## MERŐLEGES AFFINITÁS, AZ ELLIPSZIS SZÁRMAZTATÁSA ÉS EGYENLETE

**949.** Adott a merőleges affinitás tengelye és az affinitás aránya: *a)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *b)* $\lambda = -2$; *c)* $\lambda = \frac{3}{4}$; *d)* $\lambda = -\frac{5}{4}$. Szerkesszük meg néhány pontnak az affin képét.

**950.** Bizonyítsuk be, hogy a merőleges affinitásnak a következő tulajdonságai vannak.
*a)* Egyenes, félegyenes és szakasz affin képe rendre egyenes, félegyenes és szakasz.
*b)* A tengellyel párhuzamos egyenes affin képe a tengellyel párhuzamos egyenes.
*c)* A tengellyel nem párhuzamos $e$ egyenes affin képe olyan egyenes, amely az $e$ egyenest a tengelyen metszi.
*d)* Párhuzamos egyenesek affin képei párhuzamos egyenesek.
*e)* Középpontosan szimmetrikus alakzat affin képe is középpontosan szimmetrikus alakzat.

**951.** Adott a merőleges affinitás tengelye és egy megfelelő pontpárja, $A$ és $A'$. (Sem az $A$, sem az $A'$ nem illeszkedik az affinitás tengelyére.) Szerkesszük meg
*a)* adott háromszög;
*b)* adott négyzet;
*c)* adott négyszög;
*d)* adott szabályos hatszög;
*e)* adott egyenes
affin képét.

**952.** Legyen a merőleges affinitás tengelye az $x$ tengely és az affinitás aránya *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $-\frac{1}{2}$. Írjuk fel a $2x+y-8=0$ egyenes affin képének az egyenletét.

**953.** Legyen a merőleges affinitás tengelye az $x$ tengely. A $3x+4y-9=0$ egyenes affin képe a $4x-y-12=0$ egyenes. Számítsuk ki az affinitás arányát.

**954.** Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját, ha a főköre és a kisköre:
*a)* $x^2+y^2=49$, $x^2+y^2=16$;
*b)* $x^2+y^2=25$, $x^2+y^2=9$.
A merőleges affinitás tengelye az $x$ tengely.

**955.** Az $x^2+y^2=25$ kör mindegyik pontjának ordinátáját $\frac{4}{5}$ részére zsugorítjuk, illetve 2-szeresére nyújtjuk. Írjuk fel az így kapott ellipszisek főkörének és kiskörének az egyenletét.

**956.** *a)* Adott a síkban két pont: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. Milyen összefüggés áll fenn az adott sík olyan $P$ pontjainak a koordinátái között, amelyekre

$$PF_1+PF_2=12.$$



azoknak a pontoknak a koordinátái, amelyek az adott [illegible]nek, és az $F_1$ és $F_2$ pontoktól mért távolságainak összege $2a$ $(2a>2c)$, kielégítik az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenletet, ahol $b^2=a^2-c^2$.

Igazoljuk, hogy megfordítva, ha valamelyik pont koordinátái kielégítik a felírt egyenletet, akkor erre a pontra teljesül az a feltétel is, hogy az $F_1$ és $F_2$ pontoktól mért távolságainak az összege $2a$.

Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletről megállapítottuk, hogy olyan ellipszisnek az egyenlete, amelyet az $a$ sugarú főkörből $\frac{b}{a}$ arányú merőleges affinitással származtathatunk.

A megoldott feladat alapján definiáljuk az ellipszist. (Az adott $F_1$ és $F_2$ pontokat az ellipszis fókuszainak nevezzük.)

**957.** Az ellipszis a síkot két tartományra bontja. A középpontot (a fókuszokat) tartalmazó tartományt nevezzük belső tartománynak, a középpontot (a fókuszokat) nem tartalmazó tartományt nevezzük külső tartománynak. Bizonyítsuk be, hogy a belső tartomány $P$ pontjaira

$$PF_1+PF_2<2a,$$

a külső tartomány $P$ pontjaira

$$PF_1+PF_2>2a,$$

ahol $F_1$ és $F_2$ az ellipszis fókuszai és $2a$ a nagytengelye.

**958.** Írjuk fel az ellipszis középponti egyenletét, ha
*a)* a nagytengelye 20 cm, a kistengelye 12 cm;
*b)* a kistengelye 14 cm, a fókuszok távolsága 12 cm;
*c)* nagytengelye 16 cm, a fókuszok távolsága 10 cm.
Mindegyik esetben szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját.

**959.** Egy rombusz oldala 5 egység, magassága 4,8 egység. Két szemközti csúcsán olyan ellipszis halad át, amelynek a fókuszai a rombusz másik két csúcsában vannak. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha átlói a tengelyekre illeszkednek.

**960.** Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1(0;\ c)$ és $F_2(0;\ -c)$, az $x$ tengelyt pedig az $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ pontokban metszi.

**961.** Számítsuk ki az ellipszis nagy- és kistengelyét, fókuszainak a koordinátáit, ha az egyenlete:
*a)* $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; *b)* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$;
*c)* $3x^2+5y^2=15$; *d)* $2x^2+y^2=4$; *e)* $4x^2+2y^2=9$.
Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját.

**962.** Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha
*a)* a nagytengelye 26 egység, fókuszai a $(-10;\ 0)$ és $(14;\ 0)$ pontok;
*b)* a középpontja a $(-3;\ 4)$ pont, a nagytengelye 10 egység, kistengelye 8 egység, és a nagytengelye párhuzamos az $x$ tengellyel;

*d)* a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, az $x$ tengelyt a $(7; 0)$, az $y$ tengelyt a $(0; 4)$ pontban érinti.

**963.** Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott ellipszisek középpontjának és fókuszainak a koordinátáit:

*a)* $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$; *b)* $x^2+3y^2+6x+6=0$;

*c)* $x^2+2y^2-2x-4y=1$; *d)* $4x^2+5y^2+16x-20y+31=0$;

*e)* $x^2+2y^2-10x+12y+43=0$.

**964.** Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ellipszis $0$, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm 1$, $\pm 2$ abszcisszájú pontjainak az ordinátáját.

**965.** Az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis fókuszán keresztül húrt fektetünk, amely merőleges a nagytengelyre. Számítsuk ki a húr hosszát.

**966.** Határozzuk meg a $4x^2+5y^2=120$ ellipszisnek azt a pontját, amely a kistengelyétől 5 egység távolságra van.

**967.** Az ellipszis tengelyei 10 és 6 cm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a 3 cm-es abszcisszájú ponthoz vezető rádiuszvektorok? (Az ellipszis egy pontját a fókuszokkal összekötő szakaszokat a ponthoz tartozó rádiuszvektoroknak nevezzük.)

**968.** Állapítsuk meg a $(8; 2)$; $(-4; 3)$; $\left(2; -\dfrac{3}{2}\sqrt{15}\right)$ pontok helyzetét az $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$ ellipszisre vonatkozólag.

**969.** Mi az egyenlete annak az ellipszisnek, amelynek nagytengelye az $x$ tengelyre, kistengelye pedig az $y$ tengelyre illeszkedik, továbbá

*a)* nagytengelyének a hossza 12 cm, és az ellipszis áthalad a $(3; 4)$ ponton;

*b)* kistengelyének hossza 6 cm, és az ellipszis áthalad a $(-4; 1)$ ponton;

*c)* fókusztávolsága $\dfrac{4\sqrt{33}}{3}$, és az ellipszis áthalad a $(2; 1)$ ponton;

*d)* áthalad a $(4; 3)$ és $(6; 2)$ pontokon;

*e)* áthalad az $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$ és $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\sqrt{5}\right)$ pontokon;

*f)* áthalad a $(\sqrt{3}; -2)$ és $(-2\sqrt{3}; 1)$ pontokon?

**970.** Számítsuk ki a $3x^2+8y^2=120$ ellipszis $x=4$ abszcisszájú pontjához vezető rádiuszvektorok hajlásszögét és hosszúságát.

**971.** A mozgó pont helyét a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$x = 4\cos 2t \quad \text{és} \quad y = 3\sin 2t$$

koordináták adják meg, ahol $t$ az idő. Milyen vonalat ír le a pont?

**972.** Az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis tengelyei által meghatározott pozitív sík-



letű háromszöget határoz meg.

## METSZÉSI FELADATOK

**973.** Hol metszi

*a)* az $y=2x$ egyenes az $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ellipszist;

*b)* a $2x-y-9=0$ egyenes az $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{12}=1$ ellipszist;

*c)* a $7x+3y=26$ egyenes a $7x^2+21y^2=364$ ellipszist;

*d)* a $3x-4y-40=0$ egyenes a $9x^2+16y^2=144$ ellipszist?

**974.** Milyen hosszú húrt vág ki

*a)* az $y=mx$ egyenesből az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis;

*b)* az $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=1$ egyenesből az $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis?

**975.** Milyen hosszú az $5x^2+9y^2=161$ ellipszisnek az $x+y=7$ egyenesre illeszkedő húrja?

**976.** Az $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ellipszisbe olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa a nagytengely jobb oldali végpontja; ezzel szemközti oldala pedig merőleges a nagytengelyre. Számítsuk ki a háromszög másik két csúcsának a koordinátáit.

**977.** Milyen hosszú az $x^2+2y^2=34$ ellipszis 4 abszcisszájú pontján áthaladó átmérő? (Az ellipszis középpontján áthaladó húrt az ellipszis átmérőjének mondjuk.)

**978.** Keressük meg az ellipszis mindkét tengelyén azokat a pontokat, amelyekből mint középpontokból köröket rajzolva, azok áthaladnak az $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ ellipszis és a $3x-10y+60=0$ egyenes metszéspontján.

**979.** Rajzoljunk az $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^3}{36}=1$ ellipszis középpontja körül 15 egység sugárral kört. Húzzuk meg a körnek azt a sugarát, amelynek irányszöge 30°. Számítsuk ki a sugár azon részének a hosszúságát, amely a kör és az ellipszis közé esik.

**980.** Milyen hosszú a középponti helyzetű ellipszisnek az az átmérője, amely a koordinátatengelyek valamelyik szögfelezőjére illeszkedik?

**981.** Számítsuk ki a középponti helyzetű ellipszis egyik fókuszán és a kistengely végpontján áthaladó húr hosszát.

**982.** Számítsuk ki az $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ellipszis és az $y=x+l$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit. $l$ milyen értéke mellett van 2, 1, 0 megoldás?

983. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisbe írt négyzet oldala?

(Ellipszisbe írt négyzeten, általában sokszögön olyan négyzetet, sokszöget értünk, amelynek csúcsai az ellipszisre illeszkednek.)

**984.** Az $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipszisbe olyan téglalapot írunk, amelynek területe a kistengely négyzete. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

**985.** Határozzuk meg a $9x^2+16y^2=144$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető egyik rádiuszvektor hossza 5 egység.

**986.** Adjuk meg az $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyek a jobb oldali fókusztól négyszer akkora távolságra vannak, mint a bal oldali fókusztól.

**987.** Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyek a középponttól és az egyik fókusztól egyenlő távolságra vannak.

**988.** Határozzuk meg az $x^2+6y^2=2$ ellipszis olyan átmérőinek az egyenletét, amelyeknek a hossza 2 egység.

**989.** Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok szorzata a kistengely felének a négyzetével egyenlő.

**990.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszis olyan húrjának az egyenletét, amely áthalad a $P(1;1)$ ponton, és amelyet a $P$ pont felez.

**991.** Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok merőlegesek egymásra. Hány megoldás van?

**992.** Számítsuk ki az $x^2+9y^2=45$ és az $x^2+9y^2-6x=27$ ellipszisek metszéspontjait.

**993.** Két ellipszis középpontja egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával; az egyiknek a nagytengelye az $x$ tengelyre, a másiké az $y$ tengelyre illeszkedik. Az $x$ tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_1=8$, az $y$ tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_2=6$. A hozzájuk tartozó fél kistengelyek $b_1=4$ és $b_2=3$. Számítsuk ki az ellipszisek metszéspontjait.

**994.** Bizonyítsuk be, hogy az ellipszisben bármelyik két egymásra merőleges átmérő hossza reciprok értékeinek a négyzetösszege ugyanakkora.

**995.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis mindegyik negyedében azt a pontot, amelynek ordinátája félakkora, mint az illető pontnak a kistengelynek hozzá közelebb eső végpontjától mért távolsága.

**996.** Határozzuk meg azt a legnagyobb sugarú kört, amelynek a középpontja az ellipszis kistengelyének egyik végpontja, és még van közös pontja az ellipszissel.

**997.** Adott az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis. Írjunk bele olyan háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa a kistengely végpontja, a szemközti oldal pedig párhuzamos a nagytengellyel. Melyik közülük a legnagyobb területű?



**998.** Vizsgáljuk meg a $4x-5y-40=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ ellipszis viszonylagos helyzetét.

**999.** Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $Ax+By+C=0$ egyenes érintse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist. (Azt az egyenest, amelynek csak egy közös pontja van az ellipszissel, és az ellipszis síkjában van, az ellip szis érintőjének mondjuk.)

**1000.** Igazoljuk, hogy az $x^2+y^2=a^2$ kör és az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis közös abszcisszájú pontjaiban húzott érintők az $x$ tengelyen metszik egymást.

**1001.** Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $(x_1;\ y_1)$ pontjához húzható érintő egyenlete $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ellipszis $(2;-3)$ pontjában az ellipszishez húzható érintő egyenletét.

**1002.** Írjuk fel az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $x=\pm c$ abszcisszájú pontjaiban az ellipszishez húzható érintők egyenletét. Határozzuk meg az érintők által meghatározott négyszög kerületét és területét.

**1003.** Az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipszis jobb oldali fókuszában megrajzoljuk a pozitív ordinátát, és ennek végpontjában az ellipszishez érintőt szerkesztünk. Mekkora az érintő és a tengelyek által bezárt háromszög területe?

**1004.** Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $(x_1;\ y_1)$ pontjában merőlegest rajzolunk ebben a pontban az ellipszishez húzott érintőre. Mely pontokban metszi az így kapott egyenes a koordinátatengelyeket?

**1005.** Határozzuk meg az $x^2+4y^2=20$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak az $y=-x$ egyenessel.

**1006.** Írjuk fel az $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek merőlegesek a $13x+12y-115=0$ egyenesre.

**1007.** Határozzuk meg annak a négyzetnek csúcsait, amelyeknek az átlói a koordináta-rendszer tengelyein vannak, és az oldalai érintik a $4x^2+9y^2=36$ ellipszist. Mekkora az érintési pontok által meghatározott négyszög területe?

**1008.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintőknek legrövidebb a koordinátatengelyek közé eső darabja.

koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek, és áthalad az $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontokon. Határozzuk meg a (4; 4) pontból az ellipszishez húzható érintők egyenletét.

**1010.** Írjuk fel a $\left(\frac{3}{5};\ \frac{14}{5}\right)$ pontból a $4x^2+9y^2 = 36$ ellipszishez húzott érintők egyenletét.

**1011.** A (10; $-8$) pontból érintőket rajzolunk az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ ellipszishez. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.

**1012.** A (0; $a$) pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszishez ($a > b$). Számítsuk ki az érintőszakaszok hosszát.

**1013.** Számítsuk ki annak a négyszögnek a területét, amelyet a $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ ellipszisen kívül fekvő $(p;\ q)$ pont, e pontból az ellipszishez húzható érintők érintési pontjai és az origó határoznak meg.

**1014.** Írjuk fel annak a középponti helyzetű ellipszisnek az egyenletét, amely áthalad a $\left(3;\ \frac{12}{5}\right)$ ponton, és érinti a $4x+5y = 25$ egyenest.

**1015.** Írjuk fel annak az ellipszisnek egyenletét, amelynek a fókuszai a ($-3$; 0) és a (3; 0) pontok, és érinti az $x-y-5 = 0$ egyenest.

**1016.** Írjuk fel annak a középponti helyzetű ellipszisnek az egyenletét, amely érinti a $4x+5y = 25$ és a $9x+20y = 75$ egyeneseket.

**1017.** Határozzuk meg annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek a fókuszai az $x^2+y^2 = r^2$ kör ($-r$; 0) és ($r$; 0) pontjaiban vannak, és a kört 30°-os szögben metszi.

**1018.** Határozzuk meg a $16x^2+25y^2 = 400$ ellipszis és az $x^2+y^2 = 20$ kör közös érintőinek az egyenletét.

**1019.** Írjuk fel a $3x^2+8y^2 = 45$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek a középponttól 3 egység távolságra vannak.

**1020.** Határozzuk meg a $4x^2+5y^2 = 20$ és az $5x^2+4y^2 = 20$ ellipszisek közös érintőinek az egyenletét.

**1021.** Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis $P$ pontjához tartozó érintő a ponthoz vezető rádiuszvektorok egyenesével egyenlő szögeket zár be.

**1022.** Feltételezve azt, hogy egy tükröző felület keresztmetszete ellipszis, igazoljuk, hogy az ellipszis egyik fókuszából kiinduló fénysugarak egyszeri visszaverődés után a másik fókuszon haladnak át.

**1023.** Jelöljük az ellipszis nagytengelyén elhelyezkedő tengelypontokat $A$-val és $B$-vel, a hozzájuk tartozó érintőket rendre $e_1$-gyel és $e_2$-vel. Ezután jelöljünk ki az ellipszisen egy tetszőleges, de $A$-tól és $B$-től különböző $P$ pontot, és rajzoljuk meg a $P$ ponthoz tartozó $e$ érintőt is. Az $e$ és $e_1$ metszéspontját jelöljük $A_1$-gyel, az $e$ és $e_2$ metszéspontját jelöljük $B_1$-gyel. Bizonyítsuk be, hogy

*a)* az $A_1B_1$ szakasz a fókuszokból derékszög alatt látszik;
*b)* az $AA_1 \cdot BB_1$ szorzat állandó.



tükrözzük, akkor a tükörképek a másik fókusz körül a nagytengely mint sugárral írt körre illeszkednek. (Az ellipszis egyik fókusza körül a nagytengellyel mint sugárral írt kört az ellipszis vezérkörének nevezzük.)

**1025.** Bizonyítsuk be, hogy ha az ellipszis egyik fókuszából az ellipszis érintőire merőlegeseket állítunk, akkor a merőlegesek talppontjai az ellipszis főkörére illeszkednek.

**1026.** Bizonyítsuk be, hogy a fókuszoknak az ellipszis érintőjétől mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.

**1027.** Jelöljük az ellipszis középpontját $O$-val, a nagytengelyen elhelyezkedő ellipszispontokat $A$-val és $B$-vel. Az ellipszis $A$-tól különböző $P$ pontjához tartozó érintője az $A$ pontjához tartozó érintőjét a $Q$ pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BP \| OQ$.

