Példák, megoldások, tanulságok

Ebben a fejezetben néhány olyan feladat megoldása olvasható, amelyekhez hasonlókkal a későbbiekben is találkozhatunk, illetve melyek eredménye jól használható további feladatmegoldás során.

A nevezetes közepek között fennálló egyenlőtlenségekre a továbbiakban a következő formában hivatkozok:

Az $a_1, a_2, \ldots a_n$ pozitív (ahol értelmes, ott nem negatív) számok **harmónikus, mértani, számtani és négyzetes közepe** rendre:

$$\mathrm{H} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \qquad \mathrm{M} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$\mathrm{SZ} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad \mathrm{N} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Az említett közepekre fennáll a következő egyenlőtlenséglánc:

$$\mathbf{H} \leq \mathbf{M} \leq \mathbf{SZ} \leq \mathbf{N},$$

ahol az egyenlőség mindenütt csakis akkor igaz, amikor $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ennek bizonyítása megtalálható például [19]-ben: 268., 270., 281. feladat.

Az «SZ-M» egyenlőtlenség például az iménti egyenlőtlenségláncból a számtani és a mértani középre fennálló egyenlőtlenséget jelöli.

1. példa A négyegység kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe?

Megoldás: A téglalap oldalait jelöljük x -szel és y -nal. Ekkor területe és kerülete:

$$K = 2(x + y) = 4, \qquad T = xy.$$

Alkalmazzuk a pozitív x és y számokra az «SZ-M» egyenlőtlenséget. Négyzetre emelés után

$$T = xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16} = 1, \text{ azaz } T \leq 1.$$

Ezért a terület értéke legfeljebb 1 lehet, de ezt az értéket fel is veszi, hiszen az «SZ-M» egyenlőtlenségben $x = y$ esetén -és csakis ekkor- az egyenlőség teljesül.

Tehát amikor a téglalap négyzet, akkor $T = 1$ és ez a lehetséges legnagyobb területérték.

2. példa Az egységkerületű háromszögekben mekkora az oldalak reciprokösszegének minimuma?

Megoldás: A háromszög oldalait jelölje a, b és c. Alkalmazzuk az a, b, c pozitív számokra az «SZ-H» egyenlőtlenséget

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{K}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \text{azaz} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9.$$

A kapott eredményből leolvasható, hogy az oldalak reciprokösszege legalább 9, és ezt az értéket a szabályos háromszögnél ($a = b = c$ esetén) fel is veszi. A reciprokösszeg minimuma tehát 9.

3. példa Legfeljebb mekkora lehet egy kétegység kerületű egyenlő szárú háromszög területe?

Megoldás: A háromszög alapja legyen a, szárai pedig b hosszúságúak. A háromszög területe

$$T = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad (2b > a).$$

A terület értéke pozitív szám, ezért pontosan akkor maximális, amikor négyzete is az.

Írjuk fel az a, a, $2b - a$, $\frac{2b+a}{3}$ pozitív számokra az «SZ-M» egyenlőtlenséget:

$$T^2 = \frac{1}{4}a^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) \le \frac{3}{16}\left(\frac{a + a + 2b - a + \frac{2b+a}{3}}{4}\right)^4 = \frac{K^4}{1296} = \frac{1}{27}.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, amikor $a = 2b - a = \frac{2b+a}{3}$, az[az] amikor a háromszög szabályos. Tehát a legnagyobb terület

$$T_{max} = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Megjegyzés: Gyakori hiba, hogy a megoldás során az a, a, $2b - a$, $2b + a$ számokra írják fel az «SZ-M» egyenlőtlenséget, amiből az adódik, hogy

$$T^2 = \frac{1}{16}a^2(2b-a)(2b+a) \le \left(\frac{a + a + 2b - a + 2b + a}{4}\right)^4 = \left(\frac{K}{2}\right)^4 = 1.$$

Ebből annyi következik, hogy a terület 1-nél nagyobb nem lehet. Ez egy felső korlát, amit a terület soha sem ér el, hiszen $a = 2b - a = 2b + a$, azaz $a = 0$, $b = 0$ esetén nincs háromszög!

