár, ha a B pontba verődik vissza?

451. Egy egyenlő szárú trapézban a két párhuzamos oldal: $2a$ és $2b$ hosszú. A hosszabbik párhuzamos oldal egyik végpontjából a rövidebbik párhuzamos oldal α szög alatt látszik. Mekkora a trapéz területe?

Számítsuk ki a feladatot, ha $2a = 26$ cm; $2b = 16$ cm; $\alpha = 36°30'$.

452. P pont helyzetét kell az 1:1 250 000 méretű térképen három ponthoz, az úgynevezett háromszögelési pontokhoz viszonyítva meghatározni. A lemért látószögek: APB szög $= 83°$, APC szög $= 130°$, BAC szög $= 65°$. A lemért távolságok: $AB = 17{,}2$ cm és $AC = 20$ cm. Milyen távolságra van P pont az A ponttól a valóságban?

(A = Szeged; B = Miskolc; C = Győr; P = Budapest.)

453. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: APB szög $= 52°$; APC szög $= 23°$; $\alpha = 105°$; $AB = 15$ cm; $AC = 8$ cm. Mekkora az AP távolság a valóságban?

454. Egy négyszög oldalai: $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm; BAD szög $= 110°15'$. Az A csúcsból húzott átló a C csúcsnál levő szöget két részre bontja: BCA szög $= 29{,}3°$, ACD szög $= 35°45'$. Mekkora az AC átló?

455. Az $ABCD$ négyszögben adott AB és AD oldal, valamint az α szög és $\beta = \delta = 90°$. Mekkora az AC átló hossza?

Számítsuk ki a feladatot, ha $AB = 10$ cm, $AD = 20$ cm és $\alpha = 72°$.

456. Milyen messze van a derékszög csúcsától az egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az a belső P pontja, amelyből az egyik befogó 90°-os, a másik befogó 120°-os szög alatt látszik?

457. Egy háromszög alapját a hozzá tartozó magasság egy 9 és egy 4 cm-es darabra bontja. A háromszögnek az alap 4 cm-es darabja mellett levő szöge kétszerese a 9 cm-es darabon fekvő szögnek. Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora az alaphoz tartozó magasság?

458. Egy négyzet alapú egyenlő oldalélű gúla oldaléle o, az oldalél az alap síkjával α szöget zár be. Mekkora a test térfogata?

459. Határozzuk meg az egyenes körkúpba írt gömb térfogatát és a kúppalástot érintő kör sugarát, ha adott a kúp alkotója és az a szög, amelyet az alkotó az alapkör síkjával zár be.

460. Egyenes hasáb alapja egyenlő szárú háromszög. Mekkora a hasáb térfogata, ha adott az egyenlő szárú háromszög alapja: a, a szárak és az alap által bezárt α szög, és tudjuk, hogy a palást területe egyenlő az alaplapok területének összegével.

461. Szabályos háromoldalú gúla alapéle a, oldallapja az alaplap síkjával α szöget zár be. Mekkora a gúla felszíne és térfogata?

462. Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, és $\sin\gamma - \cos\alpha = \cos\beta$, akkor a háromszög derékszögű.

463. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\operatorname{tg}\beta\cdot\sin^2\gamma = \operatorname{tg}\gamma\cdot\sin^2\beta$, akkor a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.

464. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$a\cdot\operatorname{tg}\alpha+b\cdot\operatorname{tg}\beta=(a+b)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

465. Bizonyítsuk be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, és $\sin\gamma=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, akkor a háromszög derékszögű.

466. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2\cos\alpha$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

467. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$\frac{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

akkor a háromszög egyenlő szárú.

468. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\dfrac{1}{8}$, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

469. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \text{ és } \sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{3}{4},$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú.

470. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\alpha=120°$, akkor az oldalakra nézve fennáll:

$$b\,(a^2-b^2)=c\,(a^2-c^2).$$

471. Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan háromszögek közül, amelyeknek egyenlő a kerülete és egyenlő a γ szögük, annak lesz a legkisebb a c oldala, amelyben $\alpha=\beta$, azaz a háromszög egyenlő szárú.

472. Adott egy háromszög egyik szöge, α a szemközt fekvő oldal a és a másik két oldal különbsége: $b-c=d$. Mekkora a háromszög területe?