## SZERKESZTÉSI FELADATOK

**1028.** Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis egyik pontját és ehhez a ponthoz tartozó érintőjét.

**1029.** Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját. Az ellipszis síkjában felvett külső pontból szerkesszünk az ellipszishez érintőt.

**1030.** Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza és az ellipszis síkjában egy $e$ egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és az egyenes metszéspontjait.

**1031.** Az ellipszist ismertnek tekintjük, ha ismerjük nagytengelyének a hosszát és a fókuszainak a távolságát. Ezt szem előtt tartva, szerkesszünk ellipszist, ha adott

*a)* a nagytengelyének és a kistengelyének a hossza;
*b)* a kistengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
*c)* a két fókusza és egy pontja;
*d)* az egyik fókusza, két pontja és a nagytengelyének a hossza;
*e)* a két fókusza és az egyik érintője;
*f)* az egyik fókusza, az egyik érintője és a középpontja;
*g)* az egyik fókusza, két érintője és a nagytengelyének az iránya;
*h)* az egyik fókusza, két érintője és a nagytengelyének a hossza;
*i)* az egyik fókusza, az egyik érintője és a nagytengelyének egyik végpontja;
*j)* a nagytengelyének helyzete és hossza, valamint az egyik érintője;
*k)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a fókuszainak a távolsága;
*l)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a nagytengelyének az iránya;
*m)* az egyik fókusza, két érintője és az egyiken az érintési pont;
*n)* az egyik fókusza, az egyik érintője, a nagytengelyének a hossza és a fókuszainak távolsága;
*o)* az egyik fókusza, az egyik érintője, egyik pontja és a nagytengelyének a hossza;

tengelyének a hossza;

*r)* az egyik fókusza, az egyik pontja, az egyik érintője az érintési ponttal;

*s)* az egyik fókusza, az egyik pontja és a kistengelyének az egyik végpontja;

*t)* a nagytengelyének két végpontja és egy pontja;

*u)* két érintője, a középpontja és a nagytengelyének a hossza;

*v)* az egyik fókusza és három érintője.

**1032.** Szerkesszünk adott ellipszis köré olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa a kistengely egyenesére illeszkedik.

# A HIPERBOLA

## A HIPERBOLA EGYENLETE

**1033.** Hol helyezkednek el azok a $P$ pontok a síkban, amelyekre

$$|PF_1-PF_2|=6,$$

ahol $F_1(-3;\ -3)$ és $F_2(3;\ 3)$. Szerkesszünk néhány, a feltételnek megfelelő pontot.

**1034.** Határozzuk meg, hogy *a)* az $xy=18$; *b)* a $2xy-9=0$ hiperbola mely pontjai vannak legközelebb az origóhoz? Írjuk fel a hiperbola valós és képzetes tengelyegyenesének az egyenletét.

**1035.** Írjuk fel *a)* az $xy=2$; *b)* az $xy=4$ hiperbola egyenletét abban a koordináta-rendszerben, amelynek az $x$ tengelye a hiperbola valós tengelyegyenese.

**1036.** Adott egy sík és a síkban két pont: $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak az adott síkra illeszkedő $P$ pontoknak a koordinátái, amelyekre

$$(*)\ |PF_1-PF_2|=8,$$

kielégítik az

$$(**)\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy megfordítva, azok a pontok, amelyeknek koordinátái kielégítik a (**) egyenletet, eleget tesznek a (*) feltételnek is.

**1037.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(A $2a$ hosszúságú szakaszt, amely a valós tengelyegyenesen elhelyezkedő két hiperbolapontot köti össze, valós tengelyszakasznak vagy valós tengelynek nevezzük. Jelöljük a fókuszokat összekötő szakasz hosszát $2c$-vel. Ekkor $b^2=c^2-a^2$. A $2b$ hosszúságú szakaszt, amely a fókuszok távolságát merőlegesen felező egyenesnek a képzetes tengelyegyenesnek a



képzetes tengelynek nevezzük.)

**1038.** Írjuk fel a hiperbola középponti egyenletét, ha

*a)* a valós tengelye 8 cm, a képzetes tengelye 6 cm;

*b)* a valós tengelye 12 cm, a fókuszok távolsága 14 cm;

*c)* a képzetes tengelye 8 cm, a fókuszok távolsága 12 cm.

Szerkesszük meg a hiperbola néhány pontját. (A valós tengely legyen az $x$ tengely, a képzetes tengelyegyenes az $y$ tengely.)

**1039.** Számítsuk ki a hiperbola valós és képzetes tengelyének a hosszúságát és a fókuszok távolságát, ha az egyenlete:

*a)* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;

*b)* $\frac{x^2}{9}-4y^2=1$;

*c)* $36x^2-64y^2=2304$;

*d)* $4x^2-8y^2=32$;

*e)* $x^2-4y^2=144$.

Szerkesszük meg a hiperbola néhány pontját.

**1040.** A hiperbola a síkot két tartományra osztja. A fókuszokat tartalmazó tartományt belső, a fókuszokat nem tartalmazó tartományt külső tartománynak nevezzük. Igazoljuk, hogy ha a hiperbola fókuszai $F_1$ és $F_2$ és a valós tengelye $2a$, akkor a belső tartomány $P$ pontjaira

$$|PF_1-PF_2|>2a,$$

és a külső tartomány $P$ pontjaira

$$|PF_1-PF_2|<2a.$$

Határozzuk meg, hogy a $(2;\ 4)$; $(5;\ 8)$; $(-6;\ 1)$ pontok a $36x^2-9y^2=324$ hiperbolához viszonyítva hol helyezkednek el.

**1041.** Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amelynek a valós tengelyegyenese az $x$ tengely, a képzetes tengelyegyenese az $y$ tengely, továbbá

*a)* a valós tengelye 6 egység és a hiperbola áthalad az $(5;\ 8)$ ponton;

*b)* a fókuszainak a távolsága 10 egység és a hiperbola áthalad az $\left(5;\ -\frac{9}{4}\right)$ ponton;

*c)* a képzetes tengelye 8 egység, és a hiperbola áthalad a $(-6;\ 4)$ ponton;

*d)* a hiperbola áthalad a $(6;\ -1)$ és a $(-8;\ 2\sqrt{2})$ pontokon.

**1042.** Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét

*a)* amelynek a középpontja a $(-4;\ -3)$ pont, a valós tengelye 12, a képzetes tengelye 8 egység, és a valós tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel;

*b)* amelynek a valós tengelye 24 egység, a fókuszai $F_1(-10;\ 2)$; $F_2(16;\ 2)$;

*c)* amelynek a képzetes tengelye 10 egység, a fókuszai $F_1(4;\ 4)$; $F_2(-8;\ 4)$.

**1043.** Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott hiperbolák középpontjának és a fókuszainak koordinátáit:

a) $\frac{\ldots}{4}-\frac{\ldots}{8}=1$;

b) $\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{1}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$;

c) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

d) $5x^2-4y^2-20x-24y-36=0$.

**1044.** A hiperbola fókuszai egybeesnek az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipszis fókuszaival. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha a valós tengelye 6 egység.

**1045.** Számítsuk ki az $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ hiperbola $x=10$ abszcisszájú pontjához tartozó rádiuszvektorok hosszát és hajlásszögét.

**1046.** Határozzuk meg a $(4;\ 6)$ ponton áthaladó, és az $x^2-y^2=8$ hiperbolával közös fókuszú ellipszis egyenletét.

**1047.** Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek a fókusza azonos az $x^2-y^2=8$ hiperboláéval, és áthalad a $(-5;\ 3)$ ponton.

## METSZÉSI FELADATOK

**1048.** Határozzuk meg

*a)* a $2x-y-10=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát;

*b)* a $4x-3y-16=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát.

**1049.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbola és az $y=\frac{1}{2}x-2$ egyenes közös pontjainak a számát. Mekkora az egyenesnek a két hiperbolaág közé eső szakasza?

**1050.** Szerkesszük meg az $x^2-4y^2=4$ hiperbolának a $P(3;\ -1)$ ponton áthaladó olyan húrját, amelyet a $P$ pont megfelez.

**1051.** Milyen hosszú húrt vág ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola az $x-2y-1=0$ egyenesből?

**1052.** Az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ hiperbola valós tengelyével párhuzamost húzunk tőle $d$ távolságban. Mekkora szakaszt vág ki a hiperbola az egyenesből?

**1053.** Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola és az $y=mx$ egyenes metszéspontjának koordinátáit.



**1054.** Keressük meg az $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{289}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyet a $v(1;\ 1)$ irányvektorú szakasz köt össze a kezdőponttal.

**1055.** Milyen hosszú az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának az a húrja, amely az egyik fókuszán és a képzetes tengely egyik végpontján áthaladó egyenesre illeszkedik?

**1056.** A $9x^2-16y^2=576$ hiperbola az origón áthaladó valamelyik egyenesből 20 egység hosszúságú szakaszt vág ki. Határozzuk meg az egyenes egyik irányvektorát.

**1057.** Számítsuk ki az $x^2+y^2=25$ kör és a $9x^2-4y^2=108$ hiperbola metszéspontjai által meghatározott négyszög területét.

**1058.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolának azokat a pontjait, amelyek a bal oldali fókusztól 7 egység távolságra vannak.

**1059.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának azt a pontját,

*a)* amelyhez tartozó rádiuszvektorok egymásra merőlegesek;

*b)* amely a bal oldali fókusztól kétszer akkora távolságra van, mint a jobb oldalitól.

**1060.** Egy hiperbola egyenlete $9x^2-16y^2=144$. Az $x^2+y^2=r^2$ kör úgy metszi a hiperbolát, hogy a metszéspontok által meghatározott téglalap területe egyenlő azon téglalap területének a négyszeresével, amelynek oldalai a hiperbola tengelyei. Mekkora a kör sugara?

**1061.** Egy téglalap csúcsai a $9x^2-16y^2=144$ hiperbolára illeszkednek. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak a koordinátáit, ha a területe a valós tengellyel szerkesztett négyzet területével egyenlő.

**1062.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyhez tartozó rádiuszvektorok összege 130 egység.

**1063.** Egy hangforrás helyét akarják meghatározni. Ezért három megfigyelő ($A$, $B$ és $C$) egy egyenesen úgy helyezkedik el, hogy a koordinátáik: $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ és $C(6;\ 0)$. (A távolság egységét km-ben adták meg.) A $B$ figyelőhöz a hangforrásból 3 másodperccel később érkezik meg ugyanaz a hang, mint a $C$ figyelőhöz. Az $A$ figyelő 9 másodperccel később hallja ugyanazt a hangot, mint a $B$. A hang terjedési sebessége $\frac{1}{3}$ km/s. Határozzuk meg a hangforrás helyét.

## A HIPERBOLA ASZIMPTOTÁI ÉS ÉRINTŐJE

**1064.** Írjuk fel a $4x^2-9y^2=36$ hiperbola aszimptotáinak az egyenletét.

**1065.** Mekkora szöget zárnak be az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5,76}=1$ hiperbola aszimptotái?

**1066.** Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak a hajlásszöge 120°.

1067. Írjuk fel annak a hiperbolának az [illegible] a koordinátatengelyek, és áthalad a $(-4; 2)$ ponton.

1068. Igazoljuk, hogy a derékszögű hiperbola felezi a fókuszainak az aszimptotáktól mért távolságát. (Derékszögűnek mondjuk a hiperbolát akkor, ha az aszimptotái merőlegesek egymásra. A derékszögű hiperbola valós és képzetes tengelye egyenlő.

1069. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik fókuszából az egyik aszimptotára húzott merőleges talppontjának a kezdőponttól mért távolságát.

1070. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármely pontjának az aszimptotáktól mért távolságai 0-tól különböző állandó értéket adnak szorzatul.

1071. Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P$ pontján át állítsunk merőleges egyenest az $x$ tengelyre. Bizonyítsuk be, hogy ennek az egyenesnék az aszimptoták közötti szakaszát a $P$ pont olyan két részre osztja, amelyeknek a mértani közepe $b$.

1072. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az aszimptotákra húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengellyel rajzolt körön vannak.

1073. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az aszimptotákra vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

1074. Az $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolán keressük meg azt a pontot, amely az egyik aszimptotához háromszor közelebb van, mint a másikhoz.

1075. Bizonyítsuk be, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek a hiperbolát egy pontban metszik.

1076. Igazoljuk, hogy ha egy egyenes két pontban metszi a hiperbolát, akkor ennek az egyenesnek az aszimptotáktól a hiperboláig terjedő szakaszai egyenlőek.

1077. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintőjének az érintési pontja felezi az érintőből az aszimptoták által kivágott szakaszt.

1078. Szerkesszük meg az $xy=a$, illetve az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik pontját ($a$, $b$ adott szakaszok), ezután szerkesszük meg az adott ponthoz tartozó hiperbolaérintőt.

1079. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe nem függ az érintő megválasztásától.

1080. Vizsgáljuk meg

*a)* az $x^2-4y^2=12$ hiperbola és az $x-y-3=0$ egyenes;
*b)* a $9x^2-16y^2=144$ hiperbola és az $x-2y+1=0$ egyenes;
*c)* a $16x^2-25y^2=400$ hiperbola és a $7x-5y=0$ egyenes viszonylagos helyzetét.

1081. $m$ milyen értékei mellett lesz 2, 1, illetve 0 közös pontja az $y=\frac{5}{2}x+m$ egyenesnek és az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ hiperbolának?



egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolát? (Azt az egyenest, amelynek egy közös pontja van a hiperbolával, és a hiperbola síkjában van, hiperbola érintőjének mondjuk.)

1083. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

1084. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó rádiuszvektorok hajlásszögét. Hogyan alkalmazhatjuk ezt a tételt a hiperbola adott pontjához tartozó érintő megszerkesztésére?

1085. Feltételezve azt, hogy egy tükröző felület keresztmetszete hiperbola, igazoljuk, hogy az egyik fókusz képzetes képe a hiperbola másik fókusza.

1086. Írjuk fel a $4x^2-5y^2=20$ hiperbola $(5; -4)$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

1087. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak az egyenlete $y=\pm\frac{1}{2}x$ és egyik érintőjének az egyenlete $5x-6y-8=0$.

1088. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amely az $x-y-2=0$ egyenest a $P(4; 2)$ pontjában érinti, és tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek?

1089. Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha két érintője: $5x-6y-16=0$; $13x-10y-48=0$.

1090. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha fókuszai: $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, és az egyik érintője $y=mx+n$.

1091. Húzzunk olyan érintőt az $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ hiperbolához, amely párhuzamos az $x+y-7=0$ egyenessel. Mi az érintő egyenlete?

1092. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ hiperbola olyan érintőjének az egyenletét, amely merőleges az $y=-0{,}3x$ egyenesre.

1093. Írjuk fel az $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolához a $(2; 0)$ pontból rajzolható érintők egyenletét.

1094. A $P(1; -10)$ pontból érintőket rajzolunk a $4x^2-y^2=32$ hiperbolához. Írjuk fel az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.

1095. A $(0; b)$ pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához. Mekkora az adott pont és az érintési pontok közé eső szakaszok hossza?

1096. Húzzunk érintőt az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolához, amely a középponttól és a jobb oldali fókusztól egyenlő távolságra van.

1097. Illesszünk a $9x^2-8y^2=72$ hiperbolához olyan érintőt, amelynek az egyik irányvektora $(1; \sqrt{3})$.

**1098.** Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $(x_1;\, y_1)$ pontjában merőlegest húzunk az ebben a pontban a hiperbolához tartozó érintőre. Mely pontokban metszi ez az egyenes a koordinátatengelyeket?

**1099.** Milyen szögben metszik egymást a $9x^2+25y^2=225$ ellipszis és a $12x^2-4y^2=225$ hiperbola?

**1100.** Igazoljuk, hogy a közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszik egymást.

**1101.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az érintőkre vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

**1102.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az érintőkre húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengellyel rajzolt körön vannak.

**1103.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármelyik érintőjének a fókuszoktól mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.

## SZERKESZTÉSI FELADATOK

**1104.** A hiperbolát ismertnek tekintjük, ha ismerjük a valós tengelyét és a fókuszainak a távolságát. Szerkesszünk hiperbolát, ha adott

*a)* a valós és a képzetes tengelyének a hossza;
*b)* a képzetes tengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
*c)* a két fókusza és egyik pontja;
*d)* az egyik fókusza, két pontja és a valós tengelyének a hossza;
*e)* a két fókusza és az egyik aszimptotája;
*f)* az egyik fókusza és három érintője;
*g)* a két fókusza és az egyik érintője;
*h)* az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik tengelypontja;
*i)* az egyik fókusza, két érintője és a valós tengelyének az iránya;
*j)* az egyik fókusza, az egyik érintője és a középpontja;
*k)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengely egyenese;
*l)* az egyik fókusza és két érintője, az egyiken az érintési ponttal;
*m)* az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének az iránya és a valós tengelyének a hossza;
*n)* az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének a hossza és az egyik pontja;
*o)* az egyik érintője és a két tengelypontja;
*p)* az egyik érintője, a középpontja, a valós tengelyének a hossza és a fókuszok távolsága;
*r)* a valós tengelyének a hossza és a két aszimptotája;
*s)* az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik aszimptotája;
*t)* az egyik tengelyponthoz tartozó érintője, az egyik aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
*u)* az egyik fókusza, a két aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
*v)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengelyének az iránya;



*x)* a két aszimptotája és egyik pontja;
*y)* a két aszimptotája és egyik érintője.

**1105.** Adott a hiperbola két fókusza, a valós tengelyének a hossza és a hiperbola síkjában az *e* egyenes. Szerkesszük meg az *e* egyenes és a hiperbola metszéspontjait.

**1106.** Adott a hiperbola két fókusza, két tengelypontja és a síkjában egy $P$ pont. Szerkesszünk a $P$ pontból a hiperbolához érintőt.

**1107.** Adott a hiperbola két fókusza és a valós tengelyének a hossza. Szerkesszük meg a hiperbola egyik $P$ pontját. Szerkesszük meg a hiperbola $P$ pontjához tartozó érintőjét.

**1108.** Adott a hiperbola két aszimptotája és egyik érintője. Szerkesszük meg a hiperbola fókuszait és az adott érintőn az érintési pontot.

**1109.** Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit (aszimptotáját), ha
*a)* adott a hiperbola középpontja, a valós tengelyegyenese és két pontja;
*b)* adott az egyik fókusza és két érintője, amelyek közül az egyik a hiperbolát a tengelypontban érinti;
*c)* adott az egyik aszimptotája és három pontja;
*d)* adott az egyik aszimptotája, az egyik fókusza és a fókuszok távolsága.

# A PARABOLA

## A PARABOLA EGYENLETE

**1110.** Rajzoljunk egy egyenest, és tőle 5 cm távolságra jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek az egyenest érintik, és áthaladnak a kitűzött ponton.