4. példa Az egységkerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

Megoldás: Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a-val és b-vel, az átfogót c-vel. A kerület $(K) = 1$, ezért a területre azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a^2+b^2)\right) = \frac{1-2c}{4}.$$

Ebből látható, hogy a terület akkor lesz maximális, amikor adott kerület mellett az átfogó a lehető legkisebb. Ezt fogjuk most megkeresni. Az «SZ-N» egyenlőtlenséget felhasználva

$$\frac{1}{2} = \frac{K}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{c}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2}, \qquad \text{amiből } c \ge \sqrt{2} - 1.$$

Mivel az «SZ-N» egyenlőtlenségben egyenlőség csakis $a = b$ esetén áll fenn, ezért az egységkerületű egyenlő szárú derékszögű háromszögben lesz az átfogó a legkisebb, és így a terület a legnagyobb.

$$\left(c = \sqrt{2} - 1,\ T = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\right)$$

1. megjegyzés: Könnyen eljuthatunk hibás gondolatmenettel is ehhez az eredményhez. Használjuk a fenti jelöléseket és az «M-N» egyenlőtlenséget

$$\sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ebből négyzetre emelés után azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{2}ab \le \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{c^2}{4}.$$

Mivel az «M-N» egyenlőtlenségben $a = b$ esetén áll fenn egyenlőség, ezért úgy tűnik, hogy a terület az egyenlő szárú derékszögű háromszög esetén maximális.

A végeredmény ugyan helyes, de a gondolatmenet hibás! Ez utóbbi levezetésből csak az következik, hogy a terület nem lehet nagyobb a c^2 negyedrészénél, ami viszont adott kerület mellett nem állandó érték. Ha a terület és az átfogó ugyanabban a háromszögben lenne maximális és ennél a háromszögnél az egyenlőtlenségben az egyenlőségjel igaz lenne, akkor helyes lenne a gondolatmenet. De az imént azt is láttuk, hogy az egyenlőség éppen a legkisebb átfogó esetében áll fenn.

2. megjegyzés: Érdemes az eddigi példák során használt megoldási módszert általánosítani. Mindegyik feladatban egy adott **g** kifejezés szélsőértékét kell meghatározni. Ehhez egy egyenlőtlenséget kívánunk felhasználni, ekkor a gondolatmenetnek három alapvető lépést kell tartalmaznia:

I. Miután kiválasztottuk a megfelelő egyenlőtlenséget, ügyelni kell arra, hogy az $a_1, a_2, \dots a_n$ értékek, amelyekre az egyenlőtlenséget alkalmazni fogjuk, kielégítsék annak értelmezési tartományát. Így például az «SZ-M» egyenlőtlenséget nem alkalmazhatjuk negatív számokra.

II. Az $a_1, a_2, \dots a_n$ értékeket úgy kell megválasztani, hogy a felírt és esetleg átalakított egyenlőtlenség egyik oldalán konstans érték, c álljon, a másikon pedig a vizsgált **g** kifejezés jelenjen meg

$$\mathbf{g}(a_1, a_2, \dots a_n) \le c \quad (\text{vagy} \quad \mathbf{g}(a_1, a_2, \dots a_n) \ge c)\,.$$

Az így kapott egyenlőtlenség szerint a c konstans a **g** kifejezésnek egy felső (alsó) korlátja, **g** értéke ennél nagyobb (kisebb) nem lehet.

III. A c konstans csakis akkor maximuma (minimuma) a **g** kifejezésnek, ha léteznek olyan $b_1, b_2, \dots b_n$ számok, amelyekre **g** értelmezve van és amelyekre fennáll a $\mathbf{g}(b_1, b_2, \dots b_n) = c$ egyenlőség.

A megfelelő egyenlőtlenség kiválasztása és a II. pont megvalósítása nem mindig egyszerű feladat (lásd a **[19]** 279. feladat megoldását).

Lényeges megemlíteni azt, hogy a bemutatott módszer nem alkalmas annak az igazolására, hogy a vizsgált kifejezésnek nem létezik szélsőértéke. Sőt, ha biztosak lehetünk a szélsőérték létezésében, akkor sem jutunk feltétlenül célba ezen az úton. Mégis, a *differenciálszámítással* szemben vitathatatlan előnye, hogy teljesen elemi és gyakran szép ötleteket, ügyes átalakításokat igényel.