473. Egy kör 60°-os középponti szögét osszuk fel két részre úgy, hogy a részszögekhez tartozó húrok aránya: 5:2 legyen.

474. 60°-os szög egyik szárán A pont 16, B pont 25 cm-nyire van a szög csúcsától. Mekkora annak a körnek a sugara, amely az A és B pontokon megy át, és a szög másik szárát érinti?

475. Bizonyítsuk be, hogy

$\dfrac{1}{A_{2n}}=\dfrac{1}{A_n}+\dfrac{1}{a_n}$, ha ugyanarra a körre vonatkozólag a_n a beírt n oldalú, A_n a körülírt n oldalú és A_{2n} a körülírt $2n$ oldalú szabályos sokszög oldalát jelenti.

476. Egy szabályos hétszög átlói b és c, egyik oldala a. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

477. Számítsuk ki a szabályos ötágú csillag területét, ha ismerjük két szomszédos külső csúcspont összekötő egyenesének távolságát az ettől az egyenestől legtávolabb fekvő csúcsponttól.

478. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 1. A legkisebb szöge fele a legnagyobbnak. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

479. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ szögek cotangensei számtani sorozatot alkotnak, akkor

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=3.$$

480. Bizonyítsuk be, hogy minden húrnégyszögben

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$, ahol α az a és d oldalak által bezárt szög, és $a+b+c+d=2s$.

481. Egy húrnégyszög oldalai: a, b, c, d.

a) Mekkorák a négyszög átlói?
b) Mekkora a négyszög területe?
c) Mekkora a körülírt kör sugara?

482. Egy húrnégyszög oldalai: 41, 45, 22 és 31 cm hosszúak. Mekkora a területe?

483. Egy húrnégyszög oldalai: 13, 14, 16, 10 dm hosszúak. Mekkorák az átlói és a köré írt kör sugara?

484. Egy húrnégyszög három egymás utáni oldala $a=15$, $b=18$ és $c=20$ m, BD átlója 23 m. Mekkorák a szögei és az ismeretlen oldala?

485. Egy négyszögben $a:b:c:d=9:8:7:6$. Az a és d oldalak által bezárt szög $\alpha=72{,}6°$ és a négyszög területe 225 cm². Mekkorák a négyszög oldalai és ismeretlen szögei?

A SINUS- ÉS COSINUSFÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA ÉS NÉHÁNY TRANSZFORMÁCIÓJUK

486. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket a $[0,\ 2\pi]$ intervallumban:

a) $y=\sin x$; $\quad y=3\sin x$; $\quad y=\frac{1}{2}\sin x$;

b) $y=\cos x$; $\quad y=2\cos x$; $\quad y=\frac{1}{3}\cos x$;

c) $y=-\sin x$; $\quad y=-3\sin x$; $\quad y=-\frac{1}{2}\sin x$;

d) $y=-\cos x$; $\quad y=-2\cos x$; $\quad y=-\frac{1}{3}\cos x$;

e) $y = \sin x + 2$; $y = \sin x - 3$; $y = 2 \sin x + 3$;

f) $y = -\sin x + 3$; $y = -\frac{1}{2} \sin x + 2$; $y = -3 \sin x - 1$;

g) $y = \cos x + \frac{1}{2}$; $y = \cos x - 3$; $y = 3 \cos x - 2$;

h) $y = -\cos x - 2$; $y = -\frac{1}{3} \cos x + 3$; $y = -2 \cos x + 1$;

i) $y = \sin 2x$; $y = \sin \frac{1}{2} x$; $y = \sin \frac{1}{4} x$;

j) $y = \cos 3x$; $y = \cos \frac{1}{3} x$; $y = \cos 2x$;

k) $y = \sin(-x)$; $y = \sin(-2x)$; $y = \sin\left(-\frac{1}{3} x\right)$;

l) $y = \cos(-x)$; $y = \cos(-3x)$; $y = \cos\left(-\frac{1}{2} x\right)$;

m) $y = \sin(x + \pi)$; $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

n) $y = \sin(\pi - x)$; $y = \sin(x + 1)$; $y = \sin(x - 1)$;

o) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

p) $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $y = -\operatorname{tg} x$;

r) $y = |\sin x|$; $y = |\cos x|$;

s) $y = [\sin x]$; $y = [\cos x]$;

t) $y = [|\sin x|]$; $y = [|\cos x|]$.

