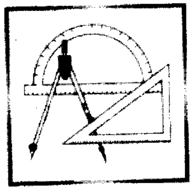


A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1135–1139.)

C. 1135. Az iskolai matematika verseny döntőjébe Aladár (A), Béla (B), Cecília (C), Diána (D), Elemér (E) és Franciska (F) jutott be. Az első feladat kijavítása után a szervező így szólt: „3 versenyzőnek van 10 pontja, a többinek 7. Mindenki tippelje meg, hogy mely versenyzők kaptak tíz pontot!" A versenyzők az alábbi tippeket adták be: A, B, D; A, C, E; A, D, E; B, C, E; B, D, E; C, D, E. A szervező közölte, hogy senki sem találta el mindhárom tízpontost. A tippelők közül hárman kettőt-kettőt, ketten egyet-egyet, egy pedig egyet sem talált el. Mely versenyzők kaptak tíz pontot?

C. 1136. Az ABC háromszög magasságpontja M, az AB oldal felezőpontja F, az A csúcsból induló magasság talppontja T. Tudjuk, hogy $MF=4$, $TM=5$, $TF=6$. Szerkesszük meg az ABC háromszöget.

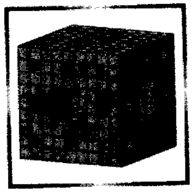
C. 1137. A Fibonacci sorozat első két tagja: $a_1=1$, $a_2=1$ és minden további tagja egyenlő az előtte álló két tag összegével, azaz $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 3)$. Bizonyítsuk be, hogy nincs a sorozatnak olyan tagja, amely 13-mal osztva 4 maradékot ad.

C. 1138. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{4-x(4-x)}-\sqrt{4-x}=4.$$

C. 1139. Legalább mekkora átfogójú az a derékszögű háromszög, amelynek kerülete k?

Beküldési határidő: 2012. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4472–4481.)

B. 4472. Bizonyítsuk be, hogy hét egymást követő egész szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám.

(*3 pont*)

B. 4473. Adott a $px^3-qx^2-rx+s=0$ harmadfokú egyenlet, ahol p, q, r, s olyan pozitív számok, amelyekre $ps=qr$. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletnek van két különböző valós gyöke. Milyen feltétel esetén van három különböző gyök?

(*3 pont*)

B. 4474. Az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és DA oldalain vegyük fel rendre a K, L, M és N pontokat úgy, hogy $KLA\sphericalangle=LAM\sphericalangle=AMN\sphericalangle=45°$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $KL^2+AM^2=LA^2+MN^2$.

(*4 pont*)

B. 4475. Mutassuk meg, hogy minden ötlapú konvex poliéderhez létezik olyan sík, amely a poliédernek egyik csúcsán sem megy át, de mindegyik lapját metszi.

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

B. 4476. Mutassuk meg, hogy a 169 végtelen sokféleképpen írható fel két racionális szám négyzetének összegeként.

(*4 pont*)

B. 4477. Az ABC hegyesszögű háromszögben a szokásos jelölések mellett $\alpha<\beta$. Legyenek R és P az A, illetve a C csúcsból induló magasságok talppontjai. Jelölje Q az AB egyenes egy olyan, P-től különböző pontját, amelyre $AP\cdot BQ=$ $=AQ\cdot BP$. Bizonyítsuk be, hogy az RB egyenes felezi a PRQ szöget.

(*5 pont*) Javasolta: *Mészáros József* (Jóka)

B. 4478. Mutassuk meg, hogy ha α, β és γ egy hegyesszögű háromszög szögei, akkor

$$\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^3\beta+\operatorname{tg}^3\gamma\geqslant 9\sqrt{3}.$$

(*4 pont*)

B. 4479. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB és AC szárain úgy helyezkednek el a D, illetve E pontok, hogy $AD=BC=EC$. Mekkora lehet az A csúcsnál lévő szög, ha az ADE háromszög is egyenlő szárú?

(*6 pont*)

B. 4480. Az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt köre az AB, BC és CA oldalegyeneseket rendre az E, F, G pontokban érinti. Az AF és BG egyenesek metszéspontja H. Az ABC háromszög középvonalai által alkotott háromszög beírt köre az AB-vel párhuzamos oldalt az N pontban érinti. Igazoljuk, hogy az E, H és N pontok egy egyenesre illeszkednek.

(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

B. 4481. Határozzuk meg azokat az egész együtthatós f polinomokat, amelyekre teljesül, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén az n és az $f(n)$ számok prímosztói megegyeznek.

(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2012. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518