5. példa A K kerületű trapézok közül melyikben fér el a legnagyobb kör?

Megoldás: Ha K kerületű trapéz által tartalmazott legnagyobb kör nem érinti a trapéz összes oldalát, akkor toljuk el önmagukkal párhuzamosan a megfelelő oldalakat úgy, hogy az új trapéz a tartalmazott kör köré legyen írva, azaz minden oldala érintse azt. Az új trapézt az eredeti tartalmazza, kerülete ezért kisebb annak kerületénél. Nagyítsuk ki úgy, hogy kerülete az adott K értékkel legyen egyenlő. Eközben a beírt kör sugara nő. Azt kaptuk, hogy az adott kerületű trapézok között csakis kör köré írt trapéz (érintőnégyszög) tartalmazhatja a legnagyobb kört.

Kössük össze egy ilyen trapéz csúcsait a beírt kör középpontjával. Így a trapézt négy háromszögre bontjuk, amelyek alapjai a trapéz oldalai (a, b, c, d), és mindegyik magassága egyenlő a beírt kör sugarával (r). A trapéz területét jelölje T, akkor

$$T = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr = \frac{a+b+c+d}{2}r = \frac{K}{2}r.$$

A kerület állandó, ezért a beírt kör sugara akkor lesz a legnagyobb, amikor a kör köré írt trapéz területe maximális.

Az ugyanakkora kerületű trapézok között a négyzet területe a legnagyobb (lásd a **2.12** feladat megoldását), de a négyzet érintőnégyszög, ezért a K kerületű trapézok közül a négyzet tartalmazza a legnagyobb kört.

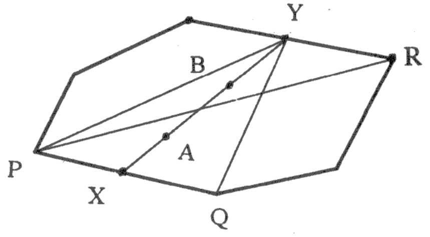
6. példa Az ugyanakkora kerületű rombuszok közül melyiknek legkisebb az átmérője?

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy egy sokszög átmérője (a sokszög pontjai között fellépő legnagyobb távolság) létezik, és ez a sokszög valamelyik átlójának, vagy oldalának a hosszával egyenlő.

Valóban, legyen a sokszög két tetszőleges pontja A és B (belső pontok). Az AB egyenes a sokszögvonalat legalább két pontban metszi (konvex sokszög esetén pontosan két pontban).

Ezek közül a két legtávolabbi pont (X és Y) távolsága nagyobb, mint az A és a B pontok távolsága (7. ábra). Legyen az X pontot tartalmazó oldalon levő két csúcs P és Q. Ekkor a PXY és a QXY háromszögek közül legalább az egyik derékszögű vagy tompaszögű, és emiatt a PY és a QY

szakaszok közül legalább az egyik hosszabb, mint az XY szakasz.



7. ábra

Ugyanígy belátható, hogy ennél is hosszabb szakaszt kapunk, ha az Y pontot kicseréljük az Y -t tartalmazó oldalszakasz megfelelő végpontjával. Az átmérő tehát valóban csak két csúcsot összekötő szakasz lehet. Mivel egy sokszögnek véges sok oldala és átlója van, ezért közöttük biztosan van leghosszabb.

Most térjünk rá a rombusz vizsgálatára. Minden oldala $\frac{K}{4}$, tehát rögzített hosszúságú. A két átló két-két egyenlő szárú háromszög alapja, ahol a szárak a rombusz oldalai. Ezek közül az egyik biztosan tompaszögű vagy derékszögű, a másiknak a szárszöge pedig (az előző kiegészítő szöge) ennél nem nagyobb. A két átló közül a hosszabbik (nem rövidebbik) ezért nagyobb, mint a rombusz oldala, és a legkisebb akkor lesz, amikor a szárszög derékszög, azaz amikor a rombusz négyzet.