**1111.** Szerkesszük meg a parabola néhány pontját, ha a tengelyponti egyenlete:

*a)* $x^2=8y$; *b)* $y=\frac{1}{4}x^2$; *c)* $x^2=-2y$; *d)* $x^2=-\frac{1}{3}y$.

**1112.** Egy pontot a parabola belső vagy külső pontjának nevezünk aszerint hogy a fókusztól mért $r$ és a vezéregyenestől mért $t$ távolságára

$$r-t<0, \quad \text{vagy} \quad r-t>0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges pontjának koordinátáira $x^2<2py$, illetve $x^2>2py$ aszerint, hogy a pont az $x^2=2py$ parabola belső vagy külső pontja.

**1113.** Vizsgáljuk meg, hogy az $(1;\,2)$; $(-3;\,1)$; $(6;\,3)$ és a $(-7;\,4)$ pontok az $x^2=12y$ parabola belső vagy külső pontjai-e?

**1114.** A $p_1$ és $p_2$ paraboláknak közös a vezéregyenese, a fókuszok az *e* egyenesre illeszkednek. A $p_1$ paramétere 4, a $p_2$ paramétere 6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan középpontos hasonlóság, amely a $p_1$ parabolát a $p_2$ parabolába viszi át. Mi a hasonlóság aránya?

**1115.** Bizonyítsuk be, hogy ha a parabola paramétere $p$ és
*a)* a tengelypontja az origó, a fókusza az $y$ tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y=-\frac{1}{2p}x^2$;

van, akkor az egyenlete $y^2 = 2px$;

*c)* a tengelypontja az origó, a fókusza az $x$ tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = -2px$.

Mi az egyenlete annak a parabolának, amelynek a tengelypontja az origó, és

*d)* áthalad a (12; 6) ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*e)* áthalad a (4; 4) ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*f)* áthalad a $(-4; 3)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*g)* áthalad a $(-8; -6)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely?

**1116.** Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét, ha a fókusza az

*a)* (0; 4); *b)* $(0; -3)$; *c)* (0; 2); *d)* $(0; -8)$;

*e)* (4; 0); *f)* $(-5; 0)$ pont?

**1117.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a fókusza a $(-7; 0)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x-7=0$;

*b)* a fókusza a $(0; -4)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y-4=0$.

**1118.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a vezéregyenesének az egyenlete $y+1=0$, a fókusza a (4; 3) pont;

*b)* a vezéregyenesének az egyenlete $y-3=0$, a fókusza a $(2; -3)$ pont;

*c)* a vezéregyenesének az egyenlete $y-6=0$, a fókusza a $(3; -2)$ pont;

*d)* a vezéregyenesének az egyenlete $x-1=0$, a fókusza a (4; 2) pont;

*e)* a vezéregyenesének az egyenlete $x+4=0$, a fókusza a $(-1; 3)$ pont;

*f)* a tengelypontja a $(-1; 2)$, fókusza a $(-1; 4)$ pont;

*g)* a tengelypontja a (4; 2), fókusza a (8; 2) pont;

*h)* a fókusza a (0; 6) pont, a tengelye az $y$ tengely és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 8 egység;

*i)* a fókusza a (6; 2) pont, a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 4 egység.

**1119.** Mi a feltétele annak, hogy az $y = ax^2+bx+c$ parabola áthaladjon a következő ponton:

*a)* (0; 0); *b)* (2; 1); *c)* $(-4; 0)$; *d)* $(3; -2)$.

**1120.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelypontja az $y=2$ egyenesre illeszkedik, áthalad a (0; 8) ponton, paramétere 3, és a tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel.

**1121.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a $(-6; 4)$ és a (9; 1) pontokon.

**1122.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a tengelypontja az $y$ tengelyre illeszkedik, tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, és áthalad a $(-4; 1)$ és a $(-1; 1)$ pontokon;

*b)* a tengelypontja az $x$ tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az $y$ tengellyel, és áthalad a (2; 3) és a $(-1; 12)$ pontokon.



[Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad]

*a)* a $(-2; 3)$; (4; 0); (8; 8) pontokon;

*b)* a $(-3; 2)$; (0; 0); (3; 2) pontokon;

*c)* a (4; 5); $(-2; 11)$; $(-4; 21)$ pontokon;

*d)* az (1; 1); (3; 0); $(4; -4)$ pontokon,

és tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel.

**1124.** Egy parabola tengelye az $x$ tengely, tengelypontja a $(-5; 0)$ pont, és az $y$ tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabola egyenletét.

**1125.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja az $(a; 0)$ pont, és az $y$ tengelyt a $(0; b)$ és $(0; -b)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel.

**1126.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha az $y$ tengelyt a $(0; b)$, az $x$ tengelyt a $(a; 0)$; $(-a; 0)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel.

**1127.** Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a (2; 1) pont, a vele szemközti oldal 8 egység, és párhuzamos az $y$ tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, és az egyenlő oldalú háromszög csúcsain halad át. Hány megoldás van?

**1128.** Parabolikus tartószerkezetű híd fesztávolsága 60 m, középső legmagasabb pontja 15 m-re emelkedik a vízszintes út fölé. Számítsuk ki a függőleges tartóvasak hosszát, ha azok a híd egyik végétől kiindulva 5 m-enként helyezkednek el.

**1129.** Egy a vízszinteshez hegyesszögben elhajított kő az eldobástól számítva 36 m-re esett le, és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét.

**1130.** A vízszintes talajszintjén elhelyezett szökőkútból kilépő víz röppályája parabola, melynek paramétere $\frac{1}{10}$. Milyen magasra emelkedik a vízsugár, ha a szökőkút nyílásától 2 m-re jut vissza a talajra?

**1131.** Az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög $A$ csúcsa az origóban van, a $BC$ oldala párhuzamos az $y$ tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek fókusza $A$, és áthalad a $B$ és $C$ csúcsokon. A háromszög oldala $a$.

**1132.** Az $x^2+y^2 = r^2$ körben az $x$ tengelyre illeszkedő átmérő és az $y = b$ $(0 < b < r)$ egyenletű húr végpontjai parabolát határoznak meg. Írjuk fel e parabola egyenletét.

**1133.** Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét, ha a parabola egyenlete:

*a)* $y^2 = 24x$; *b)* $y^2 = -8x$; *c)* $x^2 = 6y$; *d)* $x^2+y = 0$;

*e)* $4y^2+x = 0$; *f)* $(x-5)^2 = 8(y+6)$; *g)* $(y-2)^2 = 12(x+3)$;

*h)* $(y-3)^2 = -4(x+1)$; *i)* $y^2 = 4x-8$; *j)* $y^2 = 4-6x$;

*k)* $x^2 = 6y+2$; *l)* $x^2 = 2-y$; *m)* $y = \frac{1}{4}x^2+x+2$;

*n)* $y = -\frac{1}{6}x^2+2x-7$; *o)* $y^2-10x-2y-19 = 0$; *p)* $y = Ax^2+Bx+C$.

**1134.** Határozzuk meg

*a)* az $y = \frac{1}{2}x^2-4x+3$; *b)* az $y = \frac{1}{4}x^2+x-2$ parabola tengelypont-

a) $\frac{(x+5)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{8}=1$;

b) $\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{1}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$;

c) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

d) $5x^2-4y^2-20x-24y-36=0$.

**1044.** A hiperbola fókuszai egybeesnek az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipszis fókuszaival. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha a valós tengelye 6 egység.

**1045.** Számítsuk ki az $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ hiperbola $x=10$ abszcisszájú pontjához tartozó rádiuszvektorok hosszát és hajlásszögét.

**1046.** Határozzuk meg a (4; 6) ponton áthaladó, és az $x^2-y^2=8$ hiperbolával közös fókuszú ellipszis egyenletét.

**1047.** Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek a fókusza azonos az $x^2-y^2=8$ hiperboláéval, és áthalad a $(-5;\ 3)$ ponton.

## METSZÉSI FELADATOK

**1048.** Határozzuk meg

a) a $2x-y-10=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát;

b) a $4x-3y-16=0$ egyenes és az $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbola közös pontjainak a számát.

**1049.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbola és az $y=\frac{1}{2}x-2$ egyenes közös pontjainak a számát. Mekkora az egyenesnek a két hiperbolaág közé eső szakasza?

**1050.** Szerkesszük meg az $x^2-4y^2=4$ hiperbolának a $P(3;\ -1)$ ponton áthaladó olyan húrját, amelyet a $P$ pont megfelez.

**1051.** Milyen hosszú húrt vág ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola az $x-2y-1=0$ egyenesből?

**1052.** Az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ hiperbola valós tengelyével párhuzamost húzunk tőle $d$ távolságban. Mekkora szakaszt vág ki a hiperbola az egyenesből?

**1053.** Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola és az $y=mx$ egyenes metszéspontjának koordinátáit.



**1054.** Keressük meg az $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{289}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyet a $\mathbf{v}(1;\ 1)$ irányvektorú szakasz köt össze a kezdőponttal.

**1055.** Milyen hosszú az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának az a húrja, amely az egyik fókuszán és a képzetes tengely egyik végpontján áthaladó egyenesre illeszkedik?

**1056.** A $9x^2-16y^2=576$ hiperbola az origón áthaladó valamelyik egyenesből 20 egység hosszúságú szakaszt vág ki. Határozzuk meg az egyenes egyik irányvektorát.

**1057.** Számítsuk ki az $x^2+y^2=25$ kör és a $9x^2-4y^2=108$ hiperbola metszéspontjai által meghatározott négyszög területét.

**1058.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolának azokat a pontjait, amelyek a bal oldali fókusztól 7 egység távolságra vannak.

**1059.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolának azt a pontját,

a) amelyhez tartozó rádiuszvektorok egymásra merőlegesek;

b) amely a bal oldali fókusztól kétszer akkora távolságra van, mint a jobb oldalitól.

**1060.** Egy hiperbola egyenlete $9x^2-16y^2=144$. Az $x^2+y^2=r^2$ kör úgy metszi a hiperbolát, hogy a metszéspontok által meghatározott téglalap területe egyenlő azon téglalap területének a négyszeresével, amelynek oldalai a hiperbola tengelyei. Mekkora a kör sugara?

**1061.** Egy téglalap csúcsai a $9x^2-16y^2=144$ hiperbolára illeszkednek. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak a koordinátáit, ha a területe a valós tengellyel szerkesztett négyzet területével egyenlő.

**1062.** Határozzuk meg az $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$ hiperbolának azt a pontját, amelyhez tartozó rádiuszvektorok összege 130 egység.

**1063.** Egy hangforrás helyét akarják meghatározni. Ezért három megfigyelő ($A$, $B$ és $C$) egy egyenesen úgy helyezkedik el, hogy a koordinátáik: $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$ és $C(6;\ 0)$. (A távolság egységét km-ben adták meg.) A $B$ figyelőhöz a hangforrásból 3 másodperccel később érkezik meg ugyanaz a hang, mint a $C$ figyelőhöz. Az $A$ figyelő 9 másodperccel később hallja ugyanazt a hangot, mint a $B$. A hang terjedési sebessége $\frac{1}{3}$ km/s.

Határozzuk meg a hangforrás helyét.

## A HIPERBOLA ASZIMPTOTÁI ÉS ÉRINTŐJE

**1064.** Írjuk fel a $4x^2-9y^2=36$ hiperbola aszimptotáinak az egyenletét.

**1065.** Mekkora szöget zárnak be az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5{,}76}=1$ hiperbola aszimptotái?

**1066.** Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak a hajlásszöge 120°.

a koordinátatengelyek, és áthalad a $(-4; 2)$ ponton.

**1068.** Igazoljuk, hogy a derékszögű hiperbola felezi a fókuszainak az aszimptotáktól mért távolságát. (Derékszögűnek mondjuk a hiperbolát akkor, ha az aszimptotái merőlegesek egymásra. A derékszögű hiperbola valós és képzetes tengelye egyenlő.

**1069.** Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik fókuszából az egyik aszimptotára húzott merőleges talppontjának a kezdőponttól mért távolságát.

**1070.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármely pontjának az aszimptotáktól mért távolságai 0-tól különböző állandó értéket adnak szorzatul.

**1071.** Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P$ pontján át állítsunk merőleges egyenest az $x$-tengelyre. Bizonyítsuk be, hogy ennek az egyenesnék az aszimptoták közötti szakaszát a $P$ pont olyan két részre osztja, amelyeknek a mértani közepe $b$.

**1072.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az aszimptotákra húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengelylyel rajzolt körön vannak.

**1073.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az aszimptotákra vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

**1074.** Az $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolán keressük meg azt a pontot, amely az egyik aszimptotához háromszor közelebb van, mint a másikhoz.

**1075.** Bizonyítsuk be, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek a hiperbolát egy pontban metszik.

**1076.** Igazoljuk, hogy ha egy egyenes két pontban metszi a hiperbolát, akkor ennek az egyenesnek az aszimptotáktól a hiperboláig terjedő szakaszai egyenlőek.

**1077.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintőjének az érintési pontja felezi az érintőből az aszimptoták által kivágott szakaszt.

**1078.** Szerkesszük meg az $xy=a$, illetve az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola egyik pontját ($a$, $b$ adott szakaszok), ezután szerkesszük meg az adott ponthoz tartozó hiperbolaérintőt.

**1079.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe nem függ az érintő megválasztásától.

**1080.** Vizsgáljuk meg

*a)* az $x^2-4y^2=12$ hiperbola és az $x-y-3=0$ egyenes;

*b)* a $9x^2-16y^2=144$ hiperbola és az $x-2y+1=0$ egyenes;

*c)* a $16x^2-25y^2=400$ hiperbola és a $7x-5y=0$ egyenes viszonylagos helyzetét.

**1081.** $m$ milyen értékei mellett lesz 2, 1, illetve 0 közös pontja az $y=\frac{5}{2}x+m$ egyenesnek és az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ hiperbolának?



egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolát? (Azt az egyenest, amelynek egy közös pontja van a hiperbolával, és a hiperbola síkjában van, hiperbola érintőjének mondjuk.)

**1083.** Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $P(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

**1084.** Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó rádiuszvektorok hajlásszögét. Hogyan alkalmazhatjuk ezt a tételt a hiperbola adott pontjához tartozó érintő megszerkesztésére?

**1085.** Feltételezve azt, hogy egy tükröző felület keresztmetszete hiperbola, igazoljuk, hogy az egyik fókusz képzetes képe a hiperbola másik fókusza.

**1086.** Írjuk fel a $4x^2-5y^2=20$ hiperbola $(5; -4)$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

**1087.** Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak az egyenlete $y=\pm\frac{1}{2}x$ és egyik érintőjének az egyenlete $5x-6y-8=0$.

**1088.** Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amely az $x-y-2=0$ egyenest a $P(4; 2)$ pontjában érinti, és tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek?

**1089.** Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha két érintője: $5x-6y-16=0$; $13x-10y-48=0$.

**1090.** Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha fókuszai: $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, és az egyik érintője $y=mx+n$.

**1091.** Húzzunk olyan érintőt az $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ hiperbolához, amely párhuzamos az $x+y-7=0$ egyenessel. Mi az érintő egyenlete?

**1092.** Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ hiperbola olyan érintőjének az egyenletét, amely merőleges az $y=-0{,}3x$ egyenesre.

**1093.** Írjuk fel az $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolához a $(2; 0)$ pontból rajzolható érintők egyenletét.

**1094.** A $P(1; -10)$ pontból érintőket rajzolunk a $4x^2-y^2=32$ hiperbolához. Írjuk fel az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.

**1095.** A $(0; b)$ pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához. Mekkora az adott pont és az érintési pontok közé eső szakaszok hossza?

**1096.** Húzzunk érintőt az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbolához, amely a középponttól és a jobb oldali fókusztól egyenlő távolságra van.

**1097.** Illesszünk a $9x^2-8y^2=72$ hiperbolához olyan érintőt, amelynek az egyik irányvektora $(1; \sqrt{3})$.

1098. Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola $(x_1; y_1)$ pontjában merőlegest húzunk az ebben a pontban a hiperbolához tartozó érintőre. Mely pontokban metszi ez az egyenes a koordinátatengelyeket?

1099. Milyen szögben metszik egymást a $9x^2+25y^2=225$ ellipszis és a $12x^2-4y^2=225$ hiperbola?

1100. Igazoljuk, hogy a közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszik egymást.

1101. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az érintőkre vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.

1102. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaiból az érintőkre húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós féltengellyel rajzolt körön vannak.

1103. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármelyik érintőjének a fókuszoktól mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.

## SZERKESZTÉSI FELADATOK

1104. A hiperbolát ismertnek tekintjük, ha ismerjük a valós tengelyét és a fókuszainak a távolságát. Szerkesszünk hiperbolát, ha adott

*a)* a valós és a képzetes tengelyének a hossza;
*b)* a képzetes tengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
*c)* a két fókusza és egyik pontja;
*d)* az egyik fókusza, két pontja és a valós tengelyének a hossza;
*e)* a két fókusza és az egyik aszimptotája;
*f)* az egyik fókusza és három érintője;
*g)* a két fókusza és az egyik érintője;
*h)* az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik tengelypontja;
*i)* az egyik fókusza, két érintője és a valós tengelyének az iránya;
*j)* az egyik fókusza, az egyik érintője és a középpontja;
*k)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengely egyenese;
*l)* az egyik fókusza és két érintője, az egyiken az érintési ponttal;
*m)* az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének az iránya és a valós tengelyének a hossza;
*n)* az egyik fókusza, az egyik érintője, a valós tengelyének a hossza és az egyik pontja;
*o)* az egyik érintője és a két tengelypontja;
*p)* az egyik érintője, a középpontja, a valós tengelyének a hossza és a fókuszok távolsága;
*r)* a valós tengelyének a hossza és a két aszimptotája;
*s)* az egyik fókusza, az egyik érintője és az egyik aszimptotája;
*t)* az egyik tengelyponthoz tartozó érintője, az egyik aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
*u)* az egyik fókusza, a két aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
*v)* az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengelyének az iránya;



*x)* a két aszimptotája és egyik pontja;
*y)* a két aszimptotája és egyik érintője.

1105. Adott a hiperbola két fókusza, a valós tengelyének a hossza és a hiperbola síkjában az *e* egyenes. Szerkesszük meg az *e* egyenes és a hiperbola metszéspontjait.

1106. Adott a hiperbola két fókusza, két tengelypontja és a síkjában egy *P* pont. Szerkesszünk a *P* pontból a hiperbolához érintőt.

1107. Adott a hiperbola két fókusza és a valós tengelyének a hossza. Szerkesszük meg a hiperbola egyik *P* pontját. Szerkesszük meg a hiperbola *P* pontjához tartozó érintőjét.

1108. Adott a hiperbola két aszimptotája és egyik érintője. Szerkesszük meg a hiperbola fókuszait és az adott érintőn az érintési pontot.