487. Az alapfüggvény lineáris transzformációjával ábrázoljuk a következő függvényeket a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

a) $y = -3 \sin x + 4$;

b) $y = -\frac{1}{2} \cos x - 3$;

c) $y = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $y = \cos(-3x - \pi)$;

e) $y = -2 \sin(\pi - 2x) + 1$

f) $y = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$;

g) $y = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

h) $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

i) $y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

488. Grafikus összegezéssel ábrázoljuk a következő függvényeket a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $y = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $y = 2\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

e) $y = \sin x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

f) $y = 2\sin\frac{x}{2} + \cos x$;

g) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

489. A szögfüggvények összegére és különbségére kapott azonosságok alapján hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, s azután ábrázoljuk is ezeket:

a) $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

b) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

490. Állapítsuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, majd vizsgáljuk meg a függvények menetét. Ennek alapján vázoljuk fel a függvénygörbét.

a) $y = \sin x + \cos x$;
b) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
c) $y = 2^{\sin x}$;
d) $y = 2^{\cos x}$;

e) $y = \sqrt{1-\sin x}$;

f) $y = \sqrt{1-\cos x}$;

g) $y = \log_a \sin x$, illetve $y = \lg \sin x$;

h) $y = \sqrt{\log_a \sin x}$, illetve $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

i) $y = \sin (\sin x)$;

j) $y = \cos (\cos x)$;

k) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

l) $y = \dfrac{\cos x}{x}$;

m) $y = \sin x^2$;

n) $y = x \cdot \sin x$;

o) $y = x^2 \cdot \sin x$;

p) $y = x^2\,|\sin x|$.

491. Vizsgáljuk a következő függvényeket differenciálhányadosuk 0 helyein, azok környezetében. Készítsünk értéktáblázatot, állapítsuk meg a helyi maximum és minimum értékeit. Végül vázoljuk a függvényeket!

a) $y = \sin x - \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin x \cdot \cos x$;

b) $y = 6 \sin x - 3 \cos 2x + 2 \sin 3x$;

c) $y = 2 \sin x + \cos 2x$.

492. Mozogjon egy P pont az $AB = 2r$ átmérőjű félkörön. Húzzunk merőlegest P pontból az átmérőre és az átmérő A végpontjában húzott érintőre. Számítsuk ki az így keletkezett téglalap területét, mint a PAB szög (x) függvényét!

P pont milyen helyzetében lesz a téglalap területe maximális?

493. Az r sugarú gömb köré írható egyenes kúpok közül melyiknek a térfogata a legkisebb?

494. Mozogjon egy P pont az $AB = 2r$ átmérőjű félkörön. Kössük össze a P pontot a félkör középpontjával (O) és A-val. Szerkesszünk AP-re egyenlő oldalú háromszöget (kifelé).

a) Számítsuk ki az $AOPC$ négyszög területét, mint a PAB szög (x) függvényét! C az egyenlő oldalú háromszög harmadik csúcsa.

b) Mekkora x értéke, ha a négyszög területe $\dfrac{r^2\sqrt{3}}{2}$?

495. Oldjuk meg grafikus úton a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$;

b) $\cos x = 0{,}5$;

c) $\sin 2x = 0{,}5$;

d) $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$;
e) $\operatorname{ctg} x = 2 \cos x$.

496. Egy háromszög két oldala 5 cm és 10 cm hosszú. Az általuk bezárt szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki grafikus úton a háromszög szögeit.

497. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm hosszú. A nagyobbik oldallal szemközti szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög szögeit grafikus úton.

TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK

498. Határozzuk meg x-nek azon értékeit, melyek az alábbi trigonometrikus egyenleteket elégítik ki:

a) $\sin x = -0{,}66$;
b) $\sin x = 0{,}993$;
c) $7 \sin x = 3$;
d) $2 \sin x = 1$;
e) $2 \sin x = -1$;
f) $2 \sin x = -\sqrt{2}$;
g) $\cos x = 0{,}5$;
h) $\cos x = -0{,}95$;
i) $3 \cos x = 2$;
j) $2 \cos x = \sqrt{2}$;
k) $4 \cos^2 x = 1$;
l) $\operatorname{tg} x = 2{,}3$;
m) $7 \operatorname{tg} x = 9$;
n) $\operatorname{tg} x = -1$;
o) $\operatorname{ctg} x = -0{,}4$.

