A PONT ÉS EGYENES

HELYVEKTOR

515. Szerkesszük meg derékszögű koordináta-rendszerben a

a) $(4;\ 2)$; *b)* $(-5;\ 3)$; *c)* $(-6;\ -3)$; *d)* $(4;\ -2)$;
e) $(0;\ 0)$; *f)* $(6;\ 0)$; *g)* $(-2;\ 0)$; *h)* $(0;\ 4)$;
i) $(0;\ -2)$; *j)* $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; *k)* $\left(\frac{2}{3};\ -3{,}2\right)$; *l)* $(\sqrt{3};\ 0)$;
m) $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{5})$; *n)* $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \frac{\sqrt{8}+3}{2}\right)$ helyvektorokat, és számítsuk ki az abszolút értéküket. (A továbbiakban is koordináta-rendszeren mindig derékszögű koordináta-rendszert értünk, és a tengelyeken azonos egységeket veszünk fel.)

516. Jelöljünk ki helyvektorokat a koordináta-rendszerben, és határozzuk meg a koordinátáikat!

517. Ábrázoljuk azt a háromszöget, amelynél a csúcsok helyvektorai:

a) $(5;\ 1)$; $(-2;\ 3)$ és $(-1;\ 5)$; *b)* $(0;\ 0)$; $(-2;\ -5)$ és $(8;\ -1)$.

518. Ábrázoljuk azt a négyszöget, amelynél a csúcsok helyvektorai:

a) $(5;\ -2)$; $(4;\ 3)$; $(-2;\ 8)$; $(2;\ -5)$;
b) $(1;\ 4)$; $(-3;\ 0)$; $(-3;\ 5)$; $(4;\ 2)$.

519. Határozzuk meg a $(3;\ 4)$; $(-4;\ 2)$; $(2;\ -5)$; $(3;\ -5)$; $(4;\ 4)$; $(5;\ 0)$; $(2;\ -2)$; $(p;\ q)$ helyvektorok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat

a) az x tengelyre,
b) az y tengelyre,
c) az origóra,
d) az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45°-os szöget bezáró egyenesre,
e) a II. és a IV. síknegyedet felező és az origón áthaladó egyenesre tükrözzük.

520. Adott két helyvektor: $\mathbf{a}(a;\ b)$ és $\mathbf{b}(b;\ a)$. Hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva?

521. Egyenlő szárú háromszög alapja 10, magassága 6 hosszúságegység. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak helyvektorait, ha úgy helyezzük el a koordináta-rendszerben, hogy a kezdőpont az alap egyik végpontjában van, és az alap az x tengelyre illeszkedik. Hány megoldás van? Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha az alap 12, a szár 8 hosszúságegység. Hány megoldás van?

522. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja egy a oldalú négyzet középpontjában. Határozzuk meg a csúcsok helyvektorait, ha

a) a négyzet csúcsai a tengelyekre illeszkednek,

b) a négyzet oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.

523. Határozzuk meg a szabályos hatszög csúcsainak helyvektorait, ha az oldala 1; 2; 3; 4; a; $2a$ hosszúságegység, középpontja az origóban van, és egyik csúcsa

a) az x tengelyre,

b) az y tengelyre illeszkedik.

524. Határozzuk meg a szabályos nyolcszög csúcsainak helyvektorait, ha az átlója d, és egy-egy átló a koordináta-tengelyekre illeszkedik.

525. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek

a) az abszcisszája 0,

b) az ordinátája 0,

c) az abszcisszája 2, -3,

d) az ordinátája 4, -5,

e) az abszcisszája és ordinátája egyenlő,

f) a koordinátái abszolút értékben egyenlők.

526. Az $\mathbf{a}(2;\ 3)$, $\mathbf{b}(4;\ -5)$, $\mathbf{c}(-3;\ 8)$, $\mathbf{d}\left(-5;\ -\frac{3}{3}\right)$, $\mathbf{e}(a;\ b)$, $\mathbf{f}(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$ helyvektorokat 90°-kal elforgatjuk. Határozzuk meg az elforgatott helyvektorok koordinátáit. Írjuk fel azokat a helyvektorokat is, amelyek a megadott helyvektorokból $-90°$-os elforgatással adódnak.

KÉT VEKTOR ÖSSZEGÉNEK ÉS KÜLÖNBSÉGÉNEK, EGY VEKTOR SZÁMSZOROSÁNAK KOORDINÁTÁI. ADOTT SZAKASZT ADOTT ARÁNYBAN OSZTÓ PONT, SÚLYPONT

527. Legyen az $\mathbf{a}(3;\ 5)$; $\mathbf{b}(-4;\ 2)$; $\mathbf{c}(-2;\ -5)$; $\mathbf{d}(0;\ 3)$; $\mathbf{e}(5;\ -2)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2. $\mathbf{a}-\mathbf{c}$; 3. $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}+\mathbf{e}$; 4. $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$;

5. $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$; 6. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; 7. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

Ábrázoljuk a kapott vektorokat!