1109. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit (aszimptotáját), ha

*a)* adott a hiperbola középpontja, a valós tengelyegyenese és két pontja;
*b)* adott az egyik fókusza és két érintője, amelyek közül az egyik a hiperbolát a tengelypontban érinti;
*c)* adott az egyik aszimptotája és három pontja;
*d)* adott az egyik aszimptotája, az egyik fókusza és a fókuszok távolsága.

# A PARABOLA

## A PARABOLA EGYENLETE

1110. Rajzoljunk egy egyenest, és tőle 5 cm távolságra jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek az egyenest érintik, és áthaladnak a kitűzött ponton.

1111. Szerkesszük meg a parabola néhány pontját, ha a tengelyponti egyenlete:

*a)* $x^2=8y$; *b)* $y=\frac{1}{4}x^2$; *c)* $x^2=-2y$; *d)* $x^2=-\frac{1}{3}y$.

1112. Egy pontot a parabola belső vagy külső pontjának nevezünk aszerint hogy a fókusztól mért $r$ és a vezéregyenestől mért $t$ távolságára

$$r-t<0, \quad \text{vagy} \quad r-t>0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges pontjának koordinátáira $x^2<2py$, illetve $x^2>2py$ aszerint, hogy a pont az $x^2=2py$ parabola belső vagy külső pontja.

1113. Vizsgáljuk meg, hogy az (1; 2); (−3; 1); (6; 3) és a (−7; 4) pontok az $x^2=12y$ parabola belső vagy külső pontjai-e?

1114. A $p_1$ és $p_2$ paraboláknak közös a vezéregyenese, a fókuszok az *e* egyenesre illeszkednek. A $p_1$ paramétere 4, a $p_2$ paramétere 6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan középpontos hasonlóság, amely a $p_1$ parabolát a $p_2$ parabolába viszi át. Mi a hasonlóság aránya?

1115. Bizonyítsuk be, hogy ha a parabola paramétere $p$ és

*a)* a tengelypontja az origó, a fókusza az $y$ tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y=-\frac{1}{2p}x^2$;

*b)* a tengelypontja az origó, a fókusza az $x$ tengely pozitív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = 2px$;

*c)* a tengelypontja az origó, a fókusza az $x$ tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = -2px$.

Mi az egyenlete annak a parabolának, amelynek a tengelypontja az origó, és

*d)* áthalad a $(12; 6)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*e)* áthalad a $(4; 4)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*f)* áthalad a $(-4; 3)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely;

*g)* áthalad a $(-8; -6)$ ponton, tengelye az $y$, illetve az $x$ tengely?

**1116.** Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét, ha a fókusza az

*a)* $(0; 4)$; *b)* $(0; -3)$; *c)* $(0; 2)$; *d)* $(0; -8)$;
*e)* $(4; 0)$; *f)* $(-5; 0)$ pont?

**1117.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a fókusza a $(-7; 0)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x-7 = 0$;

*b)* a fókusza a $(0; -4)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y-4 = 0$.

**1118.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a vezéregyenesének az egyenlete $y+1 = 0$, a fókusza a $(4; 3)$ pont;

*b)* a vezéregyenesének az egyenlete $y-3 = 0$, a fókusza a $(2; -3)$ pont;

*c)* a vezéregyenesének az egyenlete $y-6 = 0$, a fókusza a $(3; -2)$ pont;

*d)* a vezéregyenesének az egyenlete $x-1 = 0$, a fókusza a $(4; 2)$ pont;

*e)* a vezéregyenesének az egyenlete $x+4 = 0$, a fókusza a $(-1; 3)$ pont;

*f)* a tengelypontja a $(-1; 2)$, fókusza a $(-1; 4)$ pont;

*g)* a tengelypontja a $(4; 2)$, fókusza a $(8; 2)$ pont;

*h)* a fókusza a $(0; 6)$ pont, a tengelye az $y$ tengely és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 8 egység;

*i)* a fókusza a $(6; 2)$ pont, a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 4 egység.

**1119.** Mi a feltétele annak, hogy az $y = ax^2+bx+c$ parabola áthaladjon a következő ponton:

*a)* $(0; 0)$; *b)* $(2; 1)$; *c)* $(-4; 0)$; *d)* $(3; -2)$.

**1120.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelypontja az $y = 2$ egyenesre illeszkedik, áthalad a $(0; 8)$ ponton, paramétere 3, és a tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel.

**1121.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a $(-6; 4)$ és a $(9; 1)$ pontokon.

**1122.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

*a)* a tengelypontja az $y$ tengelyre illeszkedik, tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, és áthalad a $(-4; 1)$ és a $(-1; 1)$ pontokon;

*b)* a tengelypontja az $x$ tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az $y$ tengellyel, és áthalad a $(2; 3)$ és a $(-1; 12)$ pontokon.



**1123.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad

*a)* a $(-2; 3)$; $(4; 0)$; $(8; 8)$ pontokon;
*b)* a $(-3; 2)$; $(0; 0)$; $(3; 2)$ pontokon;
*c)* a $(4; 5)$; $(-2; 11)$; $(-4; 21)$ pontokon;
*d)* az $(1; 1)$; $(3; 0)$; $(4; -4)$ pontokon,

és tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel.

**1124.** Egy parabola tengelye az $x$ tengely, tengelypontja a $(-5; 0)$ pont, és a $y$ tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabol egyenletét.

**1125.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontj az $(a; 0)$ pont, és az $y$ tengelyt a $(0; b)$ és $(0; -b)$ pontokban metszi tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel.

**1126.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha az $y$ tengelyt a $(0; b)$, az $x$ tengelyt a $(a; 0)$; $(-a; 0)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az $y$ tengellyel

**1127.** Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a $(2; 1)$ pont, a vele szemközt oldal 8 egység, és párhuzamos az $y$ tengellyel. Írjuk fel annak a parabolá nak az egyenletét, amelynek a tengelye párhuzamos az $x$ tengellyel, é az egyenlő oldalú háromszög csúcsain halad át. Hány megoldás van

**1128.** Parabolikus tartószerkezetű híd fesztávolsága 60 m, középső legmaga sabb pontja 15 m-re emelkedik a vízszintes út fölé. Számítsuk ki a függő leges tartóvasak hosszát, ha azok a híd egyik végétől kiindulva 5 m-enkén helyezkednek el.

**1129.** Egy a vízszinteshez hegyesszögben elhajított kő az eldobástól számítv 36 m-re esett le, és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét

**1130.** A vízszintes talajszintjén elhelyezett szökőkútból kilépő víz röppályáj parabola, melynek paramétere $\frac{1}{10}$. Milyen magasra emelkedik a víz sugár, ha a szökőkút nyílásától 2 m-re jut vissza a talajra?

**1131.** Az $ABC$ egyenlő oldalú háromszög $A$ csúcsa az origóban van, a $BC$ oldala párhuzamos az $y$ tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának a egyenletét, amelynek fókusza $A$, és áthalad a $B$ és $C$ csúcsokon. A három szög oldala $a$.

**1132.** Az $x^2+y^2 = r^2$ körben az $x$ tengelyre illeszkedő átmérő és az $y =$ $(0 < b < r)$ egyenletű húr végpontjai parabolát határoznak meg. Írjul fel e parabola egyenletét.

**1133.** Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét, ha a parabola egyenlete:

*a)* $y^2 = 24x$; *b)* $y^2 = -8x$; *c)* $x^2 = 6y$; *d)* $x^2+y = 0$;
*e)* $4y^2+x = 0$; *f)* $(x-5)^2 = 8(y+6)$; *g)* $(y-2)^2 = 12(x+3)$;
*h)* $(y-3)^2 = -4(x+1)$; *i)* $y^2 = 4x-8$; *j)* $y^2 = 4-6x$;
*k)* $x^2 = 6y+2$; *l)* $x^2 = 2-y$; *m)* $y = \frac{1}{4}x^2+x+2$;
*n)* $y = -\frac{1}{6}x^2+2x-7$; *o)* $y^2-10x-2y-19 = 0$; *p)* $y = Ax^2+Bx+C$

**1134.** Határozzuk meg

*a)* az $y = \frac{1}{2}x^2-4x+3$; *b)* az $y = \frac{1}{4}x^2+x-2$ parabola tengelypont tükrözzük.

**1135.** Milyen hosszú az $x^2 = 8y$ parabolának az a húrja, amely az $y_1 = 4$, $y_2 = 12$ ordinátájú pontjait köti össze.

**1136.** Számítsuk ki az $x^2 = 6y$ parabola 6 abszcisszájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

**1137.** Számítsuk ki az $x^2 = 12y$ parabola 6 ordinátájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

## A PARABOLA ÉS EGYENES

**1138.** Határozzuk meg

*a)* az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola és a $2x-3y+6 = 0$ egyenes;

*b)* az $y = -\frac{1}{9}x^2$ parabola és a $4x+3y-12 = 0$ egyenes;

*c)* az $y^2 = 4x$ parabola és az $x+y-3 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

**1139.** Számítsuk ki az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabola $7x-3y-30 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.

**1140.** Milyen hosszú az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabolának az a húrja, amelynek egyenese fókuszon halad át, és az egyik irányvektora $\mathbf{v}(3; \sqrt{3})$?

**1141.** Az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola tengelypontjából húzzuk meg azt a húrt, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; \sqrt{3})$, azután rajzoljuk meg a tengelypontból a reá merőleges húrt. Számítsuk ki, hogy a húrok nem közös végpontjain áthaladó egyenes mely pontokban metszi a koordinátatengelyeket.

**1142.** Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azokat a pontjait, amelyek a $P_1(-1; 5)$ és a $P_2(5; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak.

**1143.** Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húrjának az egyenletét, amely áthalad az (5; 2) ponton, és ez a pont a húrt felezi.

**1144.** Írjuk fel az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolába írt háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha a háromszög egyik csúcsa a parabola tengelypontja, a magasságpontja a parabola fókusza. (Parabolába írt háromszögnek az olyan háromszöget mondjuk, amelynek csúcsai a parabolára illeszkednek.)

**1145.** Az egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa az $x^2 = 2py$ parabola tengelypontja, a másik két csúcsa a parabolára illeszkedik. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.



kezdősebességgel. A kezdősebesség iránya a vízszintessel $\alpha$ szöget zár be. A golyó az $A$ pontban esik a talajra. Mekkora az $OA$ távolság, ha $O$ a súlydobó talpának a helyét jelenti.

**1147.** A $P_1(-10; y_1)$ és a $P_2(15; y_2)$ pontok az $y = \frac{1}{10}x^2$ parabolára illeszkednek. Számítsuk ki a parabola $P_3$ pontjának a koordinátáit, ha a $P_1P_2P_3$ háromszög területe $31\frac{1}{4}$ területegység.

**1148.** Vizsgáljuk meg a következő parabolák és egyenesek viszonylagos helyzetét:

*a)* $y = \frac{1}{8}x^2, \quad x-y-2 = 0;$

*b)* $x^2+3y = 0, \quad 8x+3y-15 = 0;$

*c)* $y^2+5x = 0, \quad 5x-y-15 = 0;$

*d)* $y^2 = 4x, \quad x+3y+9 = 0.$

**1149.** Igazoljuk, hogy az $y = mx+\frac{a}{m}$ $(m \neq 0)$ egyenes az $y^2 = 4ax$ parabola érintője. (Azt az egyenest, amely nem párhuzamos a parabola tengelyével, egyetlen közös pontja van a parabolával, és a parabola síkjában van, a parabola érintőjének mondjuk Az érintő tehát olyan egyenes, amelynek az érintési pont kivételével minden pontja a parabola külső pontja.)

**1150.** Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $ax+bx+c = 0$ egyenes érintse az $y^2 = 2px$ parabolát?

**1151.** Igazoljuk, hogy az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $yy_1 = p(x+x_1)$. Írjuk fel ennek alapján az $y^2 = 8x$ parabola 1, 2, 3 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét.

**1152.** Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

*a)* a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz tartozó érintőre illeszkedik;

*b)* a fókusznak az érintőre vonatkozó tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik;

*c)* az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző érintője az $y$ tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája;

*d)* az $y^2 = 2px$ parabola bármelyik érintője az $x$ tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól mért távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.

**1153.** Szerkesszük meg adott parabola adott pontjához tartozó érintőjét.

**1154.** Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus tükör fókuszából kiinduló fénysugarak visszaverődés után a parabola tengelyével párhuzamosan haladnak és megfordítva, a parabola tengelyével párhuzamosan haladó fénysugarak a visszaverődés után a fókuszon haladnak át.

**1155.** Az $y^2 = 12x$ parabola 2, 6, $-3$ ordinátájú pontjaiban a parabolához érintőket húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatároz háromszög és az érintők alkotta háromszög területeinek az arányát vektora $\mathbf{v}(1; \sqrt{3})$. Számítsuk ki a húr végpontjaiban húzható érintők hajlásszögét.

**1157.** Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintőre merőlegest állítunk az érintési pontban. Mely pontokban metszi ez az egyenes (a normális) a koordinátatengelyeket?

**1158.** Az $y^2 = 2px$ parabola érintője és a hozzá tartozó normális egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja az $x$ tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

**1159.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $y^2 = 2px$ parabolát a fókuszán áthaladó és a tengelyére merőleges húr végpontjaiban érinti.

**1160.** Határozzuk meg az $m$ értékét úgy, hogy az $y = mx-2$ egyenes érintse az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát.

**1161.** Határozzuk meg $m$ értékét úgy, hogy az $y = mx-4$ egyenes érintse az $y^2 = -8x$ parabolát.

**1162.** Mekkorára kell választani $b$ értékét ahhoz, hogy az $y = x+b$ egyenes messe, érintse, illetve elkerülje az $y = x^2$ parabolát?

**1163.** Határozzuk meg a $b$ értékét úgy, hogy az $y = x+b$ egyenes érintője legyen az $y^2 = 4x$ parabolának.

**1164.** Mi a feltétele annak, hogy az $y = mx+b$ egyenes érintse az $y^2 = 2px$ parabolát?

**1165.** Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y = -x+4$ egyenessel párhuzamos érintőjét.

**1166.** Az $y^2 = 8x$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Írjuk fel az érintő egyenletét.

**1167.** Az $x^2 = 16y$ parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét.

**1168.** Írjuk fel az $y^2 = 12x$ parabola érintőjének az egyenletét
*a)* az $x = 3$ abszcisszájú pontjaiban;
*b)* amely párhuzamos a $3x-y+5 = 0$ egyenessel;
*c)* amely merőleges a $2x+y-7 = 0$ egyenesre;
*d)* amely 45°-os szöget zár be a $4x-2y+9 = 0$ egyenessel.

**1169.** Az $y^2 = 2px$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

**1170.** Milyen messze van a $3x+4y+46 = 0$ egyenes az $y = \frac{1}{64}x^2$ parabolától?

**1171.** Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolánál a $p$ értékét úgy, hogy a parabola
*a)* az $y = \frac{x}{2}+1$ egyenest érintse;
*b)* az $x-2y+5 = 0$ egyenest érintse.

**1172.** Mekkora az $y^2 = 2px$ parabola paramétere, ha az $ax+by+c^2 = 0$ egyenest érinti?



$y = (p-1)x^2+2px+4$

egyenlettel jellemzett $g_p$ görbesereget:
*a)* Határozzuk meg a $p$ paramétert úgy, hogy $g_p$ érintse az $x$ tengelyt. (Az érintési pont legyen $A$.)
*b)* Határozzuk meg $p$-t úgy, hogy a $g_p$ parabola tengelypontja az $y$ tengelyen legyen. (A tengelypont legyen $B$.)
*c)* Mutassuk meg, hogy a fenti két görbe az $AB$ szakasz felezőpontjára szimmetrikus.
*d)* Létezik-e olyan pont, amelyen a görbesereg minden görbéje átmegy?

**1174.** Határozzuk meg a $(9; 2)$ pontból az $y = \frac{1}{36}x^2$ parabolához húzható érintők egyenletét.

**1175.** Határozzuk meg az $(5; -7)$ pontból az $y^2 = 8x$ parabolához húzható érintők egyenletét.

**1176.** Határozzuk meg az $x$ tengelynek azt a pontját, amelyből az $y^2 = 4x$ parabolához húzott érintők a tengelyponthoz tartozó érintővel egyenlő oldalú háromszöget alkotnak.

**1177.** Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt az érintőjét, amelynek az érintési pont és az $x$ tengely közé eső szakasza 20 egység.

**1178.** Számítsuk ki az alábbi parabolák metszéspontjait:
*a)* $y^2 = 2x$ és $x^2 = y$; *b)* $x^2 = 3y$ és $x^2 = y-2$; *c)* $y^2+x-2y = 0$ és $x^2 = y$; *d)* $y = x^2$ és $2x = 3y-y^2$; *e)* $y = x^2$ és $y^2+6x-7y = 0$; *f)* $y = x^2+x$ és $y^2-8y+12x = 0$; *g)* $x^2-4x-4y = 4$ és $4x^2 = 4x+4y$; *h)* $y^2 = 2px$ és $y^2 = px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

**1179.** Egy parabola tengelypontja az $y^2 = 8x$ parabola fókusza, a fókusza pedig az adott parabola tengelypontja. Számítsuk ki a parabolák metszéspontjait.

**1180.** Számítsuk ki a parabola és a kör metszéspontjait, ha egyenletük:
*a)* $y^2 = \frac{9}{4}x$ és $x^2+y^2 = 25$; *b)* $y^2 = 18x$ és $x^2+12x+y^2-64 = 0$.

**1181.** Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt a pontját, amely a fókuszától 13 egység távolságra van.

**1182.** Milyen távolságra van a tengelyponttól az $y^2 = 4{,}5x$ parabolának az a pontja, amely a fókusztól $9\frac{1}{8}$ egységnyi távolságra van?

**1183.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja a $(0; -5)$ pont, és érinti az $x^2+y^2 = 9$ kört. (A parabola tengelye az $y$ tengely.)

**1184.** Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az $(x-11)^2+y^2 = 40$ kört érinti, tengelypontja az origóban van, és a tengelye az $x$ tengely. Határozzuk meg az érintési pontok koordinátáit.

**1185.** Adott az $(x-a)^2+y^2 = r^2$ kör $(a > 0)$. Határozzuk meg a $p$ értékét úgy, hogy az adott kör az $y^2 = 2px$ parabolát érintse.

$\frac{45}{20}$ ... 3

érintőinek az egyenletét.

1187. Számítsuk ki

*a)* az $x^2+y^2 = 16$ és az $y^2 = 6x$;
*b)* az $x^2+y^2 = p^2$ és az $y^2 = 2px$

görbék hajlásszögét. Írjuk fel az *a)* esetben a görbék közös érintőinek az egyenletét.

1188. A $49x^2+100y^2 = 4900$ ellipszis középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a (0; 7) pont. Számítsuk ki az ellipszis és a parabola közös pontjainak a koordinátáit.

