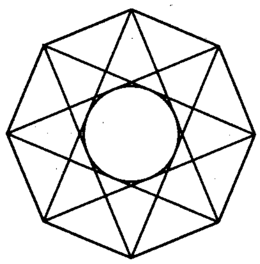
Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2013
Feladatok 11-12. osztályosok részére

3 pontos feladatok

1. Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb?
A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 201^3 E) $20 \cdot 13$

2. Egy szabályos nyolcszög oldalai 10 cm hosszúak. A nyolcszög minden csúcsából behúzunk két átlót az ábrának megfelelően, majd megszerkesztjük az ezen átlók által meghatározott kis nyolcszög beírt körét. Hány cm hosszú ennek a körnek a sugara?
A) 2 B) 2,5 C) 5
D) 7,5 E) 10



3. Hány éle van annak a hasábnak, amelyiknek 2013 lapja van?
A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

4. Mennyi a harmadik gyöke a következő számnak: 3^{3^3}? (Jelölés: $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$.)
A) 3^3 B) 3^{3^3-1} C) 3^{2^3} D) 3^{3^2} E) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$.

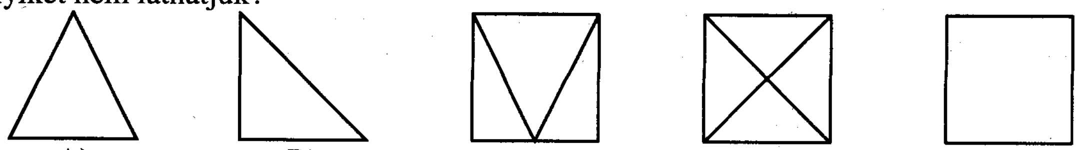
5. A 2013 évszám rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy számjegyei valamilyen sorrendben egymást követő egész számok: 0, 1, 2, 3. Utoljára hány évvel 2013 előtt rendelkezett az évszám ugyanezzel a tulajdonsággal?
A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 990

6. Az elsőfokú f függvényről tudjuk, hogy $f(2013) - f(2001) = 100$. Mennyi a következő különbség értéke: $f(2031) - f(2013)$?
A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

7. Tudjuk, hogy $2 < x < 3$. A következő állítások közül hány igaz biztosan?
$4 < x^2 < 9$ $4 < 2x < 6$ $6 < 3x < 9$ $0 < x^2 - 2x < 3$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Az esti filmben hat szuperhős összesen húsz gazembert kapott el. Az első szuperhős egyet fogott el, a második kettőt, a harmadik pedig hármat. A negyedik többet fogott el, mint a többiek közül bármelyik. Legalább hány gazembert csípett nyakon a negyedik szuperhős?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9. Egy fakockából kifaragtunk egy négyzet alapú gúlát, melynek alapja a kocka egyik lapja, ötödik csúcsa pedig a kocka alappal párhuzamos egyik élének felezőpontja. Ha a gúlára ránézünk az eredeti kocka valamelyik lapjára merőleges irányból, akkor az alábbiak közül melyiket nem láthatjuk?



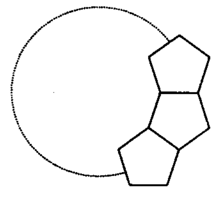
A) B) C) D) E)

10. Az alábbi $(x;y)$ számpárok közül melyikre teljesül a $3x^2-61\geq 11xy-3y^2$ egyenlőtlenség?

A) $(+5;+1)$ B) $(+7;+7)$ C) $(-7;-7)$ D) $(+1;+5)$ E) $(+10;+2)$

4 pontos feladatok

11. Robi egybevágó, szabályos ötszög alakú lapokat rakott egymás mellé egy körvonal mentén, az ábrán látható módon illesztve őket egymáshoz. Összesen hány darab ötszöget használt fel, ha végül zárult a kör?



A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 15

12. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek egyharmada is és háromszorosa is háromjegyű egész szám?

