

AZ ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖG MEGOLDÁSA SINUS- ÉS COSINUSTÉTELLEL

NUMERIKUS FELADATOK

243. Jelölje a , b és c az általános háromszög oldalait; α , β , γ az oldalakkal szemközti szögeket; m_a , m_b és m_c az a , b és c oldalakhoz tartozó magasságot. a oldal vetülete c -re x ; b oldal vetülete c -re y ; T a háromszög területe; f_γ a γ szög felezője; s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal; r a körülírt kör sugara; ϱ a beírt kör sugara. Az alábbi táblázat 5 általános háromszögre vonatkozó adatokat tartalmaz. (Lásd a 243. ábrát.)

Adatok	1. háromszög	2. háromszög	3. háromszög	4. háromszög	5. háromszög
a	20	75	260	1 480,—	19,19
b	13	29	169	492,—	10,09
c	21	52	273	1 508,—	13,5
α	67°23'	133°36'	67°23'	77°19'	108°
β	36°52'	16°16'	36°52'	18°55'	30°
γ	75°45'	30°8'	75°45'	83°45'	42°
m_a	12,6	14,56	163,8	489,08	6,75
m_b	19,38	37,66	252,—	1 471,—	12,84
m_c	12,—	21,—	156,—	480,—	9,6
x	16,—	72,—	208,—	1 400,—	16,62
y	5,—	—20,—	65,—	108,—	—3,12
T	126,—	546,—	21 294,—	362 000,—	64,8
f_γ	12,44	40,38	161,7	549,7	12,35
s_c	13,2	50,57	171,6	804,7	13,8
r	10,83	51,79	140,8	758,5	10,09
ϱ	4,67	7,—	60,67	208,—	3,—

Számítsuk ki az alább megadott alkotórészekből, a táblázat háromszögeinek adataiból az ismeretlen alkotórészeket, majd hasonlítsuk össze a kapott eredményeket a táblázat adataival.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) adott a, b, c ; | g) adott c, m_a, m_b ; |
| b) adott a, b, γ ; | k) adott m_a, m_c, α ; |
| c) adott a, c, β ; | l) adott a, x, y ; |
| d) adott a, b, α ; | m) adott a, x, α ; |
| e) adott a, α, β ; | n) adott m_c, x, α ; |
| f) adott b, α, β ; | o) adott a, m_c, y ; |
| g) adott c, α, β ; | p) adott m_a, m_c, y ; |
| h) adott a, b, m_c ; | r) adott $m_c, x, \alpha - \beta$; |
| i) adott a, m_c, γ ; | s) adott x, y, T . |

A SINUSTÉTEL ALKALMAZÁSA

244. Egy háromszög kerülete 15 cm; szögeinek aránya 3:4:5. Határozzuk meg a háromszög oldalait és szögeit.
245. Egy háromszög kerülete 20 cm; két szöge $41,6^\circ$ és $69,5^\circ$. Mekkora a háromszög oldalai?
246. Egy háromszögből ismerjük két oldal összegét: 20 cm és az ezekkel az oldalakkal szemben fekvő 42° -os és 86° -os szögeket. Mekkora a háromszög oldalai?
247. Egy háromszögből ismerjük két oldal különbségét: 6 cm és az ezekkel az oldalakkal szemközti $32,6^\circ$ -os és $75,8^\circ$ -os szögeket. Mekkora a háromszög oldalai?
248. Olyan háromszöget keressünk, melynek két oldala: 5 és 6 cm, a kisebbik oldallal szemközti szöge: $60^\circ 40'$. Mekkora a háromszög ismeretlen szögei?
249. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm, a kisebbik oldallal szemközti szög 35° . Mekkora a háromszög ismeretlen szögei? Hány megoldás van?
250. Egy háromszög két oldala 12 cm és 13 cm, a kisebbik oldallal szemközti szög $67^\circ 23'$. Mekkora a háromszög ismeretlen szögei?
251. Egy szabályos háromszög oldalai 30 cm hosszúak. Osszuk az egyik szöveget két egyenessel három egyenlő részre. Mekkora részekre osztják az egyenesek a szöggel szemközti oldalt?
252. Egy háromszög egyik szöge $64,6^\circ$. Ennek a szögnek a felezője 18,54 cm, és a szög csúcsából kiinduló magasság 17,82 cm. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
253. Egy háromszögből ismerjük b oldalt, α szöveget, és tudjuk, hogy az α szög belső és külső szögfelezői egyenlő hosszúak. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai?
Oldjuk meg a feladatot, ha $b = 10$ cm és $\alpha = 20^\circ$.
254. 100 kp-os erőt bontunk fel két olyan összetevőre, amelyek 50° -os és 20° -os szöveget alkotnak vele!
255. Az előző feladatot oldjuk meg a következő adatokkal:

- | | | |
|--------------------|---------------------------|--------------------------|
| a) $R = 27,16$ kp; | $\alpha = 87,8^\circ$; | $\beta = 34,2^\circ$; |
| b) $R = 40,8$ kp; | $\alpha = 65^\circ 15'$; | $\beta = 79^\circ 45'$; |
| c) $R = 58,82$ kp; | $\alpha = 45^\circ 38'$; | $\beta = 23^\circ 22'$; |
| d) $R = 120$ kp; | $\alpha = 44^\circ 15'$; | $\beta = 29^\circ 5'$; |
| e) $R = 16$ kp; | $\alpha = 34^\circ 30'$; | $\beta = 80^\circ$; |
| f) $R = 12$ kp; | $\alpha = 130^\circ$; | $\beta = 36^\circ 19'$. |

256. Egy folyó partján van egy épület, amelynek két egymás felett levő ablaka 15 m-re van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az ablakból a túlsó partot $13^{\circ}20'$, illetve $6^{\circ}34'$ depressziószög alatt látjuk?
257. Egy északnak vitorlázó hajóról két világítótorony – amely egymástól 40 km-nyire van – egy nyugatnak irányuló egyenesben látszik. Egyórai vitorlázás után az egyik délnyugati, a másik dél-délnyugati irányban látszik. Mekkora a hajó sebessége?
258. Csónakkal akarunk a folyó túlsó partjára jutni. A cél iránya a folyó partjával 38° -os szöget alkot víz mentén. Hogy a víz sodra ellenére is egyenesen a célhoz jussunk, a cél irányától egy bizonyos szöggel eltérő irányban kell eveznünk. Mekkora ez a szög, ha a csónak sebessége állóvízben 3 m/sec; a víz sodráé 1,8 m/sec?
259. A hegy lába körül elterülő síkság egy A pontjából két egymás mögött levő hegycsúcs egy irányban látszik, mégpedig a közelebbi $25^{\circ}42'$, a távolabbi $31^{\circ}12'$ emelkedési szög alatt. 520 m-rel közelebből a hegycsúcsok közös emelkedési szöge $41^{\circ}6'$. Hány m-nyire emelkednek a szóban forgó hegyek a síkság fölé, és mekkora a csúcsok távolsága légvonalban?
260. Egy egyenlő szárú trapézból ismerjük az átló hosszát (21 cm) és azt a két szöget, amelyre az átló a trapéz hegyesszögét osztja: a szár felé $38,5^{\circ}$ és az alap felé $32,4^{\circ}$. Számítsuk ki az egyenlő szárú trapéz oldalait és szögeit!
261. Egy általános trapézből ismerjük az alapot (20 cm hosszú), az ezzel szomszédos 8 cm-es szárát, a két oldal által bezárt $54^{\circ}37'$ -es szöveget, valamint az alapon fekvő másik szöveget ($38,3^{\circ}$). Mekkora a trapéz ismeretlen oldalai?
262. Egy általános trapézből ismerjük a hosszabbik párhuzamos oldalt (48 cm hosszú), a két szárát (24 és 36 cm hosszúak), valamint az alap és a 24 cm-es oldal által bezárt szöveget, $63,8^{\circ}$. Mekkora a trapéz negyedik oldala, és mekkora az ismeretlen szögei?
263. Mekkora az általános négyszög oldalai, amelynek 18 m hosszú átlója az A csúcsonál levő szöveget 56° és 25° , a C csúcsonál levő szöveget pedig 49° és 23° részekre osztja? (56° és 49° kerüljön az egyik háromszögbe.)
264. Helyezzünk el egy a oldalú szabályos ötszögbe egy szabályos háromszöget úgy, hogy ennek egyik oldala párhuzamos legyen az ötszög egyik oldalával, és szemközti csúcsa legyen az ötszög csúcsa. Mekkora a szabályos háromszög oldala?
265. Egy a oldalú szabályos ötszögbe helyezzünk el egy négyzetet úgy, hogy ennek két oldala párhuzamos legyen az ötszög egyik oldalával. Mekkora a négyzet oldala?
266. A és B megközelíthetetlen helyek távolságát kell meghatározni. Az AB szakaszon fekvő C ponttól kiinduló 500 m hosszú CD alaptávolságot vesszük fel, lemérjük C -nél és D -nél a következő szögeket: ACD szög = $76^{\circ}30'$; ADC szög = $74^{\circ}42'$ és CDB szög = $35^{\circ}30'$. Mekkora az AB távolság?
267. Egy sziget B pontjának a folyó túlsó partján levő A pontjától való távolságát akarjuk meghatározni. A folyó innenső partján $DC = 400$ m távolságot mérünk fel úgy, hogy D pont AB egyenesbe essék. ADC szög = $84,5^{\circ}$; BCD szög = 50° ; BCA szög = $18^{\circ}35'$. Mekkora az AB távolság?
268. Egy torony magasságát (CC') kell meghatározni. A torony megközelíthetetlen, ezért a vízszintes síkban felvesszük az $AB = 100$ m hosszú

alaponalat, melynek végpontjaiból lemérjük a $C'AB = 62^\circ 12'$; $C'BA = 67^\circ 36'$ szögeket, valamint a CAC' emelkedési szöget: $48^\circ 15'$. Mekkora a torony magassága? (C' a C csúcs vetülete a vízszintes síkra.)