528. Egy háromszög csúcsai: $A(8;\ 2)$, $B(6;\ 9)$, $C(4;\ -3)$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Rajzoljuk meg az $\overrightarrow{AB}$-ral, $\overrightarrow{BC}$-ral és a $\overrightarrow{CA}$-ral egyenlő helyvektorokat. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ hosszúságát.

529. Egy négyszög csúcsai: $A(6;\ 4)$, $B(-2;\ 5)$, $C(-6;\ -3)$ és $D(1;\ -8)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ koordinátáit.

530. Állapítsuk meg a következő pontpárokkal meghatározott szakaszok felezőpontjainak koordinátáit:

a) $(6; 6)$ és $(2; 2)$;
b) $(4; 10)$ és $(12; 3)$;
c) $(-2; -6)$ és $(-3; 4)$;
* *d)* $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; -4\frac{5}{6}\right)$;
e) $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ és $(-\sqrt{8}; \sqrt{12})$;
f) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ és $\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
g) $\left(\frac{a-b}{2}; \frac{c-d}{2}\right)$ és $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{c+d}{2}\right)$.

531. Az AB szakasz felezőpontja $(-1; -1)$. A pont koordinátái $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. Határozzuk meg a B pont koordinátáit.

532. Felezzük meg az $A(2; 7)$; $B(1; 1)$; $C(3; 6)$ pontokkal adott háromszög oldalait. Igazoljuk, hogy a felezéspontok által meghatározott háromszög oldalai feleakkorák, mint az ABC háromszög oldalai. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

533. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai az $A_1(-2; 1)$; $B_1(4; -3)$; $C_1(2; 3)$ pontok. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit.

534. Határozzuk meg az $A(1; 2)$; $B(2; 6)$; $C(6; 4)$ csúcsokkal adott háromszög súlyvonalainak a hosszát.

535. Kössük össze a $(-3; 2)$ pontot az origóval. A kapott szakaszt hosszabbítsuk meg mindkét irányban önmagával. Határozzuk meg a végpontok koordinátáit. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

536. Osszuk fel

a) az $(5; 0)$; $(4; 3)$ pontokat összekötő szakaszt $3:4$, illetve $4:3$ arányban;
b) a $(3; -2)$; $(10; 12)$ pontokat összekötő szakaszt $2:5$, illetve $5:2$ arányban.

Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit. Hány megoldás lehetséges? (A pontok sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

537. Az $(1; 3)$ és $(5; -2)$ pontokat összekötő szakaszt harmadoljuk. Határozzuk meg az $(1; 3)$ ponthoz közelebb fekvő harmadoló pont koordinátáit.

538. Osszuk fel

a) a $(2; -2)$; $(6; 14)$ pontokat összekötő szakaszt négy egyenlő részre;
b) a $(3; 5)$; $(7; -2)$; pontokat összekötő szakaszt három egyenlő részre.

Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit.

539. A $(4; 3)$; $(6; -1)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk másfélszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

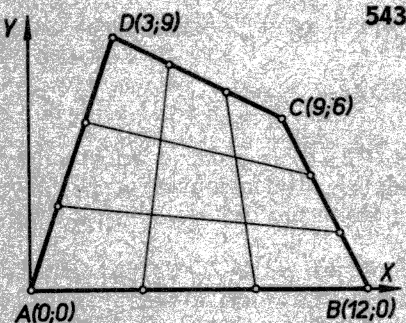
540. A $(-1; 4)$ és $(6; 2)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk négyszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

541. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsai:

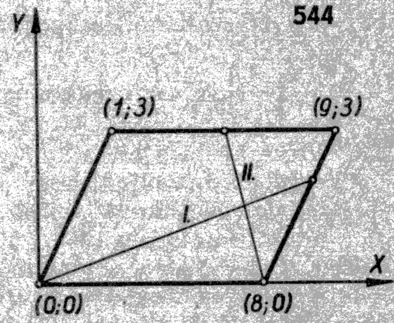
a) $A(8;\ 2)$; $B(4;\ 6)$; $C(0;\ -2)$;
b) $A(6;\ 2)$; $B(-4;\ 1)$; $C(2;\ -3)$;
c) $A(\sqrt{2};\ -\sqrt{3})$; $B(-\sqrt{8};\ \sqrt{12})$; $C(-\sqrt{32};\ \sqrt{27})$;
d) $A\left(\frac{a-b}{2};\ \frac{a+b}{2}\right)$; $B\left(\frac{a-b}{3};\ \frac{a+b}{3}\right)$; $C(a+b;\ a-b)$.