1189. A $64x^2-49y^2 = 3136$ hiperbola középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a (−7; 0) pont. Számítsuk ki a parabola és a hiperbola közös pontjainak a koordinátáit.

1190. Az $y^2 = 2px$ parabolából az $x = a$ egyenessel ($a > 0$) egy parabolaszeletet határolunk el. Szerkesszünk a parabolaszeletbe maximális területű téglalapot, amelynek középvonala a parabola tengelyére illeszkedik.

1191. Rajzoljuk meg az $y^2 = 2px$ parabola egyik, a tengelypontjától különböző $P$ pontjához tartozó érintőjét. Az érintőre rajzoljunk merőlegest az érintési pontban. Ez az egyenes az $x$ tengelyt $Q$ pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $PQ$ szakasznak az $x$ tengelyre eső merőleges vetülete nem függ a $P$ pont megválasztásától.

1192. Bizonyítsuk be, hogy a parabola három érintője által meghatározott háromszög köré rajzolható kör áthalad a fókuszon.

1193. Tekintsük a parabolának azokat a húrjait, amelyek a parabola tengelypontjából derékszögben láthatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a húrok egy rögzített ponton haladnak át.

1194. Két parabolának közös a tengelye és a fókusza. A tengelypontokat a fókusz elválasztja egymástól. Bizonyítsuk be, hogy a két parabola hajlásszöge 90°. (Két parabola hajlásszögét a metszéspontban a parabolákhoz húzott érintők hajlásszögével definiáljuk.)

1195. Bizonyítsuk be, hogy a parabola vezéregyenesének tetszőleges pontjából a parabolához húzott két érintő érintési pontja és a fókusz egy egyenesre illeszkednek.

1196. A parabola belsejében rögzítsünk egy $P$ pontot. A $P$ ponton áthaladó és a tengellyel nem párhuzamos $e$ egyenes a parabolát $R$ és $S$ pontokban metszi. A $P$, $R$, $S$ pontoknak a vezéregyenesre eső merőleges vetületei rendre $P_1$, $R_1$, $S_1$. Bizonyítsuk be, hogy a $P_1R_1 \cdot P_1S_1$ szorzat nem függ az $e$ egyenes megválasztásától. (A parabola belsején azt a síktartományt értjük, amelynek pontjaira $r-t < 0$. 1112. feladat.)

1197. Bizonyítsuk be, hogy a parabolának a tengelyére vonatkozó merőleges affinitással származtatott képe parabola. Határozzuk meg a transzformált parabola paraméterét, ha az affinitás aránya: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2; $\lambda$.

1198. Rajzoljuk meg a parabola egyik külső $P$ pontjából az érintőket. Az érintési pontokat jelöljük $P_1$-gyel és $P_2$-vel. Bizonyítsuk be, hogy

*a)* a $P$ pontnak a parabola tengelyétől mért előjeles távolsága a $P_1$ és $P_2$ pontok tengelytől mért előjeles távolságainak a számtani közepe;



*b)* a $P$ pontnak a fókusztól mért távolságának a négyzete egyenlő a $P_1$ és $P_2$ pontoknak ugyanezen érintőtől mért távolságának a szorzatával;

*c)* a $P$ pontnak a fókusztól mért távolsága a $P_1$ és $P_2$ pontok fókusztól mért távolságainak mértani középarányosa.

1199. A parabola társérintőinek mondjuk azokat az érintőket, amelyeknek a hajlásszöge 90°. A parabola két tetszőleges, de a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző $e_1$ és $e_2$ érintője az $M$ pontban, a hozzájuk tartozó társérintők, $e_1'$, és $e_2'$ az $M'$ pontban metszik egymást. Az $e_1$ és az $e_2'$ metszéspontja $Q_1$, az $e_2$ és $e_1'$ metszéspontja $Q_2$. Bizonyítsuk be, hogy az $MM'$ és a $Q_1Q_2$ egyenesek a fókuszon haladnak át, és a hajlásszögük 90°.

## SZERKESZTÉSEK

1200. A parabolát ismertnek tekintjük, ha tudjuk a fókuszának és a vezéregyenesének a helyét. Ezt szem előtt tartva szerkesszünk parabolát, ha adott

*a)* a fókusza és a tengelypontja;
*b)* a tengelye, a tengelypontja és a paraméterének a hossza;
*c)* a fókusza, egyik érintője az érintési ponttal;
*d)* a fókusza és két érintője;
*e)* a fókusza, a tengelye és egyik érintője;
*f)* a fókusza, az egyik érintője és egyik pontja;
*g)* a fókusza és két pontja;
*h)* a fókusza, a tengelye és egyik pontja;
*i)* a tengelye, a tengelypontja és egyik érintője;
*j)* a tengelye, a tengelypontja és egyik pontja;
*k)* a vezéregyenese és az egyik érintője az érintési ponttal;
*l)* a vezéregyenese, a tengelye és egyik érintője;
*m)* a vezéregyenese, az egyik érintője és egyik pontja;
*n)* a vezéregyenese és két pontja;
*o)* a vezéregyenese, a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője;
*p)* a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője az érintési ponttal;
*r)* a vezéregyenese, a tengelye és egyik pontja;
*s)* a tengelye és egyik érintője az érintési ponttal;
*t)* a tengelyponthoz tartozó érintője és két másik érintője;
*u)* két érintője az érintési pontokkal;
*v)* a tengelyének iránya, két pontja és az egyikre illeszkedő érintője;
*z)* három érintője és a vezéregyenese.

1201. Adott egy parabola fókusza, a vezéregyenese és egy egyenes. Szerkesszük meg a parabola és az adott egyenes metszéspontját.

1202. Szerkesszünk külső pontból a parabolához érintőt.

1203. Adott a parabola fókusza, egyik pontja és e ponthoz tartozó érintőnek a tengelyponthoz tartozó érintő és a vezéregyenes közötti szakasza. Szerkesszük meg a vezéregyenest.

**1204.** A $P(-2; 3)$ pontból kiinduló fénysugár az $x$ tengelyről visszaverődik. Írjuk fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenesének az egyenletét, ha a beeső fénysugár egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; 3)$.

**1205.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(5; -12)$, és áthalad a $(-4; 16)$ ponton. Számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög köré, a háromszögbe írható kör középpontjának és a súlypontnak a koordinátáit.

**1206.** Induljon el a $(18; 7)$ pontból és haladjon az $\mathbf{a}(-4; -3)$ vektorral párhuzamos irányban az $M$ pont 2,5 egységnyi sebességgel. Mennyi időegység alatt éri el az $M$ pont az $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ hiperbolát?

**1207.** Számítsuk ki a $P(8; 5)$ pontnak a $2x-3y-8=0$ egyenestől mért távolságát. Tükrözzük $P$-t az adott egyenesre. Határozzuk meg a tükörkép koordinátáit.

**1208.** Adott két egyenes: $4x+7y-15=0$, $9x-14y-4=0$.

*a)* Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik normálvektora $\mathbf{n}(-1; 3)$, és áthalad a két adott egyenes metszéspontján.

*b)* Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a két adott egyenes metszéspontján, és a koordinátatengelyek pozitív felével 4 egység területű háromszöget határoz meg.

*c)* Számítsuk ki a két adott egyenes hajlásszögét.

**1209.** Adott két pont: $A(1; 2)$, $B(5; -1)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$-nak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

**1210.** Adott két pont: $A(3; 5)$, $B(6; -2)$. Vetítsük az $\overrightarrow{AB}$-t merőlegesen az $y=x$ egyenesre. Határozzuk meg a vetületének a hosszát.

**1211.** Határozzuk meg a $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$-t, ha $\mathbf{v}_1(1; 2)$, $\mathbf{v}_2(-2; 3)$, $\mathbf{v}_3(6; -10)$.

**1212.** Az $A$ és $B$ pontokat összekötő szakaszt az $M_1(1; 2)$ és az $M_2(3; 4)$ pontok három egyenlő részre osztják. Számítsuk ki az $A$ és a $B$ koordinátáit.

**1213.** A $(2; 3)$ és a $(6; 6)$ pontok egy négyzet szomszédos csúcsai. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

**1214.** A $(3; 5)$ és a $(9; -7)$ pontokban elhelyezett 2 és 1 tömegegységnyi anyagi pontokból álló rendszernek hol van a súlypontja?

**1215.** Az $m_1$, $m_2$, $m_3$ tömegű anyagi pontokat rendre az $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ pontokban helyeztük el. Bizonyítsuk be, hogy a három pontból álló anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

**1216.** A sokszög csúcsaiban egyenlő tömegek vannak. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlő:

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \quad y=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$$

$(n=3, 4, 5, 6, \ldots)$



hogy a csúcsok abszcisszáinak (ordinátáinak) összege zérus.

**1218.** Egy sokszög mindegyik oldalára egy, az illető oldal hosszával arányos hosszúságú és kifelé mutató merőleges vektort állítunk. A vektorok rendre a következők: $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, ... $\mathbf{p}_n$ ($n$ a sokszög oldalainak a számát jelenti). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\ldots+\mathbf{p}_n=0$.

**1219.** Egy ötszög oldalfelező pontjai (pozitív körüljárást választva) a következők: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$, $P_4(x_4; y_4)$, $P_5(x_5; y_5)$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

**1220.** Egy háromszög területe 10 egység, két csúcsa $(5; 1)$; $(-2; 2)$, a harmadik csúcsa az $x$ tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

**1221.** A koordináta-rendszer eltolása után a $(2; 4)$ pont koordinátái $(-3; 0)$. Számítsuk ki az eredeti koordináta-rendszer origójának a koordinátáit az új koordináta-rendszerben.

**1222.** Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha csúcsai $(0; 1)$, $(1; 1)$ és $(5; 5)$.

**1223.** Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $x+2y+1=0$ és $2x+y-3=0$. Középpontja a $(0; 4)$ pont. Írjuk fel a másik két oldalegyenesének egyenletét.

**1224.** A $(2; -2)$ ponton áthaladó egyenes az $(5; 2)$ ponttól 3 egységnyi távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

**1225.** Írjuk fel az $x+2y=1$ és az $x+2y=3$ egyenesekkel párhuzamos egyenes egyenletét, amely az adott egyenesek távolságát 1:3 arányban osztja.

**1226.** Egy háromszög két csúcsa: $(2; 1)$; $(4; 9)$, a magasságpontja $(0; 4)$. Írjuk fel az oldalegyenesek egyenletét.

**1227.** Egy háromszög két oldalegyenese: $x+y-1=0$; $y+1=0$, a súlypontja a $(-1; 0)$ pont. Írjuk fel a harmadik oldalegyenesének egyenletét.

**1228.** Az $e$ egyenes áthalad az $x+2y-11=0$ és a $2x-y-2=0$ egyenesek metszéspontján; az origótól 5 egységre van. Írjuk fel $e$ egyenletét.

**1229.** Húzzunk az origón át olyan egyenest, amelyből az $x-y+1=0$ és az $x-y-2=0$ egyenesek 3 egységnyi szakaszt vágnak ki.

**1230.** Az $e$ egyenes áthalad a $(2; 3)$ ponton. $e$-ből a $3x+4y-7=0$ és a $3x+4y+8=0$ egyenesek $3\sqrt{2}$ egységnyi szakaszt vágnak ki. Írjuk fel $e$ egyenletét.

**1231.** Írjuk fel a $3x+4y-3=0$ és a $4x-3y+5=0$ egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek az egyenletét.

**1232.** A $3x-4y=25$, $5x+12y=65$ és a $8x+15y+85=0$ egyenesek egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

**1233.** A $2x+y-1=0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az $(1; 2)$ és a $(-1; -1)$ pont. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

**1234.** A $2x-y-1=0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az $(1; 1)$ és az $(5; 4)$ pont. A háromszög területe [illegible] egység. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

**1235.** Valamely egyenlő szárú háromszög alapegyenesének egyenlete: $x+y-1=0$; az egyik szár egyenesének egyenlete: $x-2y-2=0$; a másik szárra illeszkedő egyik pont $(-2; 0)$. Írjuk fel az utóbbi szár egyenesének egyenletét.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög $A$ csúcsán áthaladó magasság egyenes egyenlete: $(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{x})=0$, ahol $\mathbf{x}$ az egyenesre illeszkedő tetszőleges pont helyvektorát jelenti.

b) Bizonyítsuk be, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást.

1237. Az $ABC$ háromszög csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.

a) Igazoljuk, hogy az $AB$ oldal felező merőlegesének egyenlete:
$\left(\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\mathbf{x}\right)=0$, ahol $\mathbf{x}$ a felező merőleges tetszőleges pontjának helyvektora.

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

c) Bizonyítsuk be, hogy az oldalfelező merőlegesek közös metszéspontja, $O$ a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van. (A bizonyítás egyszerűsítése céljából válasszuk az $O$ pontot kezdőpontnak. Ekkor az $O$ pont helyvektora a $\mathbf{0}$ vektor, a háromszög csúcsainak helyvektorai: $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$. Vegyük figyelembe azt, hogy az $O$ helyvektora kielégíti az oldalfelező merőlegesek egyenletét.)

d) A c)-hez fűzött megjegyzés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írható kör középpontja, a súlypont és a magasságpont egy egyenesre illeszkednek úgy, hogy a súlypont 1:2 arányban osztja az $OM$ szakaszt ($O$ a háromszög köré írható kör középpontja, $M$ a magasságpont). Igazoljuk, hogy az $OM$ szakasz $F$ felezéspontja középpontja egy olyan körnek, amelynek a sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele, áthalad az oldalak felezéspontjain, a magasságok talppontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezéspontjain (848. feladat).

1238. Tekintsük azt az $\alpha$ hegyesszöget, amelynek a csúcsa az origó, egyik szára az $x$ tengely pozitív fele, a másik szára az $y=mx$ egyenesnek az a része, amelynek pontjaira $x\geq 0$. Az $\alpha$ szöget felező félegyenesen jelöljünk ki egy, a csúcstól különböző $P$ pontot. Rajzoljunk a $P$ ponton áthaladó két, a szög szárait metsző egyenest. Az egyik egyenes a szög száraiból (a csúcstól számítva) $a$ és $b$, a másik a szögszárakból $a_1$ és $b_1$ szakaszokat vág le. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}$.

1239. Írjuk fel az $x^2+y^2-2ax=0$ és az $x^2+y^2-2by=0$ körök hatványvonalának az egyenletét. Számítsuk ki a hatványvonalra illeszkedő húr hosszát.

1240. Határozzuk meg az $x$ tengelynek azt a pontját, amelyből az $x^2+y^2-6y+6=0$ és az $x^2+y^2-2x=0$ körökhöz egyenlő hosszú érintőszakasz húzható.

1241. Írjuk fel általánosan azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek az $x+y=0$ és az $x-y=0$ egyeneseket érintik.

1242. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2-2ax+b^2=0$ és az $x^2+y^2-2cy-b^2=0$ körök merőlegesen metszik egymást.

1243. Az ellipszis $P_1$ és $P_2$ pontjait a középponttal összekötő szakaszok $d_1$ és $d_2$. Bizonyítsuk be, hogy



$$d_1^2 \quad d_2^2 \quad a^2 \quad b^2,$$

ha $d_1$ és $d_2$ merőlegesek egymásra ($a$ és $b$ az ellipszis féltengelyei).

1244. Az ellipszis középpontjából az ellipszis $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ pontjaihoz vezető szakaszok legyenek $d_1, d_2, \ldots d_n$. Bizonyítsuk be, hogy ha $d_i d_{i+1} \sphericalangle = \frac{\pi}{n}$ $(i=1, 2, \ldots n-1)$, akkor az

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\ldots+\frac{1}{d_n^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$a$ és $b$ az ellipszis féltengelyei, és $n$ páros szám.

1245. Az ellipszisnek a középponton áthaladó húrjait az ellipszis átmérőinek, a kör merőleges átmérőinek affin képét a körből származtatott ellipszis konjugált átmérőinek mondjuk. Bizonyítsuk be, hogy

a) az ellipszis konjugált átmérőinek végpontjaiban rajzolt érintők olyan paralelogrammát határoznak meg, amelynek az oldalait az érintési pontok felezik;

b) $a_1 b_1 \sin\omega = ab$,
ahol $a_1$ és $b_1$ az ellipszis konjugált félátmérői, $a$ és $b$ az ellipszis féltengelyei, $\omega$ a konjugált félátmérők hajlásszöge;

c) az ellipszis konjugált átmérőinek négyzetösszege nem függ a konjugált átmérőpár megválasztásától;

d) ha a konjugált átmérőpár irányvektorai $(1;\, m_1)$ és $(1;\, m_2)$, akkor az
$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot (a \text{ és } b \text{ az ellipszis féltengelyei});$$

e) az ellipszis konjugált félátmérői által kifeszített háromszög területe nem függ a konjugált félátmérők megválasztásától.

1246. Bizonyítsuk be, hogy az $a$ és $b$ féltengelyű ellipszis területe $ab\pi$.

1247. Számítsuk ki az $x^2+3y^2=6$ ellipszis egyenlő hosszú konjugált átmérőinek a hajlásszögét.

1248. Számítsuk ki az $x^2+15y^2=5$ ellipszis konjugált átmérőinek a hosszúságát, ha a hajlásszögük 150°.

1249. A $8x^2+17y^2=136$ ellipszis konjugált átmérőinek az aránya 4:3. Írjuk fel az átmérők egyenletét.

1250. Számítsuk ki az ellipszis féltengelyeit, ha egyik konjugált átmérőpárja hosszúságainak összege 6 egység, az általuk bezárt szög 150°, és a fókuszok távolsága $\frac{18}{11}$ egység.

1251. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszishez húzott érintő egyenlete:
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$
ahol $m$ az egyenes iránytangense, $a$ és $b$ az ellipszis féltengelyei.

1252. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához húzott $\mathbf{v}(1;\, m)$ irányvektorú érintő egyenlete
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

kel való metszéspontjain áthaladó egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist.

1254. Bizonyítsuk be, hogy az $x+y=c$ és az $x+y=-c$ egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist, ha $c^2=a^2+b^2$.

1255. Számítsuk ki az $y^2=2px$ parabola fókuszának az érintőtől való távolságát, ha az érintő irányszöge $\alpha$.

1256. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{4}x^2$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad a $(0;\ -4)$ ponton.

1257. Határozzuk meg az $y^2=2x$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad $(-4;\ -1)$ ponton.

1258. Határozzuk meg az $x^2+9y^2=9$ ellipszishez a $(2;\ -1)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1259. Határozzuk meg a $4x^2-9y^2=36$ hiperbolához a $(3;\ -6)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1260. A merőleges affinitás tengelye legyen az $x$ tengely, és az affinitás aránya $\frac{4}{3}$. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amely az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbola affin transzformálásakor adódik.