269. Egy hegy (CC') magasságát kell megmérnünk. A vízszintes síkban felvett alapvonal $AB = 500$ m. Ismerjük a $CAB \sphericalangle = 75^\circ 16'$, $CBA \sphericalangle = 67^\circ 48'$ és a $CAC' \sphericalangle = 15^\circ 32'$ szögeket. C' a C csúcs vetülete a vízszintes síkra. Mekkora a hegy magassága?
270. Valamely torony CC' magassága a C' talpponttal egy szinten fekvő $AB = 333,4$ m távolság végpontjaiból $C'AC = 12^\circ 5'$, illetőleg $C'BC = 6^\circ 55'$ -nyi emelkedési szög alatt látszik. Mekkora a torony magassága, ha a BAC' szög $= 103^\circ 21'$?
271. Téglalap alakú földdarab felmérése végett a téglalap egyik oldalán két pontot tűzünk ki: A -t és B -t, melyek egymástól 45 m-re vannak. C és D a téglalapnak AB -vel szemközti csúcspontjai. CAB szög $= 112^\circ$, DAB szög $= 58^\circ 35'$, CBA szög $= 60^\circ 15'$. Mekkora a földdarab területe?
272. A , B és C pontokhoz nem férhetünk hozzá. Távolságuk megmérése végett beállunk AB egyenes P pontjába, és AB -re merőleges irányban Q -ig haladunk 412 m-t úgy, hogy BQC egy egyenesre esik. Ezután tovább 590 m-t haladunk ugyanazon egyenesen R -ig, hogy ACR egy egyenesen legyen. PQB szög $= 60^\circ$; PRA szög $= 45^\circ$. Mekkora az AB , BC és CA távolságok?
273. Egy várostól észak felé 1800 m-nyire A község van, nyugat felé 2450 m-nyire B község. Milyen távol van A -tól és B -től C hely, ahová A -ból az északi úttól balra $79^\circ 55'$, B -ből a nyugati úttól jobbra $70^\circ 30'$ szög alatt egyenes út vezet?
274. Egy lefelé szűkülő csonka kúp alakú víztároló medence feneke a nap-sugarak $24^\circ 10'$ -es beesési szöge mellett éppen árnyékban van. 10° -os szög-csökkenés esetén az árnyék az oldalfalon 1 m-nyire emelkedik az alaptól, és ebben a pontban a falat a sugarak merőlegesen érik. Mekkora a medence térfogata?

A COSINUSTÉTEL ALKALMAZÁSA

275. Két egyenes vasúti pálya egymást $37^\circ 15'$ szög alatt metszi. A keresztezés-től a legközelebbi órházig a távolság az egyik pályán 135 m, a másikon 243 m. Mennyire van egymástól a két órház?
276. Egy kikötőből egyszerre indul el két hajó, az egyik 42 km/óra, a másik 36 km/óra sebességgel. Az első észak felé halad, a másik kelet-délkeleti irányban. Milyen messze lesznek egymástól 4 óra múlva?
277. Mekkora szög alatt látjuk két magányos fa távolságát olyan pontból, amely az egyik fától 250 m-nyire, a másiktól 220 m-nyire van, ha a két fa távolsága egymástól 150 m?
278. Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjaik 2 órakor 13 cm-nyire, 9 órakor 17 cm-nyire vannak egymástól?
279. Egy siktükörtől egy A pont 4 m-nyire, egy B pont 9 m-nyire van. Ha az A pontból kiinduló sugár $18^\circ 12'$ beesési szöggel esik a tükörrre, a B ponton át verődik vissza. Mekkora a két pont távolsága?
280. Milyen magas az a torony, amely a lábától egyetlenesen lefelé lejtő úton

mért 24 m távolságból $35^{\circ}50'$ s innen 28 m-rel távolabbról $19^{\circ}30'$ szög alatt látszik? Mekkora a lejtő hajlásszöge?

281. Két erő: $F_1 = 12$ kp és $F_2 = 20$ kp hat egy anyagi pontra. Az általuk bezárt szög: $\alpha = 40^{\circ}$.

Határozzuk meg az R eredő erőt és az R és F_2 erők által bezárt szöget! Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a következő adatokkal:

a) $F_1 = 353,1$ kp,	$F_2 = 142,2$ kp,	$\alpha = 55^{\circ}$;
b) $F_1 = 30$ kp,	$F_2 = 38,82$ kp,	$\alpha = 166^{\circ}19'$;
c) $F_1 = 60$ kp,	$F_2 = 100$ kp,	$\alpha = 45^{\circ}$;
d) $F_1 = 80$ kp,	$F_2 = 50$ kp,	$\alpha = 120^{\circ}$;
e) $F_1 = 250$ kp,	$F_2 = 400$ kp,	$\alpha = 144^{\circ}20'$.

282. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 24 dm és 16 dm hosszúak, az általuk bezárt szög $48^{\circ}26'$. Milyen hosszú a két átló?
283. Egy paralelogramma átlói 18 dm és 15 dm hosszúak, az általuk bezárt szög $36^{\circ}20'$. Mekkora a paralelogramma oldalai és szögei?
284. Egy paralelogramma két oldalának összege 39 m, az általuk bezárt szög $97^{\circ}54'$ és e szöggel szemben fekvő átló 30 m hosszú. Mekkora a paralelogramma oldalai?
285. Egy paralelogramma oldalai 509 cm és 221 cm hosszúak, hegyesszöge $69^{\circ}31'$. Mindegyik oldal felezőpontját a következővel kötjük össze. Számítsuk ki az így keletkezett paralelogramma oldalait és szögeit.
286. Valamely egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szára 8 cm. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a szárat az alap végpontjaiban érinti?
287. Egy háromszög két oldala 9 cm és 15 cm hosszú. A nagyobbik oldalt felező súlyvonal 12 cm hosszú. Mekkora a háromszög harmadik oldala?
288. Egy háromszögben ismert két oldal: $a = 80$ cm; $b = 100$ cm, valamint a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal: $s_c = 70$ cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?
289. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.
290. Egy háromszög két oldala 82 cm és 56 cm; az általuk bezárt szög $98^{\circ}26'$. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?
291. Adott egy háromszög két oldala és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát, és állapítsuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.
292. Adott egy háromszög három oldala. Számítsuk ki a háromszög három súlyvonalát az oldalak segítségével, és bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének a $\frac{3}{4}$ részével.
293. Egy trapéz két párhuzamos oldala 48,36 cm és 13,41 cm, az egyik szár 57,82 cm hosszú. Ennek a nagyobbik párhuzamossal bezárt szöge $68^{\circ}18'$. Mekkora a negyedik oldal és a trapéz ismeretlen szöge?
294. Egy egyenlő szárú trapéz egyik alapja 30 cm, átlója 22 cm hosszú. Az alap az átlóval $34,2^{\circ}$ -os szöget zár be. Mekkora a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?
295. Egy trapéz két párhuzamos oldala 100 cm és 52,8 cm, a szárai 71,3 cm és 65,4 cm hosszúak. Mekkora a trapéz szögei?

296. Egy konvex általános négyszög oldalai sorban 7 cm, 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. A 6 cm-es és 7 cm-es oldalai által bezárt szög $41^\circ 54'$. Számítsuk ki a négyszög ismeretlen szögeit!
297. Egy konvex általános négyszög két szomszédos oldala 4 és 5 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 140° . A 4 cm-es oldalon fekvő másik szög 100° , az 5 cm-es oldalon fekvő másik szög 80° . Mekkora a négyszög ismeretlen oldalai?
298. Egy konkáv négyszög oldalai sorban 3 cm, 4 cm, 5 cm, 4,8 cm hosszúak. A 3 cm-es és 4 cm-es oldalak által bezárt szög $196^\circ 16'$. Számítsuk ki a négyszög ismeretlen szögeit.
299. Egy $ABCD$ konkáv négyszög BD átlója 20 cm hosszú. ABD szög = 120° ; DBC szög = 90° ; ADB szög = 30° ; BDC szög = 35° . Mekkora az AC átló?
300. Egy általános négyszög oldalai: $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7,5$ cm és $d = 6$ cm hosszú. Az a és b oldalak által bezárt szög egyenlő a c és d oldalak által bezárt szöggel. Mekkora a négyszög szögei?
301. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: $a = 33$ cm, $b = 56$ cm, $c = 16$ cm, $d = 63$ cm hosszú. Mekkora a négyszög szögei, és milyen négyszögről van szó?
302. Egy húrnégyszög oldalai: $a = 38,9$ cm, $b = 22$ cm, $c = 43$ cm, $d = 30$ cm hosszú. Mekkora a húrnégyszög szögei?
303. Egy általános négyszög három egymás utáni oldala 10 cm, 7 cm és 5 cm hosszú. Az első két oldal közötti szög $87^\circ 24'$; a második és harmadik oldala közötti szög $65^\circ 18'$. Mekkora a negyedik oldal és a másik két szög?
304. Egy trapéz 25 cm hosszú átlója a párhuzamos oldalakkal 40° -os szöget, a nem párhuzamos oldalakkal 90° -os és 80° -os szöget zár be. Milyen hosszú a másik átló?
305. Sík mezőn kitűzünk három pontot. $AB = 187,5$ m, $AC = 270$ m, $BC = 152$ m. Milyen távol van a BC meghosszabbításán levő C -n túli D pont a B ponttól, ha ADB szög $32,2^\circ$?
306. Sík területen két ágyú működését figyeljük. A hang az egyikből 18 sec, a másikkól 14 sec alatt ér hozzánk. A hang terjedési sebessége 340 m/sec. Szögmérő műszerünk nincs. Ezért a két ágyú irányában kitűzünk egy-egy pőznát tőlünk 160–160 m távolságban. A két pőzna távolsága 300 m. Milyen messze van a 2 ágyú egymástól?
307. AB távolságot kell meghatározunk. Ezért kitűzünk egy C pontot, ahonnan a keresett távolságot 60° -os szög alatt látjuk. A szög felezőjén 100 m-t közeledünk a megméréndő távolsághoz. Innen az A pontba mutató irány 120° -os szöget, a B pontba mutató irány derékszöget alkot az általunk megtett úttal. Mekkora az AB távolság?
308. Egy egyenes útból $35^\circ 48'$ szög alatt balra mellékút ágazik el, 20 km-rel messzebről egy másik mellékút jobbra ágazik el 30° -os szög alatt. Az elsőt 40 km-t, a másodikon 25 km-t haladva egy-egy községbe érünk. Milyen messze van a két község egymástól?
309. Két járőr haladt egy egyenes műút mentén. 7 órakor az egyik járőr balra eltért a műúttól 35° -os szöget alkotó dűlőútra. A másik járőr 8 óra 30 percig tovább ment az egyenes műúton, ekkor letért jobbra a műúttól $47^\circ 30'$ -nyi szöget alkotó egyenes dűlőútra. Milyen messze lesznek egymástól 10 órakor, ha a műúton 5 km/óra, a dűlőúton csak 3,5 km/óra sebességgel haladtak?

