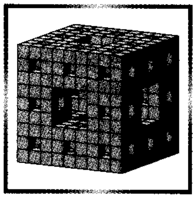
# A B pontversenyben kitűzött feladatok (4582–4591.)



**B. 4582.** Jelölje $d(n)$ az $n$ pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát. Határozzuk meg azokat az $n$ számokat, amelyekre

$$d(n^3) = 5 \cdot d(n).$$

(*3 pont*) Javasolta: *Di Giovanni Márk* (Győr, Révai Miklós Gimnázium)

**B. 4583.** Az $AB$ szakaszon adottak a $D$- és $E$ pontok. Az $AD$, $DB$, $AE$ és $EB$ szakaszokra ugyanabban a félsíkban emelt szabályos háromszögek harmadik csúcsai rendre $F$, $G$, $H$ és $I$. Igazoljuk, hogy ha az $FI$ és $GH$ egyenesek nem párhuzamosak, akkor metszéspontjuk rajta van az $AB$ egyenesen.

(*3 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

**B. 4584.** Egy parallelogramma két átellenes csúcsán át fektessünk egy-egy olyan egyenest, amelyek a parallelogramma oldalainak meghosszabbításait két-két pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy metszéspont egy trapéz négy csúcsa.

(*4 pont*) Javasolta: *Moussong Gábor* (Budapest)

**B. 4585.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5 \geqslant 0$, akkor

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant \frac{25}{2}\left(x_4^2 + x_5^2\right).$$

Mi az egyenlőség feltétele?

(*3 pont*) Javasolta: *Erben Péter* és *Pataki János* (Budapest)

**B. 4586.** A $K$, $L$ és $M$ az $ABC$ háromszög $AB$, $AC$ és $BC$ oldalának olyan pontjai, melyekre $KL$ párhuzamos $BC$-vel, továbbá $KL = LC$ és $LMB\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Igazoljuk, hogy $LM = AK$.

(*4 pont*) (Kvant)

**B. 4587.** Oldjuk meg a $4^x - 3^x = \operatorname{tg} 15°$ egyenletet.

(*3 pont*)

**B. 4588.** Adott az $ABC$ háromszög belsejében a $D$ pont. A $CD$, $AD$ és $BD$ egyenesek az $AB$, $BC$ és $CA$ oldalakat rendre az $E$, $F$ és $G$ pontokban metszik. Az $EG$ és $AF$ egyenesek metszéspontja $H$, az $EF$ és $BG$ egyenesek metszéspontja pedig $I$. Mutassuk meg, hogy az $AB$, $FG$ és $HI$ egyenesek egy pontban metszik egymást.

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

**B. 4589.** Létezik-e olyan $n$ természetes szám, amelyre az $1^{10}, 2^{10}, \ldots, n^{10}$ számok 10 csoportba oszthatók úgy, hogy mindegyik csoportban a tagok összege ugyanannyi?

*(6 pont)*

**B. 4590.** Adott a gömbfelületen két pont, valamint a $k$ körvonal, ami a két pont közül pontosan az egyiken megy át. Hány olyan kör van a gömbön, amely mindkét ponton átmegy és érinti $k$-t?

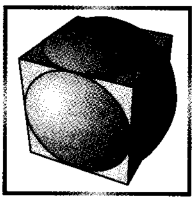
*(5 pont)*

**B. 4591.** Legyen $\alpha$ irracionális szám. Minden $q$ pozitív egészre legyen $N_q(\alpha) = \min\left\{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : p \in \mathbb{Z}\right\}$, vagyis a legközelebbi olyan törttől való távolság, amely felírható $q$ nevezővel (nem feltétlenül redukált alakban). Mutassuk meg, hogy létezik olyan $k$, amelyre

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) > 1.$$

*(6 pont)* Javasolta: *Maga Péter* (Budapest)

**Beküldési határidő: 2014. január 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**



## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (602–604.)

**A. 602.** Legyen $ABC$ nem szabályos háromszög. Tekintsük az olyan $XYZ$ szabályos háromszögeket, amelyek $X$ csúcsa a $BC$ egyenesen, $Y$ csúcsa az $AC$ egyenesen, $Z$ csúcsa pedig az $AB$ egyenesen van. Mutassuk meg, hogy az ilyen $XYZ$ háromszögek középpontjainak mértani helye egy párhuzamos egyenespár, ami merőleges az $ABC$ háromszög Euler-egyenesére.

Javasolta: *Hraskó András* (Budapest)

**A. 603.** Legyen $\alpha$ valós szám. Minden $q$ pozitív egészre legyen $N_q(\alpha) = \min\left\{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : p \in \mathbb{Z}\right\}$, vagyis a legközelebbi olyan törttől való távolság, amely felírható $q$ nevezővel (nem feltétlenül redukált alakban). Mutassuk meg, hogy az

$$a_k = \frac{1}{\log k} \sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha)$$

sorozat konvergens.