1261. $\lambda$ mely értéke mellett létezik olyan $x$, $y$ számpár, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$x^2+y^2-8x-6y=0$$
$$9x^2+y^2-6y=0$$
$$y^2-\lambda x-6y+9-\lambda=0.$$

Milyen geometriai értelmezést adhatunk a feladatnak?

1262. Írjuk fel annak a hiperbolának a középponti egyenletét, amely áthalad a $(\sqrt{6};\ 3)$ ponton, és érinti a $9x+2y-15=0$ egyenest.

1263. Rajzoljunk a hiperbola $F_1$ fókuszából egy $2a$ sugarú kört ($2a$ a hiperbola valós tengelye), ezután húzzunk egy $e$ érintőt ehhez a körhöz az $F_2$ fókuszból. Bizonyítsuk be, hogy $e$ érinti azt a kört is, amelynek a középpontja a hiperbola $O$ középpontjába esik, és a sugara $a$. Az $e$ egyenes a $2a$ sugarú kört $P$, az $a$ sugarú kört $Q$ pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az $OQ$ egyenes az $F_2P$ szakasz felező merőlegese.

1264. Adott a hiperbola két fókusza, $F_1$ és $F_2$ és egyik $P$ pontja. $PF_1>PF_2$. Mérjük rá $PF_1$ szakaszra $P$-ből a $PF_2$ szakaszt. Így egy $F'$ pontot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az $F'F_2$ szakasz felező merőlegese érinti a hiperbolát a $P$ pontban.

1265. Adott az ellipszis két pontja és két tengelyének az egyenese. Szerkesszük meg az adott pontokhoz tartozó ellipszisérintőket.

1266. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $0\leq x\leq a$ és $0\leq y\leq b$ egyenlőtlenségekkel kijelölt ívén szerkesszük meg azt a pontot, amely az $(a;\ 0)$, $(0;\ 0)$ és $(0;\ b)$ pontokkal együtt a legnagyobb területű négyszöget határozza meg.



teknek:

$$14x+3y-3a-b-c=15$$
$$8x-10y+a-b+2c=-3$$
$$11x-y-2a-b-c=3.$$

Jelöljük ki a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái eleget tesznek a feltételeknek. Milyen értékekre lesz szélső értéke a $3y-4x$ kifejezésnek?

1268. Bizonyítsuk be, hogy ha egy külső $P$ pontból a parabolához két érintőt rajzolunk, akkor az egyik érintő ugyanakkora szöget zár be a $PF$ egyenessel, mint a másik érintő a parabola tengelyegyenesével ($F$ a parabola fókusza).

1269. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög köré írható kör középpontja és magasságpontja olyan ellipszisnek a fókuszai, amelyet a háromszög oldalai érintenek.

1270. Adott 3 pont: $A$, $B$ és $C$. Bizonyítsuk be, hogy az ezeken áthaladó bármelyik derékszögű hiperbola középpontja rajta van az $ABC$ háromszög Feuerbach-féle körén.

1271. Szerkesszük meg annak a két parabolának a metszéspontjait, amelyeknek adottak a fókuszai és a közös vezéregyenesük.

1272. Adott ellipszis két érintőjének a metszéspontját jelöljük $P$-vel, a fókuszokat $F_1$-gyel és $F_2$-vel. Bizonyítsuk be, hogy a $PF_1$ egyenes ugyanakkora szöget zár be az egyik érintővel, mint a $PF_2$ egyenes a másik érintővel.

1273. A parabola $A$ és $B$ pontján áthaladó szelőjén felvett $P$ pontból érintőket húzunk a parabolához. Az érintési pontok $C$ és $D$. Húzzunk a $C$ ponton át az $AB$ szelővel párhuzamos húrt, amelynek a másik végpontja $E$. Bizonyítsuk be, hogy az $AB$ húrnak a felezéspontja rajta van a $DE$ húron.

1274. Bizonyítsuk be, hogy ha két egymást metsző parabolának közös a vezéregyenese, akkor a metszéspontjaikon áthaladó egyenes a fókuszokat összekötő szakasz felező merőlegese.

1275. Rajzoljuk meg a parabola tetszőleges, de a tengelyponttól különböző pontjához húzható érintőjét. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnek az érintési pont és a vezéregyenes közötti szakasza a fókuszból derékszögben látszik.

1276. Adott egy $O$ középpontú, $r$ sugarú kör. Az $O$-tól különböző $P$ ponthoz rendeljük hozzá az $OP$ félegyenesen azt a $P'$ pontot, amelyre

$$OP\cdot OP'=r^2.$$

Az így definiált ponttranszformációt inverziónak (körre vonatkozó tükrözésnek) mondjuk. Az $O$ pontot az inverzió pólusának, az $r^2$ értékét az inverzió hatványának nevezzük.

*a)* Fejezzük ki a $P(u;\ v)$ adott pont $x^2+y^2=1$ körre vonatkozó tükörképének a $P'$ pontnak $(u';\ v')$ koordinátáit az $u$ és a $v$ segítségével. Szerkesszük meg a $P'$ pontot.

*b)* Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán áthaladó egyenes inverze önmaga, a póluson áthaladó kör inverze egyenes. Szerkesszük meg az egyenest.

verze a póluson áthaladó kör. Szerkesszük meg a kört.

*d)* Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán át nem haladó kör inverze egy a póluson át nem haladó kör. Szerkesszük meg ezt a kört.

*e)* Az $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist, illetve hiperbolát tükrözzük az $x^2+y^2 = a^2$ körre. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió az ellipszist a $b^2(x^2+y^2)^2 - a^2(b^2x^2+a^2y^2) = 0$, a hiperbolát a $b^2(x^2+y^2)^2 - a^2(b^2x^2-a^2y^2) = 0$ egyenlettel megadott görbébe viszi át.

## MÉRTANI HELYEK*

1277. Egy pont úgy mozog a síkon, hogy a síkban fekvő $P_1(3; 2)$ és a $P_2(-1; 5)$ pontoktól egyenlő távolságra van. Határozzuk meg a mozgó pont pályájának az egyenletét.

1278. Egyenlő szárú háromszög alapjának a végpontjai $(7; 3)$ és $(-7; 1)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye a koordináta-rendszer síkjában?

1279. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek áthaladnak az $(1; 5)$ és a $(-3; -1)$ pontokon?

1280. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek egyenlő távolságra vannak az $y = \frac{1}{2}x+3$ és az $y = 2x-5$ egyenesektől?

1281. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az $x$ tengelyt és a $12x-5y = 0$ egyenest?

1282. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik a $4x+y+3 = 0$ és a $4x+y-7 = 0$ egyeneseket?

1283. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek a sugara 3 egység, és érintik a $2x-5y=2$ egyenest?

1284. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek $(4; 0)$ ponttól mért távolságának a négyzete 20-szal kisebb, mint a $(0; 2)$ ponttól mért távolságának a négyzete?

1285. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek az $x+y = 3$ egyenestől 4-szer akkora távolságra vannak, mint a $7x-y+1 = 0$ egyenestől?

1286. Egy háromszög két csúcsa $(-6; 0)$ és $(6; 0)$, a harmadik csúcsa pedig az $y = -3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1287. Egy háromszög két csúcsa $(-4; -6)$ és $(6; 2)$, a harmadik csúcsa pedig az $y = 3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1288. Egy háromszög két csúcsa $(1; 0)$ és $(5; 0)$. Harmadik csúcsa a koordinátatengelyek által bezárt szög szögfelezőjén mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1289. Egyenlő szárú háromszög egyik szárának végpontjai $A(4; 2)$ és $B(1; 8)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye?

1290. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek az $(1; 0)$ ponttól mért távolságuk négyzetének a számértéke egyenlő az $x = 1$ egyenestől mért távolságukkal?

* Ebben a fejezetben kitűzött feladatok megoldása előtt célszerű tanulmányozni a 956., 1277., és az 1321. feladatok megoldását.



helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyekre

$$OM = k \cdot QM (k > 0)?$$

Legyen $Q(8; 0)$. Írjuk fel a $k = 3; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ értékeknek megfelelő mértani helyek egyenletét. Szerkesszük meg a mértani helyeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Milyen változást tapasztalunk a mértani helyek vonalában, ha a $k$ 1-től kezdve növekszik, illetve, ha 1-től kezdve közeledik a nullához?

1292. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak a koordináta-rendszer síkjában, amelyek olyan távolságra vannak a $(-4; 0)$ és a $(8; 0)$ pontoktól, hogy a távolságuk négyzetösszege 80 (terület) egység? Oldjuk meg a feladatot általánosan is. Legyen az $A(-a; 0)$, a $B(a; 0)$ és

$$MA^2+BM^2 = c^2.$$

Mi a megoldhatóság feltétele? Szerkesszük meg a mértani helyet, ha a $c^2 = 6a^2; 4a^2; 2a^2; a^2$.

1293. Az origón áthaladó egyenes kétszer olyan gyorsan forog ugyanabban a irányban, mint a $(-4; 0)$ ponton áthaladó egyenes. Induláskor mind kettő az $x$ tengellyel azonos. Milyen vonalat ír le a metszéspontjuk

1294. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyekből az $(x-5)^2+(y+2)^2 = 9$ körhöz 4 hosszúságegységnyi érintő húzható?

1295. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyekből az $x^2+y^2-8x+6y = 0$ és az $x^2+y^2-10y = 0$ körhöz húzható érintőszakaszok arány 1:1; 2:1; 3:2?

1296. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $x^2+y^2 = 1$ és az $(x-8)^2+y^2 = 4$ körök azonos szögben látszanak?

1297. Az $y = \lambda(x-4)$ egyenesre az origóból merőleges egyenest húzunk. Határozzuk meg e két egyenes $M$ metszéspontjának a mértani helyét, ha a felvesz minden valós értéket.

1298. Mi a $(3; 4)$ ponton áthaladó és az $x$ tengelyt érintő körök középpontjaina a mértani helye?

1299. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik a $x = 10$ egyenest, és áthaladnak a $(2; 1)$ ponton?

1300. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az tengelyt és a $(2; 0)$ középpontú egységsugarú kört?

1301. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolára illeszkedő pontok ordinát felezőpontjainak a mértani helyét.

1302. Vizsgáljuk meg az $y = 3x^2-4$ parabola mindazon húrjait, melyekne iranyhatározója adott $m$ szám. Mi lesz ezen húrok felezőpontjainak mértani helye?

1303. Az $y^2 = x$ parabola változó $M$ pontjából húzott érintő az $y$ tengelyt eg $A$ pontban metszi. Határozzuk meg az $AM$ szakasz felezőpontjának mértani helyét.

1304. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik a $(x+1)^2+y^2 = 9$ kört, és áthaladnak az $(1; 0)$ ponton?

1305. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjába melyek az $(1; 0)$ ponttól feleakkora távolságra vannak, mint az $x =$ egyenestől?

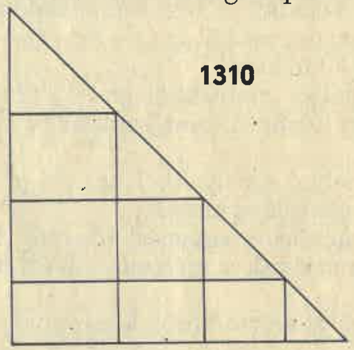
amelyek a (3; 2) ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint az $y$ tengelytől?

**1307.** Forgassuk a $(-1;\ 0)$ ponton áthaladó egyenest és a reá merőleges, az $(1;\ 0)$ ponton áthaladó egyenest egyenlő szögsebességgel egymással ellentétes irányban. Milyen görbét ír le a két egyenes metszéspontja? A $(-1;\ 0)$ ponton áthaladó egyenes kezdőhelyzete legyen az $x$ tengely. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

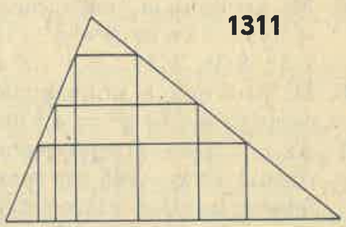
**1308.** Adott az $x-y+1=0$ és az $x+y+1=0$ egyenes, továbbá a $P(1;\ 0)$ pont. E ponton áthaladó egyenes a két adott egyenest az $M_1$ és $M_2$ pontokban metszi. Állapítsuk meg az $M_1M_2$ szakasz felezéspontjának a mértani helyét.

**1309.** Adott egy sík és a síkban két metsző egyenes, $e_1$ és $e_2$. Jelöljük a sík tetszőleges pontjának az $e_1$ egyenestől mért távolságát $d_1$-gyel, az $e_2$ egyenestől mért távolságát $d_2$-vel. Legyen a $k$ adott pozitív szám. Hol helyezkednek el a síkban azok a pontok, amelyek kielégítik a $\frac{d_1}{d_2}=k$ feltételt? Határozzuk meg a mértani helyet akkor is, ha az $e_1 \| e_2$.

**1310.** Adott derékszögű háromszögbe az 1310. ábrán látható módon téglalapokat írunk. Mi a téglalapok középpontjainak a mértani helye?



1310



1311

**1311.** Adott háromszögbe az 1311. ábrán látható módon téglalapokat írunk. Határozzuk meg a téglalapok középpontjainak a mértani helyét.

**1312.** Adott síkban rajzoljunk a rögzített $AB$ szakaszra mint alapra egy $ABC$ egyenlő szárú háromszöget ($AC = BC$). Hosszabbítsuk meg a szárakat a $C$ ponton túl, és mérjük rá az $AC$ félegyenesre a $C$ pontból az $AC = CA_1$, a $BC$ félegyenesre a $C$ pontból a $BC = CB_1$ szakaszt. Határozzuk meg az $A_1$, illetve a $B_1$ pont mértani helyét, ha a $C$ pont az $AB$ szakasz felező merőlegesén végigfut.

**1313.** Adott a síkban két pont: $O_1(5;\ 0)$ és $O_2(1;\ 7)$. Rajzoljunk az $O_1$ és az $O_2$ pontok körül egységsugarú köröket. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek a két kört kívülről érintik?

**1314.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek a $(0;\ 9)$ ponttól háromszor akkora távolságra vannak, mint az $y=1$ egyenestől?

**1315.** Rajzoljuk meg az $y=\frac{1}{x}$ hiperbola húrjait, amelyek párhuzamosak az $y=-2x$ egyenessel. Mi a húrok felezéspontjainak a mértani helye?



amelyeknek a derékszög két szárától mért távolságainak összege adott állandó.

**1317.** Adott háromszög egyik csúcsát összekötjük a szemközti oldal pontjaival. Mi a kapott szakaszok felezőpontjainak a mértani helye?

**1318.** Két egymásra merőleges egyenesen egy-egy pont mozog egyenletesen, azonos sebességgel. A 0 időpontban elfoglalt helyzetük ismeretében határozzuk meg a két pontot összekötő szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

**1319.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek egy adott szakasz végpontjaitól mért távolságai négyzetének a különbsége egyenlő egy adott $k^2$ állandóval?

**1320.** $A$, $B$, $C$ egy háromszög csúcsai. Mi azoknak az $M$ pontoknak a mértani helye az $ABC$ háromszög síkjában, amelyekre nézve

$$MB^2+MC^2 = 2MA^2?$$

**1321.** Két egymásra merőleges $a$ és $b$ egyenes síkjában egy rögzített $P$ pont körül a $DPD'$ derékszög forog. $PD$ szár az $a$ egyenest az $A$ pontban, $PD'$ szár a $b$ egyenest a $B$ pontban metszi. Határozzuk meg az $AB$ szakasz felezőpontjának a mértani helyét. Határozzuk meg a $P$ pont $AB$-re eső merőleges vetületének a koordinátáit. Mi ezen vetületi pont mértani helye?

**1322.** A síkban jelöljünk ki két pontot, $A$-t és $B$-t, továbbá egy az $AB$ egyenesre merőleges $e$ egyenest. Az $e$ egyenes $P$ pontját összekötjük az $A$ és $B$ pontokkal. $PA$ egyenesre az $A$-ban, $BP$ egyenesre a $B$-ben merőlegest állítunk. Határozzuk meg a merőlegesek $M$ metszéspontjának a mértani helyét, ha $P$ végigfut az $e$ egyenesen.

**1323.** Adva van két pont, $A$ és $B$. Egy $CD$ szakasz mozog ezekkel egy síkban egy $AB$ egyenessel párhuzamos irányban úgy, hogy közben sem az iránya, sem a nagysága nem változik. Mi lesz az $AC$ és $BD$ egyenesek $P$ metszéspontjának a mértani helye?

**1324.** Adott egy $e$ egyenes és rajta két pont $A$ és $B$, továbbá egy $e$-vel párhuzamos $CD$ szakasz. Mérjük fel $e$-re $A$-ból, illetőleg $B$-ből egyező irányban az $AP$ és a $BQ = 2\cdot AP$ szakaszokat. Határozzuk meg a $PC$ és $QD$ egyenesek $M$ metszéspontjának a mértani helyét, ha $P$ végigfut az $e$ egyenesen.

**1325.** Az $OAB$ derékszögű háromszög befogói: $OA = a$, $OB = b$. Az $A$ és $B$ pontoknak az $O$ ponton áthaladó $e$ egyenesre eső merőleges vetületei legyenek $A_1$ és $B_1$. Az $A_1$ és $B_1$ pontokon át a háromszög befogóival párhuzamosan húzott egyenesek az $A_1MB_1N$ téglalapot határozzák meg. Állapítsuk meg az $M$ és $N$ pontoknak a mértani helyét, ha $e$ az $O$ pont körül forog.

**1326.** Adott az $e$ egyenes és a rögzített $A$ pont, amely nem illeszkedik az $e$ egyenesre. Mi az $M$ pont mértani helye az $A$ és az $e$ által meghatározott síkban, amelyre nézve

$$\frac{MA^2}{MB} = l,$$

ahol $B$ az $M$ pont merőleges vetülete az egyenesen és az $l$ adott pozitív szám?

mozog a síkban, hogy $AP^2+k\cdot BP^2 = l^2$, ahol $k$ és $l$ pozitív állandók. Határozzuk meg a $P$ pont mértani helyét. Mi a megoldhatóság feltétele?

**1328.** Két rúd egy-egy rögzített pont körül forog úgy, hogy a rudak állandóan merőlegesek egymásra. Mi a rudak közös pontjának a mértani helye, ha a két rögzített pont távolsága $2a$?

**1329.** Adott $AB = 2a$ hosszúságú szakasz úgy mozog a koordináta-rendszerben, hogy az $A$ végpontja mindig az $x$ tengelyre, a $B$ végpontja mindig az $y$ tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg a szakasz felezéspontjának a mértani helyét.

**1330.** Egy háromszög alapja egy adott kör rögzített sugara. Harmadik csúcsa a kör kerületén mozog. Mi a súlypont mértani helye?