310. Valamely főút A pontjából jobbra $\alpha = 38^\circ 23'$ szög alatt elágazik egy út, és egyenesen a C hídfőhöz vezet. A főútnak egy 5,3 km-rel tovább fekvő B pontjából jobbra ágazik egy út, amelyen egyenesen 6 km-t megtéve, ugyancsak a C hídfőhöz érünk, míg a B pontból $48^\circ 21'$ szög alatt balra elágazó egyenes úton 7 km-t haladva, eljutunk egy D hídfőhöz. A két híd alatt ugyanaz a folyó folyik, amelynek medre C és D között egy 9 km sugarú körívet alkot. Az A pontból elindult reggel 3 óra 48 perckor egy szakasz gyalogság a C híd felé 6 km/óra sebességgel, hogy onnan vízi úton folytassa útját 10 km/óra sebességgel a D hídfőhöz. Hány órákor kell indulnia A -ból annak a csapatnak, amely 5 km/óra sebességgel haladva, B -n át egyszerre érkezik az első csapattal a D hídfőhöz?
311. A terep A , B , C pontját az adott sorrendben vasútvonallal akarjuk összekötni. Az ABC háromszög oldalai: $AB = 5$ km, $BC = 8,8$ km, $CA = 12$ km. A pályát egyenesen vezetjük A -ból kiindulva B -n át a B ponton túl 1 km-nyire fekvő D pontig, ahol egy körívből álló kanyar kezdődik. Ez után olyan egyenes pálya vezet C -be, amely a BA iránnyal 105° -os szöget zár be. Mekkora az AC pálya hossza? (Szerkesszük meg a pályatestet 1:100 000 kicsinyítésben.)
312. AB távolság meghatározása végett $CD = 300$ m alaptávolságot vesszük fel úgy, hogy C az AB egyik oldalán, D a másik oldalán legyen. ACD szög = $33,6^\circ$, DCB szög = $51^\circ 21'$, ADC szög = $43^\circ 52'$, CDB szög = $46^\circ 8'$. Mekkora az AB távolság?
313. Alagutat kell építeni A és B pontok között. A domborzati viszonyok megengedik a következő vízszintes távolságok és látószögek lemérését: $AD = 600$ m, $DC = 250$ m, $CB = 1346$ m. ADC szög = 90° , DCB szög = $138^\circ 52'$.
- a) Milyen hosszú lesz az alagút?
- b) Határozzuk meg B pontra nézve a fúrás irányát CBA szög kiszámításával.
314. Egy turistatársaság A helyről észak felé indul el, és 48 km megtétele után B -be érkezik. Innen nyugat felé folytatja útját. 20 km megtétele után C -be érkezik, ahol a menetiránytól balra tér el, és a C -től 107,7 km-re levő D helyre ér. BCD szög = $138^\circ 52'$. Milyen távol van légvonalban D hely a kiindulás A helyétől?
315. Ferde torony csúcsa hajlásának irányában talpától 20 m-nyire 76° szög alatt, ellenkező irányban 20 m-ről 72° szög alatt látszik. Hány fokkal dől el a torony, és milyen magas?
316. 500 m magas hegy csúcsáról két tengeri kikötő látszólagos távolsága $72^\circ 18'$; a két kikötő depressziószöge $6^\circ 42'$ és $7^\circ 30'$. Milyen messze van a két kikötő egymástól?
317. Egy hegycsúcs ismeretlen magasságának meghatározásához megmérjük D -ből egy $AB = 350$ m hosszú vízszintes útszakasz két végpontjához tartozó 65° és 72° -os depressziószögeket, valamint az AC és BC egyeneseken áthaladó függőleges síkok hajlásszögét: $44,2^\circ$. Milyen magas van a hegycsúcs?
318. Egy hegy magasságának meghatározása végett egy folyó egyenes partján A , B és C pontokat úgy vesszük fel, hogy $AB = 50$ m, $BC = 50$ m. E pontokból a hegy csúcsa rendre 30° , 45° , 60° -os szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