A) 12 B) 33 C) 34 D) 100 E) 300

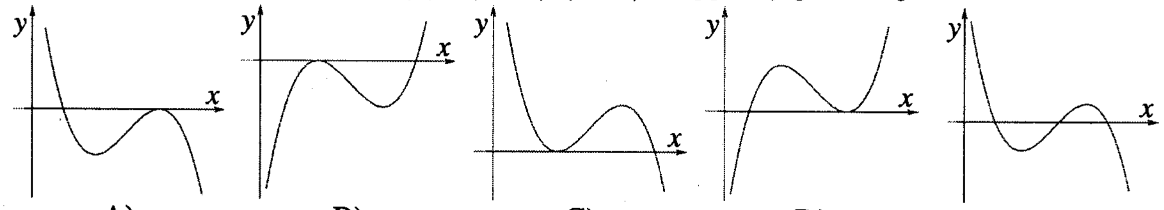
13. Hány számjegy van a tizedesvessző után az $\dfrac{1}{25600}$ szám tizedestört alakjában az utolsó értékes jeggyel bezárólag?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

14. Feldobtunk 4 darab 100 forintos és 3 darab 200 forintos pénzérmét, majd megnéztük, melyikkel dobtunk fejet és melyikkel írást. Pista a következőt mondta erről: „Minden 100 forintossal fejet dobtunk." Kiderült, hogy Pista állítása hamis. Mire következtethetünk ebből?

A) Minden 100 forintossal írást dobtunk.
B) Minden 200 forintossal fejet dobtunk.
C) Minden 200 forintossal írást dobtunk.
D) Van olyan 100 forintos, amivel írást dobtunk.
E) Van olyan 200 forintos, amivel fejet dobtunk.

15. Az alábbiak közül melyik az $f(x)=(a-x)\cdot(b-x)^2$ függvény grafikonja, ha $a<b$?

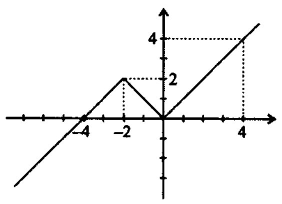


A) B) C) D) E)

16. Egy téglalap egyik oldala 5 cm. Hányféle értéket vehet fel a másik oldal hossza, ha a téglalapot szét lehet vágni egy négyzetre és egy téglalapra úgy, hogy a két darab közül az egyiknek a területe 4 cm^2 legyen?

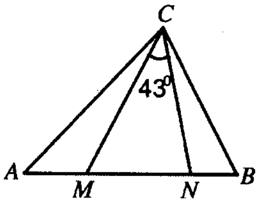
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. Az f függvény grafikonja egy szakaszból és két félegyenesből áll, az ábrán látható módon. Hány megoldása van az $f(f(f(x)))=0$ egyenletnek?



A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

18. Az ABC háromszög AB oldalán úgy vettük fel az M és az N pontot, hogy $AN = AC$ és $BM = BC$. Tudjuk még, hogy az $MCN\angle = 43°$. Hány fokos az $ACB\angle$?



A) 86 B) 89 C) 90
D) 92 E) 94

19. Hány pozitív egészekből álló $(x; y)$ számpár teszi igazzá az $x^2y^3 = 6^{12}$ egyenletet?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) más érték

20. A valós számok halmazán értelmezett f függvény hozzárendelési szabálya a $[-2;+3[$ intervallumon $f(x) = x^2$. Tudjuk még, hogy az f függvény periodikus és periódusa 5. Mennyi az $f(2013)$ értéke?

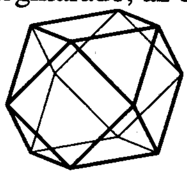
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

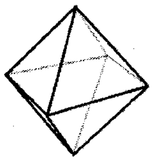
5 pontos feladatok

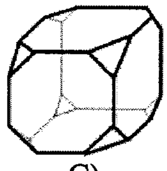
21. A háromjegyű pozitív egész számokat felírtuk egy-egy cédulára, majd a 900 cédulát beletettük egy dobozba. Legalább hány cédulát kell behunyt szemmel kihúznunk a dobozból, hogy a kihúzottak között biztosan legyen legalább három olyan, amelyen ugyanannyi a számjegyek összege?

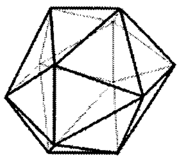
A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

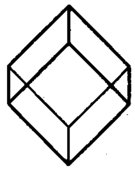
22. Vegyük egy kocka egyik csúcsát, majd keressük meg az ezzel élben szomszédos három csúcsát! Ez a három csúcs meghatároz egy síkot. A kockához ilyen módon összesen nyolc sík rendelhető hozzá. Vágjuk el a kockát mind a nyolc ilyen sík mentén! Hogyan néz ki a megmaradó, az eredeti kocka középpontját tartalmazó test?