7. példa Keressük meg a K kerületű szabályos sokszögek közül azt, amelyiknek legnagyobb a területe!

Megoldás: Jelöljük az ugyanakkora kerületű szabályos n -szög és $2n$ -szög területét T_n -nel, illetve T_{2n} -nel. Megmutatjuk, hogy

$$T_n < T_{2n},$$

amiből az következik, hogy nincsen legnagyobb területű a K kerületű szabályos sokszögek között.

Kössük össze ugyanis az r sugarú beírt kör középpontját a szabályos sokszög csúcsaival. Így azt n darab egyenlő szárú háromszögre bontjuk. Egy ilyen kis háromszög alapjának hossza és területe

$$a = 2r\, tg\frac{180^o}{n},$$

Ebből a szabályos n -szög kerülete és területe

$$K = 2nr\, tg\frac{180^o}{n},\quad T_n = nr^2\, tg\frac{180^o}{n} = \frac{K^2}{4n\ tg\frac{180^o}{n}}.$$

Hasonlóan kapjuk a szabályos $2n$ -szög területét

$$T_{2n} = \frac{K^2}{8n\ tg\frac{180^o}{2n}}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenséghez azt kell megmutatni, hogy

$$2tg\frac{180^o}{2n} < tg\frac{180^o}{n}.$$

Ez $n = 3$ -ra és $n = 4$ -re egyszerű számolással belátható, ha pedig $n > 4$, akkor

$$0 < tg\frac{180^o}{n} < tg\frac{180^o}{4} = 1, \text{ azaz } 0 < 1 - tg^2\frac{180^o}{n} < 1.$$

Ebből pedig a

$$tg\,2\alpha < \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

azonosság felhasználásával megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

8. példa Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög alapú egyenes gúlák F felszíne és V térfogata között fennáll a következő két egyenlőtlenség

$$F \geq \sqrt[3]{216V^2\sqrt{3}}, \text{ illetve } V \leq \sqrt{\frac{F^3}{216\sqrt{3}}},$$

ahol az egyenlőség csakis a szabályos tetraéderre teljesül.

Megoldás: Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a két egyenlőtlenség egyenértékű, elég tehát csak az egyiket bizonyítani.

Jelöljük a gúla alapélét x -szel, magasságát m -mel, egy oldallap magasságát y -nal. A magasság talppontja az S súlypont. Ekkor a gúla felszíne és térfogata: $F = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3xy}{2}$, illetve $V = \frac{mx^2\sqrt{3}}{12}$.

A *Pitagorasz-tétel* szerint

$$m^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt3}\right)^2 = y^2 - \frac{x^2}{12}.$$

Fejezzük ki y -t a felszín egyenletéből

$$y = \frac{4F - x^2\sqrt3}{6x},$$

így

$$m^2 = \left(\frac{4F - x^2\sqrt3}{6x}\right)^2 - \frac{x^2}{12} = \frac{2F\left(2F - x^2\sqrt3\right)}{9x^2}.$$

Emeljük négyzetre a térfogatra felírt egyenlőséget és alkalmazzuk az «SZ-M» egyenlőtlenséget az

$$x^2 \text{ és a } \frac{2F}{\sqrt3} - x^2$$

pozitív számokra:

$$V^2 = \frac{3m^2x^4}{144} = \frac{F\sqrt3}{216}x^2\left(\frac{2F}{\sqrt3} - x^2\right) \le \frac{F^3}{216\sqrt3}.$$

Ebből rendezés után éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk, ahol egyenlőség csakis

$$x^2 = \frac{2F}{\sqrt3} - x^2, \text{ azaz } x = \sqrt{\frac{F}{\sqrt3}}, \text{ és } y = x\frac{\sqrt3}{2}, \; m = x\sqrt{\frac{2}{3}}$$

esetén teljesül, tehát valóban akkor, amikor a gúla szabályos tetraéder.

Megjegyzés: Eredményünkből az is következik, hogy az adott V térfogatú, illetve az adott F felszínű, szabályos háromszög alapú egyenes gúlák között a szabályos tetraéder felszíne a legkisebb, illetve az ő térfogata a legnagyobb.