319. Az M és N tereppontok távolsága közvetlenül nem mérhető meg. Ezért kitűztük az $AM = 54$ m, $BM = 60$ m távolságokat, amelyek egy egyenesbe esnek, továbbá megmérjük az MAN szög $= 130^\circ$ és MBN szög $= 109^\circ$ -os szögeket. Mekkora az M és N tereppontok távolsága? (A , B az M ugyanazon oldalán vannak.)
320. Valamely folyó tulsó partján két tereptárgy egymástól való távolságát: AB -t kell meghatározni, de a folyón nem kelhetünk át. A folyó innenső partján felvesszük a $CD = 350$ m távolságot. Ezután lemérjük az ACD szög $= 87,3^\circ$, BCD szög $= 38^\circ$, ADC szög $= 26^\circ$ és BDC szög $= 69,7^\circ$ látószögeket. Mekkora a keresett AB távolság?
321. A CD távolságot nem tudjuk közvetlenül megmérni. Ismerjük azonban az AB egyeneszakasz hosszát: 267,4 m. Megmérjük a következő szögeket: ACD szög $= 87,3^\circ$. BCD szög $= 38^\circ$, ADC szög $= 26^\circ$ és BDC szög $= 69,7^\circ$. Számítsuk ki az adatokból a keresett távolságot!
322. Rajzoljunk egy hegyesszögű háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket. Területátalakítással igazolható, hogy az a és b oldalú négyzetekből az m_a , illetve m_b meghosszabbítása által a c oldal felé eső levágott két téglalap területének összege egyenlő a c oldal fölé rajzolt négyzet területével. Ezen egyenlőség alapján vezessük le a cosinustételt! Hogyan módosul a probléma tompaszögű háromszögben?

VEGYES FELADATOK SINUS- ÉS COSINUSTÉTELRE

323. Egy általános háromszögben $a:b = 1:16$, $m_c = 11,62$ cm, $\sin \beta = 0,4841$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
324. Egy háromszög kerülete 598 cm; $a = 258$ cm; $\alpha = 98^\circ 33'$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
325. Egy általános háromszögben $a^2 + b^2 = 6514$; $ab = 3015$; $\gamma = 67^\circ 45'$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
326. Egy háromszög egyik oldala 5 cm; a másik két oldal összege 8 cm, és az 5 cm-es oldallal szemben levő szög 60° . Mekkora a másik két szög? Mekkora az ismeretlen oldalak?
327. Egy háromszög egyik oldala 6 cm; a másik két oldal különbsége 4 cm, és a 6 cm-es oldallal szemközti szög 75° -os. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
328. Egy háromszög egyik oldala 10 cm hosszú. Az ezzel az oldallal szemközti szög $28^\circ 56'$. A másik két oldal négyzetének összege 625 cm². Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
329. Egy háromszögben $a + b = 122$ cm; $c = 76$ cm; $\gamma = 64^\circ 52'$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
330. Legyen egy háromszög egyik szöge $118^\circ 24'$. A szög csúcsából kiinduló 5 és 7 cm hosszú távolságok az adott szöveget három egyenlő részre osztják. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
331. Valamely háromszögben $c = 4$ dm; $\gamma = 41^\circ 44'$; $s_c = 5$ dm. Mekkora az ismeretlen oldalak és szögek?
332. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: $c = 21$ cm; $\gamma = 75^\circ 45'$; $s_c = 13,2$ cm.
333. Egy általános háromszögben az egyik oldal 34 cm; a hozzá tartozó súly-