A)


B)


C)


D)


E)

23. Hány $(x; y)$ valós számpár teszi igazzá az $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ egyenletet?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 7-nél több

24. Egy sorozatról a következőket tudjuk: $a_1 = 1$ és $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ minden m, n pozitív egész számra. Mennyi az a_{100} értéke?

A) 100 B) 1000 C) 2013 D) 4950 E) 5050

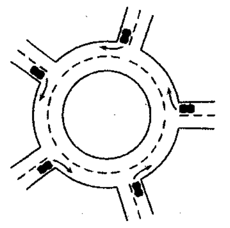
25. Egy iskola 2013 tanulója felállt egymás mögött egy oszlopban. Ezután a hátul álló gyereknek megsúgtak egy természetes számot. Mindenki azt az utasítást kapta, hogy ha egy páros számot súgnak neki, akkor súgja meg az előtte állónak a hallott szám felét, ha pedig páratlan számot súgnak neki, akkor vonjon ki belőle egyet, és az így kapott szám felét súgja az előtte álló fülébe. A sor elején állót arra kérték, hogy azt a számot, amit ő súgna az előtte álló fülébe, ha lenne ott valaki, hangosan mondja meg. A sor elején álló hangosan az 1-es számot mondta. Hányféle számot súghattak a hátul álló fülébe?

A) 0 B) 2013 C) 4026 D) 2^{2012} E) 2^{2013}

26. Adott a síkon néhány egyenes. Közülük az a egyenes 3 másikat metsz, a b egyenes 4 másikat, a c egyenes pedig n másikat, ahol $n \neq 3$ és $n \neq 4$. Hány egyenes adott a síkon?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Több lehetőség is van.

27. Egy körforgalomba öt út torkollik. Mindegyik irányból behajt egy autó a körforgalomba, majd mielőtt körbeérne, valamelyik másik úton távozik belőle. Mindegyik irányba csak egy autó távozik. Hányféleképpen lehetséges ez?



A) 24 B) 44 C) 60

D) 81 E) 120

28. Amikor Béni ki akarta számolni az $1+2+3+4+5+...+2012$ összeget (az első 2012 pozitív egész szám összegét), véletlenül kihagyott néhány összeadandót, így egy olyan számot kapott eredményül, amely osztható 2011-gyel. Amikor Frédi az $S=1+2+3+...+2012+2013$ összeget (az első 2013 pozitív egész szám összegét) akarta kiszámolni, akkor pontosan ugyanazokat az összeadandókat hagyta ki, amiket Béni, így eredményül a 2014-gyel osztható T számot kapta. Az alábbiak közül melyik lehet a $\frac{T}{S}$ hányados értéke?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{670}{671}$ C) $\frac{6}{11}$ D) $\frac{2012}{2013}$ E) egyik sem

29. Adott a síkon egy szabályos 13 oldalú sokszög. Tekintsük azokat a háromszögeket, melyeknek a csúcsai a szabályos 13 oldalú sokszög csúcsai közül kerülnek ki! Ezek közül a háromszögek közül hány hegyesszögű?

A) 72 B) 85 C) 91 D) 100 E) más érték

30. Egy szigeten csak tündérek és boszorkányok éltek. A tündérek mindig igazat mondtak, a boszorkányok mindig hazudtak. Egyik hétfő reggel a szigetre érkezett egy nyomozó. A délelőtti órákban mindegyik szigetlakóhoz odament, rámutatott egy másik szigetlakóra, majd megkérdezte: „Ő boszorkány?" Mindenkire csak egyszer mutatott rá. Akire a megkérdezett honfitársa azt mondta, hogy igen, ő boszorkány, azt az összes kérdés és az összes válasz elhangzása után letartóztatta és az első hajóval száműzte a szigetről. Másnap, kedden, azok a tündérek, akiknek a válasza miatt valakit száműztek, bűntudatot éreztek és ezért ők is elhagyták a szigetet. Így kedden harmadannyi tündér hagyta el a szigetet, mint ahányat hétfőn száműztek. Az összes szigetről távozó hányad része volt tündér?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{8}{11}$

Összeállította: Erdős Gábor
Lektorálta: Deli Lajos
Ötletek, feladatjavaslatok: „KSF International Annual Meeting 2012" résztvevői, Protaras, Ciprus
A verseny főszervezője: Pintér Ferenc - Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány
cím: 8800 Nagykanizsa, Zrínyi u. 18.
telefon: (93) 502903 e-mail: info@zalamat.hu honlap: www.zalamat.hu