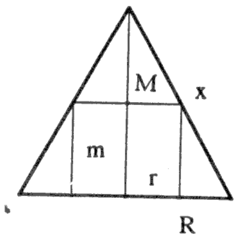
9. példa Számoljuk ki az F felszínű forgáskúpok által tartalmazott forgáshenger térfogatának a maximumát.
(A kúpnak és a hengernek közös a forgástengelye.)

Megoldás: A kúp alapkörének sugara legyen R, a hengeré r. A kúp magassága M, a hengeré m. A kúp alkotóját jelöljük x -szel. Nyílvánvaló, hogy a maximális térfogatú henger csakis kúpba írt henger lehet, azaz alapja a kúp alaplapján van, fedőlapja pedig érinti a kúp palástját. Tekintsük a kúp és a henger közös forgástengelyére illeszkedő síkmetszetet (8. ábra). Az itt látható derékszögű, illetve hasonló háromszögek

alapján felírhatjuk, hogy

$$M^2 + R^2 = x^2 \quad \text{és}$$

$$\frac{m}{R - r} = \frac{M}{R}, \quad \text{amiből } m = \frac{(R - r)M}{R}.$$



8. ábra

Továbbá a kúp felszíne: $F = R^2\pi + xR\pi$,

ahonnan

$$x = \frac{F - r^2\pi}{R\pi},$$

a henger és a kúp térfogata pedig

$$V_h = r^2\pi m, \quad V_k = \frac{1}{3}R^2\pi M.$$

A kapott összefüggések és az «SZ-M» egyenlőtlenség felhasználásával a következő egyenlőtlenséghez jutunk

$$V_h = r^2\pi m = \frac{r^2\pi(R - r)M}{R} =$$

$$= \frac{M\pi}{2R}2(R - r)rr \le \frac{M\pi}{2R}\left(\frac{2(R - r) + r + r}{3}\right)^3 = \frac{4\pi MR^2}{27},$$

($R - r > 0$ nyílván teljesül). Az «SZ-M» egyenlőtlenség ismételt használatával elérjük, hogy a henger térfogatát egy konstans értékkel tudjuk felülről becsülni:

$$V_h^2 \le \frac{16\pi^2M^2R^4}{27^2} = \frac{16\pi^2}{27^2}R^4\left(x^2 - R^2\right) =$$

$$= \frac{32\pi F}{27^2}R^2\left(\frac{F}{2\pi} - R^2\right) \le \frac{32\pi F}{27^2}\left(\frac{R^2 + \frac{F}{2\pi} - R^2}{2}\right)^2 = \frac{2F^3}{27^2\pi},$$

Közben felhasználtuk, hogy $F > 2R^2\pi$, hiszen a palást területe nagyobb az alap területénél.
Így a keresett maximális érték:

$$V_{h\,max} = \frac{F}{27}\sqrt{\frac{2F}{\pi}},$$

P10

hiszen ezt az értéket a

$$2(R - r) = r \quad \text{és} \quad R^2 = \frac{F}{2\pi} - R^2, \text{ azaz}$$

$$r = \frac{2}{3}R \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$$

esetben fel is veszi a térfogat.

Megjegyzés: A levezetett összefüggésekből az is leolvasható, hogy a maximális térfogatú beírt hengerben $m = \frac{M}{3}$, és a henger térfogata a kúp térfogatának $\frac{4}{5}$ része.

10. példa Bizonyítsuk be az a, b, c nemnegatív számokra, hogy

$$ab + bc + ac \geq \sqrt{3abc\,(a + b + c)},$$

ahol az egyenlőség csakis akkor áll fenn, amikor a három szám egyenlő egymással.

Bizonyítás: Induljunk ki a nyílvánvalóan igaz

$$(x - y)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenségből. Ebből átrendezéssel kapjuk az

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

egyenlőtlenséget, amit alkalmazni fogunk a nemnegatív b, c; a, c; valamint a, b számokra:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2) \geq$$

$$\geq a^2 2bc + b^2 2ac + c^2 2ab = 2(a^2bc + ab^2c + abc^2).$$

Eredményünket felhasználva, egyszerű átalakítással kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$ab + bc + ac = \sqrt{(ab + bc + ac)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)} \geq$$

$$\geq \sqrt{3(a^2bc + ab^2c + abc^2)} = \sqrt{3abc\,(a + b + c)},$$

és az is látható, hogy egyenlőség végig akkor teljesül, ha $b = c$, $a = c$, $a = b$, azaz amikor $a = b = c$.