**1331.** Adott egy kör és benne a középponttól $d$ távolságra egy rögzített húr. Rajzoljunk a húr fölé olyan háromszögeket, melyek csúcsai a körre illeszkednek. Mi a háromszögek súlypontjainak a mértani helye?

**1332.** Adott körön belül adott egy $P$ pont. A $P$ pont körül egy derékszöget forgatunk, amelynek szárai a kört $A$ és $B$ pontokban metszik. Határozzuk meg $AB$ húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

**1333.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $x^2+y^2 = r^2$ körhöz $d$ hosszúságú érintőszakaszokat húzhatunk?

**1334.** Adott egy kör és a síkjában egy $P$ pont. $P$ pontot kössük össze a kör pontjaival. A kapott szakaszokat osszuk fel $1:1$; $1:2$; $2:3$; $m:n$ arányban. Mi az osztópontok mértani helye?

**1335.** Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyekből adott körhöz egymásra merőleges érintőket húzhatunk?

**1336.** Adott körhöz érintőket húzunk, melyek $2\alpha$ szöget alkotnak egymással. Határozzuk meg a szög csúcsainak a mértani helyét.

**1337.** Adott egy sík, a síkban egy $AB$ szakasz és a szakaszon egy rögzített $O$ pont. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyekből az $AO$ és $OB$ szakaszok egyenlő szög alatt látszanak?

**1338.** Az $O$ pont körül rajzolt koncentrikus körökhöz adott $A$ pontból érintőket rajzolunk. Határozzuk meg az érintési pontok mértani helyét.

**1339.** Az $A(a;\,0)$ és a $B(-a;\,0)$ pont körül két rúd forog úgy, hogy az $y$ tengelyből az általuk lemetszett szakaszok szorzata állandó, mégpedig $b_1\cdot b_2 = a^2$. Mi a rudak közös pontjának a mértani helye?

**1340.** Jelöljük $O$-val a koordináta-rendszer kezdőpontját. A rögzített $P$ pont koordinátái $(a;\,b)$. $P'$ pont az $OP$ félegyenesre illeszkedik úgy, hogy $OP'\cdot OP = k^2$, ahol $k^2$ adott szám. 1. Határozzuk meg a $P'$ koordinátáit. 2. Mi a $P'$ mértani helye, ha a $P$ egy az $x$ tengelyre merőleges egyenesen mozog? 3. Mi a $P'$ mértani helye, ha a $P$ olyan körön mozog, amelynek a középpontja az $x$ tengelyre illeszkedik?

**1341.** Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontjának merőleges vetülete az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

egyenesen $P$. Mi a $P$ pontok mértani helye, ha az egyenes úgy mozog, hogy az $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ állandó marad?



letnek a gyöke, ha az egyenes az $x^2+y^2 = R^2$ kört érinti. — Az egyenlet gyökei legyenek $m_1$ és $m_2$. Mi az $M(x_1;\,y_1)$ pont mértani helye, feltéve, hogy $m_1\cdot m_2 = -1$?

**1343.** Kössük össze a parabola tengelypontját, $O$-t, a parabola tetszőleges $P$ pontjával. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek az $OP$ szakaszt $1:1$, $1:2$, $2:3$, $m:n$ arányban osztják, ha a $P$ változik?

**1344.** Kössük össze a parabola fókuszát, $F$-et, a parabola tetszőleges $P$ pontjával. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek az $FP$ szakaszt $1:1$, $1:2$, $m:n$ arányban osztják?

**1345.** Határozzuk meg a parabola fókuszán áthaladó húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

**1346.** Húzzunk a parabolában párhuzamos húrokat. Mi a húrok felezőpontjainak a mértani helye?

**1347.** A parabola tetszőleges $P$ pontját kössük össze a fókusszal, majd a két pont közé eső szakaszt mérjük rá az előbbi egyenes meghosszabbítására a parabolaponton túl. Mi lesz az így nyert végpont mértani helye, ha a $P$ változik?

**1348.** Az $y^2 = 2px$ parabola vezéregyenesének és tengelyének metszéspontjából húzzunk a parabolához szelőket. Határozzuk meg az így keletkező parabola húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

**1349.** Keressük meg azon körök középpontjainak a mértani helyét, amelyek érintenek egy adott félkört és annak átmérőjét.

**1350.** Az $M$ pont az $OY$ félegyenesen mozog egyenletesen változó mozgással. Sebessége induláskor az $O$ pontban zérus. Az $OY$ félegyenes ugyanakkor önmagával párhuzamosan mozog úgy, hogy az $O$ pont az $OY$-ra merőleges $OX$ félegyenest írja le egyenletes mozgással. Határozzuk meg az $M$ pont pályáját.

**1351.** A parabola fókuszából merőlegeseket húzunk az érintőkre. Mi a merőlegesek talppontjának a mértani helye?

**1352.** A parabola fókuszából merőlegeseket húzunk a parabola normálisaira. Mi a merőlegesek talppontjának a mértani helye? (A parabola normálisán azt az egyenest értjük, amely az érintőt az érintési pontban derékszögben metszi és a parabola síkjában van.)

**1353.** Felezzük meg a parabola normálisának az érintési pont és az $x$ tengely közé eső darabját. Mi a felezőpontok mértani helye?

**1354.** A parabola $M$ pontjában a parabolához érintőt húzunk, és erre a parabola tengelypontján áthaladó merőleges $e$ egyenest állítunk. Ezen $e$ egyenes az $MF$ egyenest ($F$ a fókusz) a $P$ pontban metszi. Mi a $P$ pont mértani helye, ha az $M$ pont végigfut a parabolán?

**1355.** Egy derékszög úgy csúszik a parabola síkjában, hogy a szárai érintik az $y^2=2px$ parabolát. Határozzuk meg a derékszög csúcsának a mértani helyét.

**1356.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $y^2 = 2px$ parabolához húzott érintők iránytényezőinek szorzata $-\frac{1}{2}$?

**1357.** Felezzük meg az $y = \frac{1}{2p}x^2$ parabola érintőinek a koordinátatengelyek közé eső szakaszát. Mi a felezőpontok mértani helye?

... különböző pontját jelöljük $P$-vel. $P$-nek az $x$ tengelyre eső merőleges vetülete legyen $Q$. A $(0;\ 0)$ és a $P$ ponton áthaladó egyenes a $(0;\ -r)$ és a $Q$ ponton áthaladó egyenest $S$ pontban metszi. Határozzuk meg az $S$ pont mértani helyét, ha a $P$ pont végigfut az adott körön.

**1359.** Mi az adott síkban fekvő közös alapú és egyenlő területű háromszögek magasságpontjainak a mértani helye?

**1360.** Legyen $O$ egy adott parabola tengelypontja és $M$ a parabola változó pontja. Az $OM$ egyenesre az $O$ pontban merőlegest rajzolunk, az $M$ ponton át pedig a parabola tengelyével párhuzamost húzunk. Határozzuk meg e két egyenes metszéspontjának a mértani helyét.

**1361.** Adott az $e$ egyenes és rajta kívül a $P$ pont. Mi azon parabolák fókuszainak a mértani helye, amelyek áthaladnak a $P$ ponton, és közös tengelyponti érintőjük az $e$ egyenes?

**1362.** Az $y^2 = 2px$ parabolát az $y = ax$ egyenes az origóban és még egy $M$ pontban metszik. Határozzuk meg $M$ pont koordinátáit. Az $M$ ponton át az $x$ tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az $y$ tengelyt $A$ pontban metszi. $A$ pontból az $OM$-re húzott merőleges talppontja legyen $H$. Bizonyítsuk be, hogy ez a merőleges $a$ bármely értéke mellett egy rögzített ponton megy át. Határozzuk meg a $H$ pont mértani helyét, ha az $a$ változik.

**1363.** Határozzuk meg a parabola három érintője alkotta háromszög magasságpontjának a mértani helyét.

**1364.** Az $ABC$ háromszög $BC$ alapja rögzített, az $A$ csúcs egy, a $BC$ alappal párhuzamos egyenesen mozog. Mi a háromszöghöz tartozó Feuerbach-kör középpontjának a mértani helye?

**1365.** Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek érintik az $(x-u)^2+y^2 = u^2$ és az $(x+u)^2+y^2 = 16u^2$ köröket?

**1366.** Egy háromszög alapja egy ellipszis nagytengelye, a háromszög csúcsa pedig az ellipszisen mozog. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának a mértani helyét. Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a háromszög alapja az ellipszis fél nagytengelye.

**1367.** Az ellipszisbe derékszögű háromszöget illesztünk. Átfogójának egyik végpontja az origó, másik végpontja az ellipszisre illeszkedő $P$ pont. Egyik befogója az $x$ tengelyen van. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának a mértani helyét, ha a $P$ az ellipszisen mozog.

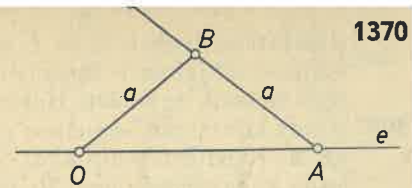
**1368.** Kössük össze *a)* az ellipszis középpontját az ellipszis tetszőleges $P$ pontjával; *b)* az ellipszis tetszőleges de rögzített pontját $P$-vel. Határozzuk meg a kapott szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha a $P$ végigfut az ellipszisen.

**1369.** Adott két egymásra merőleges egyenes, $a$ és $b$. Az $a$ egyenesen az $M$ pont, a $b$ egyenesen az $N$ pont úgy mozog, hogy a távolságuk nem változik. Határozzuk meg az $MN$ szakasz rögzített $P$ pontjának a mértani helyét.

**1370.** A gőzgép felrajzolt indikátor-írószerkezetének $O$ pontja rögzített, az $A$ pontja egy egyenesen mozog (1370. ábra). Milyen görbét ír le a $P$ pont, amely az $AB$ meghosszabbításán van, $B$-től $b$ távolságban? ($OB = AB = a$.)

**1371.** Rögzítsük az $\omega$ szög $O$ csúcsát és a szögfelezőjét. A szög egyik szárára mérjük fel az $OA = a$, a másik szárára az $OB = b$ szakaszt. Határozzuk






1370

mértani helyét, ha az $\omega$ szög nagysága változik. Mi a mértani hely akkor, ha az $a = b$?

**1372.** Az ellipszis egyik fókuszából az ellipszis érintőire merőlegeseket húzunk. Mi a merőlegesek talppontjainak a mértani helye?

**1373.** Az ellipszis átmérői fölé egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztünk. Mi ezen háromszögek csúcsainak a mértani helye?

**1374.** Határozzuk meg az ellipszis párhuzamos húrjai felezéspontjainak a mértani helyét.

**1375.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis derékszög alatt látszik?

**1376.** Egy pontból egyenlő $c$ kezdősebességgel ugyanabban a függőleges síkban, de különböző $\alpha$ szögek alatt testeket hajítunk el. Határozzuk meg a parabolapályák tengelypontjainak a mértani helyét, ha $\alpha$ 0°-tól 90°-ig változik.

**1377.** Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek érintik az $x^2+y^2+2cx = 0$ kört, és áthaladnak a $(c;\ 0)$ ponton?

**1378.** Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek kívülről érintik az $(x-2c)^2+y^2 = c^2$ és az $(x+2c)^2+y^2 = 4c^2$ köröket?

**1379.** Keressük azon szakaszok középpontjainak a mértani helyét, amelyek a hiperbola pontjait kötik össze

*a)* a hiperbola bal oldali fókuszával;

*b)* a hiperbola jobb oldali tengelypontjával;

*c)* a hiperbola középpontjával.

**1380.** Tekintsük adott síkban az összes olyan derékszögű háromszöget, amelyeknek a derékszöge közös, és a területük egyenlő. Mi az átfogók felezéspontjának a mértani helye?

**1381.** Adott az $AB$ távolság. Felezéspontja $O$. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyeknek az $O$-tól mért távolsága egyenlő az $A$-tól és $B$-től mért távolságuk mértani közepével.

**1382.** Az $x^2+y^2 = r^2$ egyenlettel megadott kört az $x = a$ egyenes, ahol $0 < |a| < r$, az $A$ és $B$ pontokban metszi. Az $A, B, (-r;\ 0)$ és az $(r;\ 0)$ pontok egy konvex négyszöget határoznak meg. Mi a négyszög szemközti oldalegyenesei metszéspontjainak a mértani helye, ha az adott egyenest az $y$ tengelyre merőleges irányban mozgatjuk?

**1383.** Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az $x$ tengelyből $a$, az $y$ tengelyből $b$ hosszúságú szakaszokat metszenek ki?

**1384.** Állapítsuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyekből az $y^2 = 2px$ parabola 45°-os szögben látszik.

**1385.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola derékszögben látszik?

**1386.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek a $P(a;\ 0)$ ponttól és az $x = -a$ egyenestől mért távolságuk hányadosa adott pozitív $c$ szám?

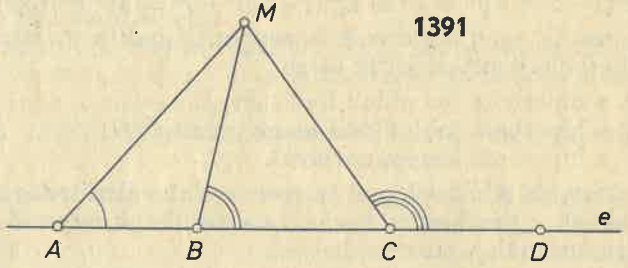
dinátatengelyeket $K$ és $L$ pontokban metszik. Ezekben a pontokban az ellipszis síkjában a tengelyekre merőlegeseket állítunk, melyek $P$ pontban metszik egymást. Határozzuk meg a $P$ mértani helyét.

**1388.** Adott két metsző egyenes: $e_1$ és $e_2$; az $e_1$ egyenesen az $A_1$, az $e_2$ egyenesen az $A_2$ rögzített pontokkal. Jelöljünk ki az $e_1$ egyenesen egy $M_1$ pontot és az $e_2$ egyenesen egy $M_2$ pontot, az $A_1A_2$ egyenes ugyanazon a partján úgy, hogy $A_2M_2 = k \cdot A_1M_1$ legyen ($k$ adott pozitív szám). Határozzuk meg az $M_1M_2$ szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha $M_1$ befutja az $e_1$ egyenest.

**1389.** Adott a síkban három rögzített pont: $A$, $B$, $C$. Mi az $M$ pont mértani helye az adott síkban, ha az eleget tesz az $l \cdot MA^2 + m \cdot MB^2 + n \cdot MC^2 = 0$ feltételeknek. ($l$, $m$, $n$ nullától különböző adott számok.)

**1390.** A paralelogramma egyik oldalát, $a$-t rögzítjük, a másik oldalát, $b$-t az $a$-val közös pontja körül forgatjuk. Határozzuk meg az átlók metszéspontjának a mértani helyét.

**1391.** Adott egy sík, a síkban egy $e$ egyenes és az $e$ egyenesen az $A$, $B$, $C$ és $D$ pontok (az 1391. ábrán látható sorrendben). Határozzuk meg azoknak az $M$ pontoknak a mértani helyét az adott síkban, amelyekre nézve $MCD\sphericalangle = MAD\sphericalangle + MBD\sphericalangle$.




1391

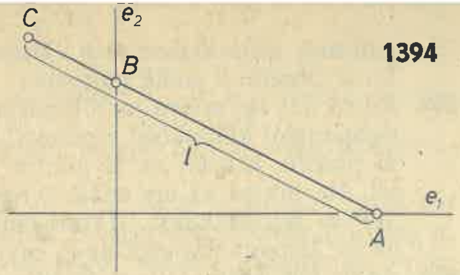
**1392.** Mi az $ABC$ háromszög $A$ csúcsának a mértani helye, ha a $BC$ oldala rögzített, és az $A$-ból húzott magasság a $(c+b)$ és a $(c-b)$ mértani közepe ($c$ és $b$ a háromszög változó oldalainak a mértékszámát jelentik és $c > b$).

**1393.** Adott a síkban egy $e$ egyenes, egy $k$ kör és a $k$ kör középpontján áthaladó az $e$ egyenesre merőleges egyenesen egy $P$ pont. Rajzoljunk a $P$ pont körül olyan $k'$ kört, amelynek legalább egy közös pontja van $e$-vel is és $k$-val is. Húzzuk meg a $k$ és $k'$ közös húrjának $h$ egyenesét, illetve a $k$ és $k'$ közös érintőjét. Ezután állítsunk merőlegeseket (merőlegest) az $e$ egyenesre azokban a pontokban (pontban), amelyekben a $k'$ kör metszi (érinti) az $e$ egyenest. Ezek a merőlegesek metszik a $h$ egyenest. Mi a metszéspontok mértani helye, ha a $k'$ kör változik? Mi a mértani hely akkor, ha a feladatot a következőképpen módosítjuk: $k'$ körnek legalább egy közös pontja legyen az $e$ egyenessel, $h$ pedig legyen a $k$ és $k'$ körök hatványvonala?

**1394.** Adott két egymásra merőleges egyenes $e_1$, $e_2$ és egy $AC = l$ hosszúságú szakasz. Jelöljünk ki a szakaszon egy $B$ pontot. Ezután helyezzük el a szakaszt az 1394. ábrán látható módon. Határozzuk meg a $C$ végpont mértani helyét, ha a szakaszt úgy mozgatjuk, hogy az $A$ végpontja min-



pontja pedig az $e_2$ egyenesre illeszkedjék.




1394

**1395.** Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenletet:

a) $x^2 + x|x| + 2y^2 = 8$;

b) $\frac{1}{4}x^2 + 4y^2 + 4y|y| = 1$;

c) $2x^2 - 4x + 2(x-1)|x-1| + 8y^2 - 8y|y| + 1 = 0$.

**1396.** Adottak az egyenlő oldalú háromszög csúcsai: $A\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, $C\left(0;\ \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$. Határozzuk meg a háromszög síkjában azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek a háromszög csúcsaitól mért távolságuk négyzetösszege $4a^2$, $2a^2$, $a^2$, illetve $\frac{1}{2}a^2$.

**1397.** Két egyenlő hosszú pálcát a közös $C$ végpontjukban csuklósan kapcsoltunk össze. Az egyik pálca $A$ végpontja rögzített. A másik pálca $B$ végpontja egy rögzített és az $A$ ponton áthaladó egyenesen mozog. Határozzuk meg a $BC$ pálca felezéspontjának a mértani helyét.

**1398.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye egy adott négyzet síkjában, amelyeknek a négyzet csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege adott $c^2$ állandó?

**1399.** Adott síkban fekvő rögzített $k_1$ és $k_2$ körökhöz $P$ pontból érintőket rajzolunk. Az érintési pontok $P_1$, illetve $P_2$ ($P_1$ a $k_1$, $P_2$ a $k_2$ kör pontja). Mi a $P$ pont mértani helye, ha

a) $PP_1^2 + PP_2^2 = a^2$;

b) $PP_1^2 - PP_2^2 = a^2$;

c) $kPP_1^2 + lPP_2^2 = a^2$

ahol $a$, $k$ és $l$ adott számok?