542. Egy háromszög csúcsai: $A(2;\ 2)$; $B(2;\ 4)$; $C(6;\ 4)$. Számítsuk ki a háromszög oldalait, a súlypontjának koordinátáit.

543. Rajzoljuk meg az $A(0;\ 0)$; $B(12;\ 0)$; $C(9;\ 6)$; $D(3;\ 9)$ pontokkal meghatározott négyszöget. Harmadoljuk meg az oldalait, majd kössünk össze két-két szemközti harmadolópontot. Igazoljuk, ezek az egyenesek egyenlő darabokra vágják (szintén harmadolják) egymást (543. ábra).



543



544

544. A $(0;\ 0)$; $(8;\ 0)$; $(9;\ 3)$; $(1;\ 3)$ pontokkal meghatározott paralelogrammában kössük össze a $(0;\ 0)$ csúcsot a $(8;\ 0)$ és $(9;\ 3)$ pontokkal meghatározott oldal „felső" harmadolópontjával, a $(8;\ 0)$ csúcsot pedig az $(1;\ 3)$ és a $(9;\ 3)$ csúcsokat összekötő oldal felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott első szakasz felezi a második szakaszt, ez viszont $\frac{1}{4}$ részt vág le az előbbiből (544. ábra).

545. Bizonyítsuk be, hogy az

a) $A(1;\ 3)$; $B(4;\ 7)$; $C(2;\ 8)$; $D(-1;\ 4)$;
b) $A\left(\frac{3}{2};\ 1\right)$; $B(2;\ 5)$; $C(3;\ -2)$; $D\left(\frac{5}{2};\ -6\right)$;
c) $A(1;\ 2)$; $B(-5;\ 1)$; $C\left(-6;\ -\frac{1}{2}\right)$; $D\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$

pontok paralelogrammát határoznak meg.

546. Adott a paralelogramma három csúcsa:

a) $(0;\ 0)$; $(3;\ 1)$; $(1;\ 3)$;
b) $(4;\ 2)$; $(5;\ 3)$; $(6;\ -4)$;
c) $(1;\ 4)$; $(3;\ 2)$; $(6;\ 5)$.

Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit.
Hány megoldás van?

547. Egy háromszög csúcsai: $A(4;\ 1)$; $B(7;\ 5)$; $C(-4;\ 7)$. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők az oldalakat metszik.

548. Egyenes vonalú mozgást végző pont átmegy az $A(2;\ 6)$ és a $B(8;\ 1)$ ponton. Milyen pontokban metszi a pálya a koordináta-tengelyeket?

549. Egy egyenes az x tengelyből $OA = 6$, az y tengelyből $OB = 8$ hosszúságegységnyi szakaszt vág le. Határozzuk meg az OAB derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talppontjának a koordinátáit.

550. Két kör középpontja: $O_1(2;\ 5)$; $O_2(7;\ 10)$. Sugaruk rendre: $r_1 = 3$ egység, $r_2 = 7$ egység. Határozzuk meg a két kör közös érintőinek a metszéspontját.

551. Igazoljuk koordináta-geometriai úton is, hogy
a) a derékszögű háromszög átfogójának felezéspontja egyenlő távol van a csúcsoktól;
b) a négyszög szemközti oldalainak felezőpontját összekötő szakaszok felezik egymást;
c) a négyszög oldalainak felezéspontját összekötő szakaszok paralelogrammát határoznak meg.

552. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenesre a csúcsokból merőlegeseket rajzolunk, akkor az egyenes egyik oldalán levő merőleges távolság egyenlő a másik oldalon levő két merőleges távolság összegével.

553. Egy háromszög oldalait ugyanolyan forgási irányban, azonos arányban meghosszabbítjuk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező háromszögnek és az eredetinek közös a súlypontja.

AZ EGYENES EGYENLETEI

554. A koordináta-rendszer síkjában egy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Az időmérés kezdetekor a $(3;\ 4)$ pontban van. Sebességvektora: $\mathbf{v}(1;\ 1)$. Hol volt a pont az időmérés kezdete előtt 1, 2, 3 időegységgel, és hol lesz a pont az időmérés kezdete után 1; 2,5; 3; 5 időegységgel?

555. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely áthalad a

a) $(0;\ 0)$ ponton és irányvektora $(1;\ 2)$;
b) $(0;\ 0)$ ponton és irányvektora $(2;\ -1)$;
c) $(0;\ 3)$ ponton és irányvektora $(4;\ 3)$;
d) $(-2;\ 0)$ ponton és irányvektora $(-3;\ 2)$;
e) $(3;\ 1)$ ponton és irányvektora $(3;\ 2)$;
f) $\left(4\frac{5}{6};\ \frac{3}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(1;\ -0{,}5)$;
g) $\left(5\frac{2}{3};\ -3{,}5\right)$ ponton és irányvektora $(-5;\ 4)$;