P11

11. példa Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, a_3 és b_1, b_2, b_3 pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

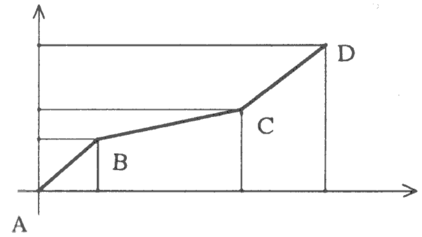
$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2},$$

ahol az egyenlőség csakis

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

esetén igaz.

Bizonyítás: Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszer első negyedében az origóból induló $ABCD$ töröttvonalat (9. ábra), amelyik olyan, hogy mindegyik csúcspontjának első, illetve második koordinátája is nagyobb mint az őt - a töröttvonalban - megelőző pont (ha van ilyen) első, illetve második koordinátája. Jelöljük az AB, BC, CD szakaszoknak az egyik tengelyre vett merőleges vetületét a_1, a_2, a_3 -mal, a másik tengelyre vett merőleges vetületét pedig b_1, b_2, b_3 -mal. A bizonyítandó egyenlőtlenség ekkor éppen azt jelenti, hogy az AD szakasz hossza (jobboldal) nem lehet nagyobb, mint a töröttvonal hossza (baloldal).



9. ábra

Az egyenlőség pedig csakis akkor teljesül, ha az $ABCD$ töröttvonal egy egyenes szakasz, amikor mindegyik szakasz iránytangense ugyanakkora.

Megjegyzés: Ez az úgynevezett *Minkowski-egyenlőtlenség* egy speciális esete (általánosabb egyenlőtlenség bizonyítása például [**19**]-ben olvasható).

FELADATOK

1. Háromszögek

1.1 Egy háromszög egyik oldala egység hosszúságú, kerülete 4 egység. Mekkora a területének legnagyobb értéke?

1.2 Adott egy háromszög egyik oldala és kerületének nagysága. Az ilyen háromszögek közül melyiknek maximális a területe?

1.3 Az adott K kerületű háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe, ha egyik szögük 60^{o} -os?

1.4 Az adott K kerületű egyenlő szárú háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?

1.5 Keressük meg az ugyanakkora kerületű derékszögü háromszögek közül a maximális területűt!

1.6 Azok közül a háromszögek közül, amelyeknek egy szöge γ és a kerülete K, melyiknek legnagyobb a területe?

1.7 Melyik háromszög területe a legnagyobb az ugyanakkora kerületűek közül?

1.8 Melyik lesz az ugyanakkora kerületű háromszögek közül az, amelyiknek legkisebb az átmérője?

1.9 Keressük meg a K kerületű hegyesszögü háromszögek közül azt, amelyiknek legkisebb az átmérője!

1.10 Az ugyanakkora kerületű tompaszögű háromszögek közül melyiknek lesz minimális az átmérője?

1.11 A K kerületű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átmérője?

1.12 Keressük meg azt a K kerületű derékszögű háromszöget, amelyiknek legnagyobb a beírt körének sugara!

1.13 Melyik háromszögbe írható a legnagyobb kör az ugyanakkora kerületű háromszögek közül?

1.14 Melyik az a K kerületű háromszög, amelyik köré a legkisebb kör rajzolható?

1.15 Melyik háromszögben lesz a hozzáírt körök sugarainak reciprokösszege minimális, ha csak az ugyanakkora kerületű háromszögeket vizsgáljuk?

1.16 Keressük meg azt a K kerületű háromszöget, amelyben a hozzáírt körök sugarainak szorzata maximális!

1.17 Mikor lesz a K kerületű háromszög hozzáírt körei sugarainak összege, illetve négyzetösszege a legkisebb?

mekkora ez a minimális érték?