- vonal 18,2 cm; az egyik rajta fekvő szöge $32^{\circ}25'$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
334. Egy háromszögben az egyik oldalhoz tartozó magasság 6,5 cm; az ugyanazon oldalhoz tartozó súlyvonal ezen oldallal 60° -os szöget zár be; végül egy másik súlyvonal ugyanezzel az oldallal 30° -os szöget alkot. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
335. Egy háromszög két oldala 45 cm és 60 cm hosszú, a köztük levő szög felezője 30 cm hosszú. Mekkora a háromszög ismeretlen oldala, és mekkora a háromszög szögei?
336. Egy háromszög egyik oldala 18 cm. A hozzátartozó magasság a szemközti szöget $20^{\circ}33'$ és 36° -os szögekre bontja. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
337. Egy háromszögben az egyik szög $\alpha = 12^{\circ}24'$; egy másik szöggel szemközti oldalhoz tartozó súlyvonal $s_b = 81,25$ cm; a b -nek c oldalra való vetülete 136 cm. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
338. Egy háromszögben $\alpha = 59^{\circ}29'$, az α szögfelezője a szemközti a oldalt 48 cm-es és 38 cm-es részekre osztja. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
339. Egy háromszög köré írt kör sugara 16,25 cm; két oldalának összege 54 cm, ugyanezen két oldal által közbezárt szög $67^{\circ}23'$. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
340. Egy háromszög oldalai 15; 20 és 7 cm hosszúak. Mekkora az első oldalhoz tartozó körszelet területe a háromszög köré írt körben?
341. Egy háromszög egyik oldala 65 cm, másik két oldalának különbsége 14 cm, a beírt kör sugara 16,2 cm. Mekkora az ismeretlen oldalak és a háromszög szögei?
342. Egy háromszög köré írt kör sugara 34 cm, egyik szöge $40^{\circ}6'$, az adott szöget közbezáró oldalakhoz tartozó magasságok összege 81,5 cm. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
343. Egy háromszög két oldalának összege 60 cm; ugyanazon oldalakhoz tartozó magasságok összege 48 cm, a harmadik oldala 32 cm. Mekkora az ismeretlen oldalak, valamint a háromszög szögei?
344. Egy háromszög két oldalának különbsége 11 cm; az ugyanezen oldalakhoz tartozó magasságok összege 390 cm; a harmadik oldallal szemközti szög $36^{\circ}52'$. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
345. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{3}{2}$. Mekkora a háromszög szögei?
346. Legyen egy háromszög egyik oldala (a) 41 m, a másik (b) 85 m; a harmadik oldalhoz tartozó magasság az oldalt két olyan részre osztja, hogy az egyik rész a másik rész hatszorosánál 21 m-rel nagyobb. Mekkora a harmadik oldal, és mekkora a háromszög szögei?
347. Egy körben az egy pontból kiinduló 20 és 26 cm hosszú húrok $36^{\circ}38'$ -nyi szöget zárnak be. Mekkora a kör sugara?
348. Három, egymást kívülről érintő kör közé zárt területet kell meghatározunk, ha a körök sugarai 4 cm, 9 cm és 36 cm hosszúak.
349. Egy háromszög oldalai 24 cm, 22 cm, 28 cm hosszúak. A csúcsok körül egymást érintő köröket rajzolunk, és az így keletkezett körcikket kivágjuk. Mekkora terület marad?

350. Egy általános háromszög oldalai x^2+x+1 ; $2x+1$ és x^2-1 . Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb szöge 120° -os!
351. Van-e olyan háromszög, melynek szögei számtani, oldalai pedig mértani sorozatot alkotnak?
352. ABC háromszögben $AB = 2 \cdot AC$. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt $\frac{1}{3}$ -ával C -n túl, így kapjuk a D pontot. Bizonyítsuk be, hogy $AD = 2CD$.
353. Bizonyítsuk be, hogyha egy négyszög szemközti oldalainak négyzetösszege egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, akkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