499. Határozzuk meg azon pozitív hegyesszögeket, amelyek kielégítik a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin 5x = \sin x$;
b) $\sin 4x = \sin \frac{x}{2}$;
c) $\sin \left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$;
d) $\cos 2x = -\cos x$;
e) $\cos 5x = \cos x$;
f) $\cos (3x + 8°) = -\cos x$;
g) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$;
h) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{12}\right)$;
i) $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
j) $\operatorname{ctg} (3x + 20°) = -\operatorname{ctg} x$;
k) $\operatorname{ctg} (5x + 20°) = -\operatorname{ctg} x$;
l) $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

500. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

b) $\sin 3x = \cos 5x$;

c) $\operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg} (5x - \pi) = 1$;

d) $\operatorname{tg} \pi \cdot (2x + 1) - \operatorname{tg} \pi \cdot (x + 1) = 0$;

e) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

501. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $2 \sin x = \operatorname{tg} x$;
b) $3 \sin x = 2 \operatorname{tg} x$;
c) $5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x$;
d) $7 \cos x = 4 \operatorname{ctg} x$;
e) $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.

502. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin x - \cos x = 0$;
b) $\sin x + \cos x = 0$;
c) $3 \sin x = 4 \cos x$;
d) $\sin x = 2 \cos x$;
e) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;
f) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;
g) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$;
h) $4 \cos^2 x = \sin^2 x$;
i) $\frac{1 - \sin x}{2 \cos x} = 1$;
j) $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

503. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$;
b) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$;
c) $2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$;
d) $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$;
e) $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$;
f) $5(1 - \cos x) = 4 \sin x$;
g) $\frac{\sin x}{1 - \sin x} = \cos x$;
h) $4 \sin x + 3 \cos x = 2$;
i) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$;
j) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$;
k) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$;
l) $\cos x - \sin^2 x = -0{,}4$;
m) $\cos x = \operatorname{tg} x$;
n) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} = 2\sqrt{3}$;
o) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 1{,}5$.

504. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $4 \cos x = \operatorname{tg} x$;
b) $16 \operatorname{tg} x = 15 \cos x$;
c) $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 1 = 0$;
d) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;
e) $5 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x = 11$;
f) $\operatorname{tg}^2 x - 5 = \dfrac{1}{\cos x}$;
g) $\operatorname{tg}^2 x + 17 = \dfrac{10}{\cos x}$;
h) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$;
i) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$;
j) $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 = 0$;
k) $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 = 0$;
l) $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$;
m) $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \dfrac{3}{4} \sin^2 2x = 0$;
n) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{7}{16}$;
o) $4 \cos^4 x = \cos 2x + \sin^2 2x$;
p) $5 \cos^2 x + \cos^2 2x = 4$;
r) $3 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x = 16$.

505. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin (60° - x) = 2 \sin x$;
b) $\cos (30° - x) = 3 \sin x$;
c) $2 \sin \left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3 \cos \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$;
d) $\operatorname{tg} (a + x) \cdot \operatorname{tg} (a - x) = \dfrac{1 - 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos 2a}$;
e) $\cos 2x = \sin x$;
f) $\sin 2x + \cos^2 x = 1$;
g) $4 \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$;
h) $\sin 2x - \cos x = 0$;
i) $3 \sin 2x = 2 \cos x$;
j) $\sin 2x = 2 \sin x$;
k) $\sin x = \dfrac{\cos 2x}{2}$.

506. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
b) $\cos 2x + \sin 2x = -1$;

c) $4\sin^2 x+\cos^2 2x-1=0$;
d) $12\sin^2 x-2\cos^2 x=3\cos 2x$;
e) $3\sin^2 x-4\cos^2 x=\dfrac{\sin 2x}{2}$;
f) $9\sin^2\dfrac{x}{2}+2\cos x=4$;
g) $\sin 2x\cdot(\sin x-1)=\cos x(\sin x+2)$;
h) $8\sin^2 x+4\sin 2x+5\cos 2x=8$;
i) $4\sin x\cos x-2(\sin x+\cos x)+1=0$.

507. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a) $2\sin 2x=\operatorname{tg} x$;
b) $\sin 2x=\operatorname{tg} x$;
c) $\sin x+\cos x=1{,}2$;
d) $\sin x+\cos x=1$;
e) $\sin x+\cos x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;
f) $\sin x+\cos x=\dfrac{5}{4}$;
g) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$;
h) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

508. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a) $\sin 2x=\cos 3x$;
b) $\sin 4x+\sin x=0$;
c) $\cos 3x+2\cos x=0$;
d) $\sin 4x-\sin 2x=\sin x$;
e) $\sin 2x+\sin 3x=3\sin x$;
f) $\sin 3x\cdot\sin x=\dfrac{1}{4}$;
g) $\sin 4x+\sin 2x=\sin 3x$;
h) $\cos 5x+\cos 3x=\cos 6x+\cos 2x$;
i) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;
j) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$;
k) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$;
l) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0$;
m) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$;
n) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$;
o) $\cos 10x+\operatorname{tg}^2 5x=2$;
p) $\sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=\sqrt{2}$;
r) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2\cdot\sqrt{2}$.

509. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

a) $16^{\sin^2 x}+4^{1+\cos 2x}=10$;

b) $\left[(\mathrm{tg}^2 x)^{\frac{1-\cos 2x}{2}}\right]^{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

510. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki, ha x a $4\cos^2 x+2\cos x-1=0$ egyenlet gyöke!

511. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

a) $x+y=45°$;
$2\,\mathrm{tg}\,x=3\,\mathrm{tg}\,y$;

b) $x+y=120°$;
$\sin x+\sin y=1{,}5$;

c) $x-y=60°$;
$\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y=3$;

d) $x+y=75°$;
$\sin^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{4}$;

e) $x+y=90°$;
$\cos^2 x-\cos^2 y=\frac{1}{2}$;

f) $\sin(x+y)=0{,}4540$;
$\sin(x-y)=0{,}3523$;

g) $\sin(x+y)=0{,}5299$;
$\sin(x-y)=0{,}9903$;

h) $\sin x+\sin y=\frac{7}{12}$;
$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{12}$;

i) $\cos x+\cos y=\frac{14}{15}$;
$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{5}$;

j) $\sin^2 x-\cos y=1$;
$\sin^2 x+\cos y=1$;

k) $\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2}$;
$\cos^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{2}$;

l) $\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}$;
$\cos x\cdot\cos y=\frac{3}{4}$;

m) $\sin(x+y)=\frac{1}{2}$;
$\sin 2x+\sin 2y=\frac{1}{2}$;

n) $\sin x\cdot\cos y=0$;
$(\sin x+\cos^2 y)\sin^2 y=\frac{1}{4}$;

o) $\sin(x+y)=\cos(x-y)$;
$\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y=1$;

p) $2\cos x+\cos y=1$;
$2\sin x-\sqrt{3}\sin y=0$;

r) $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

s) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=2$;
$\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,2y=1$;

t) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=2$;
$2\cos x\cos y=1$;

u) $9\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=4$;
$2\,\mathrm{ctg}\,x+4\,\mathrm{ctg}\,y=1$;

v) $\cos x+\cos y=1{,}94$;
$\cos 2x+\cos 2y=1{,}7661$;

z) $\cos x-\cos y=0{,}5$;
$\cos 2x+\cos 2y=-1{,}5$.

512. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

a) ${}^{2}\log y - {}^{2}\log x = 1;$

${}^{2}\log \cos (x+y) - {}^{2}\log \sin (x+y) = -3;$

b) $2^{x-2} = 4^{y-1};$

$$\sin\left(\frac{x}{2}+y\right) = 1-\cos x;$$

c) $x^{\operatorname{tg} y} = \dfrac{1}{8};$

$$x^{\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}} = 4;$$

513. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\cos a+\cos (a+x)+\cos (a+y) = 0$$
$$\sin a+\sin (a+x)+\sin (a+y) = 0$$

egyenletrendszer egyenértékű az

$$1+\cos x+\cos y = 0$$
$$\sin x+\sin y = 0$$

egyenletrendszerrel.

Határozzuk meg az utóbbi egyenletrendszer gyökeit.

514. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$a\cdot\sin^2 x+a_1\cdot\cos^2 x = b$$
$$a_1\cdot\sin^2 y+a\cdot\cos^2 y = b_1$$

egyenletek gyökei kielégítik az $a\cdot\operatorname{tg} x = a_1\cdot\operatorname{tg} y$ egyenletet, akkor

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1} = \frac{1}{b}+\frac{1}{b_1}.$$