4.7 Egy négyzet és egy félkör együtt alkot egy alakzatot. A félkör átmérője és a négyzet egyik oldala egy közös egyenesen fekszik, annak különböző partján, és van egy közös szimmetriatengelyük. Az ilyen típusú, K kerületű alakzatok közül melyiknek legkisebb a területe, és mekkora ez a terület?

4.8 Egy szabályos háromszög és egy félkör együtt alkot egy alakzatot. A félkör átmérője és a négyzet egyik oldala egy közös egyenesen fekszik, annak különböző partján, és van egy közös szimmetriatengelyük. Számoljuk ki az ilyen típusú, K kerületű alakzatok területének legkisebb értékét!

4.9 Egy téglalap $2a$, illetve $2b$ hosszúságú oldalaira kifelé a, illetve b magasságú téglalapokat rajzolunk. Az így nyert G alakzatnak az eredeti téglalap csúcsaitól különböző csúcsaiból negyedköröket rajzolunk G-be. Az a oldalhosszúságú téglalapok csúcsaiból a, a b hosszúakból pedig b sugarú negyedköröket, amiket aztán elhagyunk G-ből. Mikor lesz az így kapott, körívek által határolt síkidom területe maximális, ha a kerülete K? Mekkora ez a maximális terület?

5. Síkbeli izoperimetrikus egyenlőtlenségek

Bizonyítsuk be a következő állításokat!

5.1 Tetszőleges derékszögű háromszögre teljesül, hogy
$$K^2 - (12 + 8\sqrt{2})\,T \ge 0,$$
és az egyenlőség csakis az egyenlő szárú derékszögű háromszögre igaz.

5.2 Tetszőleges tompaszögű háromszögre igaz, hogy
$$K^2 - (12 + 8\sqrt{2})\,T > 0.$$

5.3 Minden háromszögre teljesül, hogy
$$K^2 - 12T\sqrt{3} \ge 0,$$
és az egyenlőség csakis a szabályos háromszögre igaz.

5.4 A háromszög átmérőjére igaz, hogy
$$\frac{K}{3} \le d < \frac{K}{2},$$
ahol az egyenlőség csakis a szabályos háromszögre áll fenn.

5.5* A háromszög beírt (r_b), a körülírt (R_k) és a háromszöget tartalmazó legkisebb kör (R) sugarára teljesül, hogy
$$a)\ 0 < r_b \le \frac{K\sqrt{3}}{18},\quad b)\ \frac{K\sqrt{3}}{9} \le R_k < \infty,\quad c)\ \frac{K\sqrt{3}}{9} \le R < \frac{K}{4},$$
ahol az egyenlőség mindenütt csakis a szabályos háromszögre igaz.

5.6 A háromszög hozzáírt köreinek sugarára igaz, hogy
$$a)\ \frac{K^2}{4} \le r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 < \infty,\quad b)\ \frac{K\sqrt{3}}{2} \le r_a + r_b + r_c < \infty,$$
$$c)\ 0 < r_a r_b r_c \le \frac{K^3\sqrt{3}}{72},\quad d)\ \frac{6\sqrt{3}}{K} \le \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} < \infty,$$
és az egyenlőség mindenütt csakis a szabályos háromszögre teljesül.

5.7* A háromszög oldalaira teljesül, hogy
$$a)\ \frac{K^2}{3} \le a^2 + b^2 + c^2 < \frac{K^2}{2},\quad b)\ 0 < abc \le \frac{K^3}{27},$$
$$c)\ \frac{9}{K} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \infty,$$
és az egyenlőség mindenütt csakis a szabályos háromszögre igaz.

5.8* A háromszög szögfelezőire igaz, hogy
$$a)\ \frac{2K^2}{9} \le f_a^2 + f_b^2 + f_c^2 < \frac{K^2}{4},\quad b)\ \frac{K}{2} \le f_a + f_b + f_c < \frac{K\sqrt{3}}{2},$$
$$c)\ 0 < f_a f_b f_c \le \frac{K^3\sqrt{3}}{72},\quad d)\ \frac{6\sqrt{3}}{K} \le \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} + \frac{1}{f_c} < \infty,$$
és az egyenlőség mindenütt csupán a szabályos háromszögre teljesül.