TERÜLETSZÁMÍTÁSI FELADATOK

354. Egy háromszög két oldala 13,2 cm és 28,5 cm hosszú. Az általuk bezárt szög $65,2^\circ$. Mekkora a háromszög területe?
Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a következő adatokkal:
- a) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm, $\gamma = 49^\circ 28'$;
b) $a = 398$ m, $b = 1456$ m, $\gamma = 75,4^\circ$;
c) $a = 47$ cm, $b = 21,8$ cm, $\gamma = 57,4^\circ$.
355. Három oldalú ferde hasáb két alapéle 13 cm és 18 cm hosszú, az általuk közbezárt szög 68° . A 32 cm hosszú oldalél az alap síkjához $53,5^\circ$ -os szög alatt hajlik. Mekkora a hasáb térfogata?
356. Bizonyítsuk be, hogy adott oldalú négyszögek közül a húrnégyszög területe a legnagyobb!
357. Egy háromszögben adott egy oldal és két szög, hogyan számíthatjuk ki a háromszög területét? Fejezzük ki szavakban az eredményt. Legyen $a = 16$ cm; $\beta = 68^\circ$; $\gamma = 53^\circ$; $t = ?$
358. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek egyik oldala 26,4 cm hosszú, az adott oldalon fekvő egyik szög 100° , az oldallal szemközti szöge pedig 38° ?
359. Osszuk fel az 1 m sugarú kör kerületét 1:2:3 arányban. Kössük össze az osztáspontokat, és számítsuk ki az így keletkezett háromszög területét!
360. Osszuk fel egy kör kerületét 1:2:3:4 arányban. Kössük össze az osztáspontokat, és számítsuk ki az így keletkezett húrnégyszög területét, ha $r = 12$ cm!
361. Egy paralelogramma két oldala 14 cm és 16 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 53° . Mekkora a paralelogramma területe?
362. Egy rombusz oldalai 12 cm hosszúak, hegyesszöge 80° . Mekkora a területe?
363. Egy paralelogramma két átlója 32,5 cm és 43,8 cm; az általuk bezárt hegyesszög 62° . Mekkora a paralelogramma területe?
364. Oldjuk meg általánosan az előbbi feladatot.
365. Egy háromszög két súlyvonala 6 cm és 9 cm hosszú. Az általuk bezárt hegyesszög 72° . Mekkora a háromszög területe?
366. Az ABC háromszögben: $c = 4$ cm; $b = 12$ cm. A c oldalon A -tól 3 cm-nyire kitévű a P pontot. Határozzuk meg b oldalnak azt a pontját (X), amelyet P ponttal összekötve, a húzott szakasz: XP felezi a háromszög területét!

367. Az ABC háromszög három oldala: $a = 8$ cm; $b = 15$ cm; $c = 9,6$ cm hosszú. A C csúctól milyen messze jelöljük ki az a és b oldalon azt a két pontot, melyeket egy egyenessel összekötve, a keletkezett két rész kerülete és területe is egyenlő?
368. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex, konkáv (de nem hurkolt) négyszög területe egyenlő az átlók és az általuk bezárt szög sinusának félszorzatával! Legyen $e = 64$ dm; $f = 50$ dm; az általuk bezárt szög $68^\circ 35'$; $t = ?$
369. Négyszög alakú tér négy oldala rendre 610 m; 320 m; 580 m és 470 m. Az első két oldal által bezárt szög $76,8^\circ$. Mekkora a négyszög területe?
370. Határozzuk meg az 1 m sugarú körbe rajzolt szabályos ötágú csillag területét!
371. Egy park kör alakú területén ötágú csillag alakú területet virággal ültetnek be, a kimaradt részeket pedig fűvel. Mekkora a fűvel bevetett terület, ha a kör sugara 5 m?
372. Egy szabályos hatszög területe 900 cm². Osszuk minden oldalát három-három egyenlő részre, és kössük össze páronként az egy csúcshoz legközelebb eső két-két osztópontot. Mekkora az így keletkező tizenkészsög területe?
373. Háromszög alakú beültetett terület nagysága 9,51 ha. Két oldala 320 m és 610 m hosszú. Mekkora a harmadik oldala, valamint a szögei?
374. Valamely háromszög területe 715 m². Egyik oldala 53,4 m, és az ezen az oldalon fekvő egyik szöge $38,8^\circ$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
375. Egy háromszög területe 4920 cm². Két szöge $43^\circ 36'$ és $72^\circ 23'$. Mekkora a háromszög oldalai?
376. Egy háromszög területe $9,92$ cm². Egyik oldala 4 cm; kerülete 15 cm. Mekkora a háromszög szögei és ismeretlen oldalai?
377. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal:
 $t = 24$ cm², $2s = 32$ cm, $a = 15$ cm.
378. Egy szabályos hatszög területe egyenlő egy olyan háromszög területével, melynek alapja 11,8 cm hosszú, s a rajta fekvő szögek $50^\circ 28'$ és $47^\circ 56'$ -nyi nagyságúak. Mekkora a hatszög oldala?
379. Valamely háromszögben két oldal aránya: 2:3, az általuk bezárt szög 30° . A háromszög területe $337,5$ cm². Mekkora a háromszög oldalai?
380. Egy háromszög oldalainak aránya: 3:4:5. A háromszög területe 96 m². Milyen háromszögről van szó?
381. Egy háromszög két oldalának összege 75 cm, az általuk bezárt szög 30° . A háromszög területe $337,5$ cm². Mekkora a háromszög oldalai?
382. Egy háromszög két oldalának különbsége 2 cm; az általuk bezárt szög 38° . A háromszög területe 16 cm². Mekkora a háromszög oldalai?
383. Egy háromszögben két oldal négyzetének összege 881 dm², a két oldal által bezárt szög $71,8^\circ$ és a háromszög területe 190 dm². Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
384. Egy háromszög területe 84 cm². Egyik oldala 15 cm, a másik két oldal négyzetének összege 365 dm². Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai?
385. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 1. A háromszög területe úgy aránylik egy vele egyenlő kerületű szabályos háromszög területéhez, mint 3:5. Mekkora a háromszög oldalai és legnagyobb szöge?