**1400.** Az origón áthaladó $e$ egyenes az $x^2+y^2-4x = 0$ és az $x^2+y^2-2x = 0$ köröket az origótól különböző $M_1$, illetve $M_2$ pontokban metszi ($M_1 \neq M_2$). Az első kör középpontja $O_1$, a második kör középpontja $O_2$. Az $O_1M_2$ és az $O_2M_1$ egyenesek metszéspontját jelöljük $P$-vel. Milyen vonalat ír le a $P$ pont, ha az $e$ egyenest az origó körül forgatjuk?

**1401.** A $2x+3y = 6$ egyenes tetszőleges $P$ pontját vetítsük merőlegesen a koordinátatengelyekre. Az $x$ tengelyre illeszkedő vetület legyen $P_1$, az $y$ tengelyre illeszkedő vetület legyen $P_2$. Mi annak a $P_1P_2$ szakaszra illeszkedő $Q$ pontnak a mértani helye, amelyre a $\frac{P_1Q}{P_2Q} = \lambda$, ahol $\lambda$ adott pozitív szám.

10*

1402. Az $x = 0$, $y = 0$ és az $\frac{x}{k}+\frac{y}{a-k} = 1$ egyenesek háromszöget határoz-
nak meg. ($k \neq 0$ és $a \neq k$.) Milyen vonalat ír le a háromszög súlypontja, ha $a$ állandó, $k$ pedig változik?

1403. Adott két egymásra merőleges egyenes $e_1$ és $e_2$ és az $e_1$ egyenesen a metszésponttól különböző rögzített $P$ pont. Jelöljünk ki az $e_2$ egyenesen egy $M$ pontot, azután az $M$ ponton át húzzunk párhuzamost az $e_1$ egyenessel. Mérjük rá az így adódó $e$ egyenesre $M$ pontból mindkét irányban az $MP = MQ$ szakaszt. Határozzuk meg a kapott pontok mértani helyét, ha az $M$ pont végigfut az $e_2$ egyenesen.

1404. Adott két pont: $A(0; a)$ és $B(b; a)$. Osszuk fel az $OA$ és az $AB$ szakaszt $n$ egyenlő részre. ($O$ az origó.) Az $OA$ szakasz osztópontjain át húzzunk párhuzamosokat az $AB$ egyenessel, az $AB$ szakasz osztópontjait pedig kössük össze az origóval. Határozzuk meg az azonos sorszámú osztópontokból húzott egyenesek metszéspontjainak a mértani helyét. (A számozást az $OA$ szakaszon az $O$ pontnál, az $AB$ szakaszon az $A$ pontnál kezdjük.)

1405. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek az $x^2+y^2+4x+$ $+8y-5 = 0$ körre vonatkozó hatványa a) 7; b) $-2$?

1406. Adott egy kör és annak a belsejében egy rögzített $P$ pont. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az adott kört érintik, és áthaladnak a $P$ ponton?

1407. Adott a $k_1$ kör és annak a belsejében a $k_2$ kör. Határozzuk meg $k_1$ és $k_2$ kört érintő $k$ körök középpontjainak a mértani helyét.

1408. Adott egy kör és a kör síkjában a körön kívül egy rögzített $P$ pont. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek áthaladnak a $P$ ponton, és az adott kört érintik?

1409. Adott a $k_1$ kör és a $k_1$ kör síkjában a körön kívül a $k_2$ kör. Mi a $k_1$ és $k_2$ kört érintő $k$ körök középpontjainak a mértani helye?

1410. Adott egy kör és egy a középpontján áthaladó rögzített $e$ egyenes. Jelöljünk ki a kör síkjában egy $P$ pontot. Ezután szerkesszük meg azt a körre illeszkedő $Q$ pontot, amelyre $QQ' = PQ'$, ahol $Q'$ a $Q$ pontnak az $e$ egyenesre eső merőleges vetületét jelenti. Mi azoknak a $P$ pontoknak a mértani helye, amelyekre a szerkesztés elvégezhető?

1411. A síkban rögzítsünk két pontot, $A$-t és $B$-t. Mi azoknak a $P$ pontoknak a mértani helye a síkban, amelyek eleget tesznek a következő követelményeknek: $k \cdot PA^2+l \cdot PB^2 = m$ ($k$, $l$ és $m$ adott pozitív állandók)?

1412. Adott a hiperbola két, a valós tengelyére szimmetrikus pontja, $A$ és $B$. Jelöljük a hiperbola tengelypontjait $T_1$-gyel és $T_2$-vel. Az $AT_1$ és a $BT_2$ egyenesek metszéspontját jelöljük $M$-mel. Határozzuk meg az $M$ pont mértani helyét, ha az $A$ pont végigfut a hiperbolán.

1413. Adott két kör: $k_1$ és $k_2$. A két kör kívülről érinti egymást a $P$ pontban. A $k_1$ kör sugara egyenlő a $k_2$ kör sugarának a kétszeresével. A $k_1$ kör a rögzített középpontja, $O_1$ körül forog, és közben a súrlódás miatt forgatja a $k_2$ kört is a rögzített középpontja, $O_2$ körül. Jelöljük ki a $k_1$ kör $O_1P$ és a $k_2$ kör $PO_2$ sugarát. A kijelölt sugarak a forgás megkezdése után ellentétes irányban elfordulnak. Határozzuk meg a két sugár egyenesei metszéspontjának a mértani helyét.

1414. Adott ellipszis egyik $Q$ pontjában rajzoljuk meg az érintőt. Húzzunk erre merőlegest az ellipszis középpontjából. Jelöljük a merőleges talp-



szisen?

1415. Az $y^2 = 2px$ parabola $F$ fókuszát kössük össze a parabola tetszőleges $P$ pontjával. Az $FP$ szakasz $C$ pontjára legyen $\frac{FC}{CP} = \lambda$ ($\lambda$ adott pozitív szám). Határozzuk meg a $C$ pont mértani helyét, ha a $P$ végigfut a parabolán.

1416. A koordináta-rendszerben kijelöljük az $A(a;\ 0)$ és a $B(0;\ b)$ pontokat úgy, hogy $a+b = k$ legyen, ahol $k$ adott pozitív szám. Rajzoljuk meg az $OAB$ háromszög köré írható kört ($O$ az origó), ezután húzzunk az $O$ ponton áthaladó és $AB$-vel párhuzamos egyenest, amely a kört $O$ és $P$ pontban metszi. Határozzuk meg a $P$ pont mértani helyét, ha az $A$ és $B$ pontokat a feltételnek megfelelő módon változtatjuk.

1417. Az $x^2+y^2 = r^2$ egyenlettel megadott kör síkjában határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az $x$ tengelytől feleakkora távolságra vannak, mint a körtől.

1418. Az $x^2+y^2 = r^2$ kör $P(x_1;\ y_1)$ pontjában a körhöz érintőt rajzolunk. Az érintő az $x$ tengelyt $A(a;\ 0)$ az $y$ tengelyt $B(0;\ b)$ pontban metszi. Határozzuk meg az $M(a;\ b)$ pont mértani helyét, ha a $P$ végigfut a körön.

1419. Rajzoljuk meg az $y^2 = 2px$ parabola $P(x_1;\ y_1)$ pontjában a parabola $t$ érintőjét. $t$ egyenes az $x$ tengelyt $A$, az $y$ tengelyt $B$ pontban metszi. $A$ pontban az $x$ tengelyre, $B$ pontban az $y$ tengelyre merőlegest rajzolunk. A metszéspontjukat jelöljük $M$-mel. Határozzuk meg az $M$ pont mértani helyét, ha a $P$ pont végigfut a parabolán.

1420. Adott $O$ középpontú és $r$ sugarú kör $A$ pontjában a körhöz érintőt rajzolunk. Az érintő tetszőleges $M$ pontjában rajzoljunk a kör síkjában merőlegest az érintőre, azután az $M$ pontból mérjük fel erre $M$-nek a körtől mért távolságát. Határozzuk meg az így adódó $P$ pont mértani helyét, ha az $M$ végigfut az érintőn.

1421. Adott a $k$ kör. Rögzítsük a kör egyik átmérőjét. Határozzuk meg azon körök középpontjainak a mértani helyét, amelyek érintik a rögzített átmérőt, és a $k$-hoz legközelebb eső pontjuknak a $k$-tól való távolsága egyenlő a sugarukkal.

1422. Adott egy parabola: A tengelypontja $O$ és egy tetszőleges pontja $M$. Az $OM$ egyenesre az $O$ pontban merőlegest emelünk, az $M$ ponton át a parabola tengelyével párhuzamost húzunk. Határozzuk meg a két egyenes metszéspontjának a mértani helyét, ha az $M$ végigfut a parabolán.

1423. Rögzítsünk a síkon két pontot, $A$-t és $B$-t. Rajzoljunk az $A$ és $B$ pontokon áthaladó köröket. Mi a körök azon pontjainak a mértani helye, amelyek legtávolabb vannak az $AB$ szakasz felező merőlegesétől?

1424. Az $x^2+y^2-2rx = 0$ körön rögzítsük az $A(0;\ 0)$ és a $B(r;\ r)$ pontokat, azután jelöljük ki a kör egy harmadik pontját, $M$-et. A $BM$ húr felezéspontjából húzzunk az $AM$ egyenesre merőleges $e$ egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ha az $M$ pontot a körön mozgatjuk, az $e$ egyenes egy rögzített ponton halad át. Határozzuk meg az $AM$ egyenes és az $e$ egyenes metszéspontjának a mértani helyét.

1425. Adott két párhuzamos egyenes, $e$ és $f$ és közöttük az $O$ pont. $O$ távolsága $e$ től $a$, $f$-től $b$. Rajzoljunk $O$ ponton át olyan $g$ egyenest, amely $e$-t $E$-ben, $f$-et $F$-ben metszi. $F$ pontban merőlegest állítunk a $g$-re, azután az $e$-vel

Mi az $X$ pont mértani helye, ha a $g$ egyenest az $O$ pont körül forgatjuk?

**1426.** Adott az $ABC$ derékszögű háromszög. Toljuk el a $CA$ befogó egyenesét. Ez az egyenes a $CB$ befogó egyenesét $P$, az $AB$ átfogó egyenesét $R$ pontban metszi. Határozzuk meg a $PA$ és az $RC$ egyenesek metszéspontjának a mértani helyét, ha a $CA$ egyenesre különböző eltolást alkalmazunk.

**1427.** Adott méretű homogén négyzet alakú fémlemezt a középpontján átmenő $e$ egyenessel két darabra vágjuk szét. Határozzuk meg az egyes lemezdarabok súlypontjainak a mértani helyét, ha az $e$ egyenest a középpont körül forgatjuk.

**1428.** Adott síkban fekvő $e$ egyenesen rögzítsünk két pontot, $M$-et és $S$-et. Tekintsük $e$-t egy egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyének, $M$-et a magasságpontnak és $S$-et a súlypontnak. Az $e$-re illeszkedő csúcsot jelöljük $C$-vel. Határozzuk meg a háromszög másik két csúcsának a mértani helyét, ha $C$ az $e$ egyenesen mozog.

**1429.** Adott kör középpontján áthaladó és a kör síkjába eső egyenesek közül rögzítsük az egyik egyenest. Mi azon körök középpontjának a mértani helye, amelyek érintik az adott kört és a rögzített egyenest?

**1430.** $g$ és $l$ adott egyenesek merőlegesek egymásra. $g$ egyenesen rögzítsünk két pontot, $A$-t és $B$-t. Az $l$ egyenes tetszőleges $P$ pontját összekötjük $A$-val és $B$-vel, azután az $AP$ és $BP$ egyenesekre az $A$, illetve a $B$ pontban az adott egyenesek által kifeszített síkban merőlegest rajzolunk. Mi a merőlegesek $M$ metszéspontjának a mértani helye, ha a $P$ pont végigfut az $l$ egyenesen?

**1431.** Rajzoljunk $O$ pont körül egy kört, és rögzítsük az egyik átmérőjét. A kör kerületén jelöljünk ki egy $P$ pontot. $P$-nek a rögzített átmérőre eső merőleges vetülete legyen $Q$. A középpontból a $P$-hez húzott sugárra mérjük fel az $OR = OQ$ szakaszt. Határozzuk meg az $R$ pont mértani helyét, ha $P$ végigfut az adott körön.

**1432.** Rögzítsünk a koordináta-rendszer síkjában egy $A(x_0; y_0)$ pontot. ($x_0 > 0$ és $y_0 > 0$). Húzzunk az $A$ ponton át olyan $e$ egyenest, amely az $x$ tengelyt $Q$, az $y$ tengelyt $R$ pontban metszi. Határozzuk meg a $QR$ szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha az $e$ egyenest az $A$ pont körül forgatjuk.

**1433.** Adott két egymásra merőleges egyenes: $e_1$ és $e_2$. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az $e_1$ egyenest érintik, az $e_2$ egyenesből pedig $d$ hosszúságú szakaszt vágnak ki?

**1434.** Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyek két rögzített ponttól mért távolságainak a szorzata adott állandóval egyenlő.

**1435.** Az $x = a$ egyenlettel megadott egyenest, ahol $a > 0$, messük az origóból húzott egyenesekkel. A metszéspontokból az origó felé mérjünk fel adott $b$ hosszúságú szakaszokat. Határozzuk meg a kapott végpontok mértani helyét.

**1436.** Az origón áthaladó $e$ egyenes az $x^2+y^2-2ax = 0$, $(a > 0)$ kört az $A(0; 0)$ és egy $B$, az $x = 2a$ egyenest $C$ pontban metszi. Mérjük fel $A$ pontból az $AC$ szakaszra az $AP = CB$ szakaszt. Határozzuk meg $P$ pont mértani helyét, ha $m$ minden valós értéket felvesz.

**1437.** Adott $r$ sugarú kör csúszás nélkül gördül az $x$ tengelyen. Milyen görbét ír le a körnek az a pontja, amelyik a mozgás kezdetekor az origóban van?



kielégítik a következő egyenlőtlenség-rendszert:

a) $x \geq 2$, $\quad y \geq x-1$;

b) $x > 0$, $\quad y \geq \frac{1}{x}$;

c) $x < 0$, $\quad y > \frac{1}{x}$;

d) $x+y \geq 2$, $\quad 2x-y \geq 8$;

e) $3x-y-2 < 0$, $\quad 5x-4y+6 < 0$;

f) $x-y-2 < 0$, $\quad 2x-2y+5 < 0$;

g) $x+y-4 < 0$, $\quad 2x+2y+5 > 0$;

h) $2x+y = 3$, $\quad x-y < 12$;

i) $x-5y+6 < 0$, $\quad 3x+y-14 < 0$, $\quad x-y+2 > 0$;

j) $3x+2y-5 > 0$, $\quad 2x-y-8 < 0$, $\quad 3x-5y+2 = 0$;

k) $x^2+y^2 \geq 25$, $\quad x \geq 0$;

l) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} < 1$, $\quad y > 0$;

m) $y > 3x-2$, $\quad y < x^3$;

n) $x^2-y^2 \leq 9$, $\quad 2x-3y+2 = 0$;

o) $y \geq \frac{1}{4}x^2$, $\quad y \leq 2x$.

**1439.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(y-x^2)(x+y-6) < 0$;

b) $(x^2+y^2-4)(x^2-4) > 0$;

c) $\frac{x^2-y}{y^2-x^2} > 0$;

d) $y \geq |x-2|$;

e) $y^2 < |4x|$;

f) $y+\sqrt{(x-1)^2} \leq 0$;

g) $y+x-|x-3| \geq 0$.

**1440.** Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$2x+y \geq 6$$
$$x+2y \geq 6$$
$$y \geq 1$$
$$x \geq 0.$$

Határozzuk meg $x$ és $y$ értékét úgy, hogy a $k = 5x+6y$ függvénynek a fenti feltételek mellett minimuma legyen.

**1441.** Egy osztály klubdélutánra készül, és a tanulók elhatározzák, hogy szendvicseket készítenek. A szendvicsek elkészítéséhez a következő nyersanyag áll rendelkezésükre: 120 dkg vaj, 100 dkg sonka, 200 dkg sajt, 20 db kemény tojás és korlátlan mennyiségű kenyér. Kétféle szendvicset akarnak készíteni. Az $A$ típusú szendvicshez darabonként a következő anyagokat használják fel: 3 dkg vaj, 3 dkg sonka, 2 dkg sajt, $\frac{1}{4}$ tojás és kenyér. A $B$ típusú szendvicshez darabonként 2 dkg vajra, 1 dkg sonkára, 5 dkg sajtra, $\frac{1}{2}$ tojásra és kenyérre lesz szükség. A rendelkezésre álló nyersanyagból hány darab $A$ és hány darab $B$ típusú szendvics készíthető úgy, hogy az összes szendvicsek száma a lehető legnagyobb legyen?

**1442.** Az $A$ és a $B$ típusú ruhák elkészítéséhez egy üzemben darabonként a következő munkaműveletek szükségesek:

| Munkaművelet | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| Szabás | 3 perc | 3 perc |
| Varrás | 1 perc | 4 perc |
| Hegesztés | 1 perc | – |

Egy műszakon belül a szabásra összesen 420 perc, a varrásra összesen 440 perc, a hegesztésre összesen 80 perc fordítható. Az $A$ típusú ruha 60 Ft a $B$ típusú ruha 30 Ft haszonnal jár darabonként. Az $A$ típusú ruha termelési értéke darabonként 450 Ft, a $B$ típusú ruha termelési értéke darabonként 500 Ft.
Hány darabot termeljen a gyár egy műszakban az egyes modellekből, ha
*a)* maximális haszonra,
*b)* maximális termelési értékre,
*c)* maximális haszon mellett maximális darabszám elérésére törekszik?
Létezik-e olyan termelési program, amely mindhárom követelményt egyszerre kielégíti?

**1443.** Egy üzem $A$ és $B$ típusú termékeket gyárt, munkadarabonként a következő feltételek mellett

| Munkaművelet | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| Marás | 2 perc | – |
| Préselés | – | 2 perc |
| Csiszolás | 2 perc | 1 perc |
| Festés | 5 perc | 5 perc |

Egy műszakon belül a marásra 90 perc, a préselésre 80 perc, a csiszolásra 100 perc, a festésre 300 perc fordítható.
Az $A$ típusú munkadarab előállítási költsége 1,28 Ft, a $B$ típusú munkadarab előállítási költsége 4,65 Ft.
Az $A$ típusú munkadarabot 2 Ft-ért, a $B$ típusút 5 Ft-ért adja el az üzem.
Milyen termelési program mellett tudna az üzem a legnagyobb nyereségre szert tenni úgy, hogy közben a lehető legtöbb munkadarabot állítsa elő?