5.9 A háromszög magasságaira teljesül, hogy
$$a)\ 0 < m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < \frac{K^2}{4},\quad b)\ 0 < m_a + m_b + m_c < \frac{K\sqrt{3}}{2},$$
$$c)\ 0 < m_a m_b m_c \le \frac{K^3\sqrt{3}}{72},\quad d)\ \frac{6\sqrt{3}}{K} \le \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} < \infty,$$
ahol az egyenlőség csakis a szabályos háromszögben igaz.

5.10 A háromszög súlyvonalaira teljesül, hogy
$$a)\ \frac{K^2}{4} \le s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < \frac{3K^2}{8},\quad b)\ \frac{3K}{4} < s_a + s_b + s_c < K,$$
ahol az egyenlőség csakis a szabályos háromszögben igaz.

5.11 Minden α-szögű paralelogrammára igaz, hogy

$$K^2 - \frac{16T}{\sin\alpha} \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis az α-szögű rombuszra teljesül.

5.12 Minden α-szögű szimmetrikus trapézra teljesül, hogy

$$K^2 - \frac{16T}{\sin\alpha} \geq 0,$$

és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor a szár hossza a két alap hosszának számtani közepe.

5.13* Egy konvex négyszög oldalai: a, b, c, d, félkerülete pedig s, akkor

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - T^2 \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis húrnégyszögre igaz.

5.14 Minden négyszögre teljesül, hogy

$$K^2 - 16T \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis a négyzetre igaz.

5.15 Bármely paralelogramma átmérőjére igaz, hogy

$$\frac{K\sqrt{2}}{4} \leq d < \frac{K}{2},$$

és az egyenlőség csakis a négyzetre áll fönn.

5.16 Mindegyik négyszög átmérőjére igaz, hogy $K < 4d < 2K$.

5.17 A négyszög által tartalmazott legnagyobb kör sugarára igaz, hogy

$0 < r \leq \frac{K}{4}$, ahol az egyenlőség csakis a négyzetre teljesül.

5.18 Konvex négyszöget tartalmazó legkisebb kör sugarára igaz, hogy

$$\frac{K\sqrt{2}}{8} \leq R < \frac{K}{4},$$

és az egyenlőség csakis a négyzetre teljesül.

5.19 Konvex húrnégyszög köréírt körének sugarára igaz, hogy

$$\frac{K\sqrt{2}}{8} \leq R_k < \infty,$$

ahol az egyenlőség csakis a négyzetre áll fenn.

5.20 Tetszőleges n-szögre teljesül, hogy

$$K^2 - 4nT \ \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n} \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis a szabályos n-szögre igaz.

5.21 Az n-szög ($n > 3$) átmérőjére igaz, hogy

$$\frac{K}{n} \leq d < \frac{K}{2}.$$

5.22 Egy n-szög által tartalmazott legnagyobb kör sugarára igaz, hogy

$$0 < r \leq \frac{K}{2n\ \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}},$$

és az egyenlőség csakis a szabályos n-szögre áll fenn.

5.23 Konvex n-szöget tartalmazó legkisebb kör sugarára igaz, hogy

$$\frac{K}{2n\ \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}} \leq R < \frac{K}{4},$$

és az egyenlőség csupán a szabályos n-szögre teljesül.

5.24 Konvex húr n-szög köréírt körének a sugarára igaz, hogy

$$\frac{K}{2n\ \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}} \leq R_k < \infty,$$

és az egyenlőség csupán a szabályos n-szögre teljesül.

5.25* Bármelyik n-szög oldalainak négyzetösszegére teljesül, hogy

$$\frac{K^2}{n} \leq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 < \frac{K^2}{2},$$

és az egyenlőség csupán az egyenlő oldalú sokszögre áll fönn.

5.26 Minden körcikkre igaz, hogy

$$K^2 - 16T \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis akkor áll fenn, amikor a körcikk szöge 2 radián.

5.27 Tetszőleges negyedkörgyűrűre teljesül, hogy

$$K^2 - 16T \geq 0,$$

és az egyenlőség csakis akkor áll fenn, amikor a külső és a belső körök sugarainak aránya: $(4+\pi) : (4-\pi)$.