

Matematikai versenyfeladatok

Makó Zita, Szilágyi Ibolya, Téglási Ilona

Matematikai versenyfeladatok

Makó Zita, Szilágyi Ibolya, Téglási Ilona

Publication date 2011

Szerzői jog © 2011 Hallgatói Információs Központ

Copyright 2011, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ

Tartalom

1. A hazai matematikai tehetséggondozás, versenyek hagyományai	1
1. Történeti háttér	1
2. A KöMaL története	2
3. Matematikai versenyek kezdetei	5
4. Feladatok	7
2. Az országos matematikai versenyek rendszere, típusai I.	9
1. A matematika versenyek típusai	9
2. Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny	9
3. Abacus matematikai lapok 10-14 éveseknek	10
4. Bolyai Matematikai Csapatverseny	11
5. Gordiusz Matematika Tesztverseny	11
6. Kalmár László Matematika Verseny	12
7. OKTV (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny)	13
3. Az országos matematikai versenyek rendszere, típusai II.	15
1. Kürschák József Matematikai Tanulóverseny	15
2. Varga Tamás Matematikaverseny	17
3. Zrínyi Ilona Matematikaverseny	18
4. Feladatok	19
4. A teszt-versenyek feladattípusai	20
1. Tesztfeladatok 7-8. osztályosoknak	20
2. Tesztfeladatok 9-10. osztályosoknak	25
5. Az algebra megjelenése a matematika versenyekben	35
1. Feladatok	35
2. A feladatok megoldásai	36
6. A számelmélet megjelenése a matematika versenyekben	43
1. Feladatok	43
2. A feladatok megoldásai	44
7. Függvények, sorozatok	48
1. Feladatok	48
2. A feladatok megoldásai	50
8. Elemi geometriai feladatok	57
1. Síkgeometriai feladatok	57
2. A feladatok megoldása	57
3. Térgeometriai feladatok	63
4. A feladatok megoldása	66
5. Feladatok önálló feldolgozásra	68
9. Logikai feladatok és halmazok	70
1. Feladatok	70
2. A feladatok megoldásai	72
10. Kombinatorika és valószínűség a versenyfeladatokban	77
1. Feladatok	77
2. A feladatok megoldásai	79
11. Nemzetközi matematikaversenyek és a Matematikai Diákolimpia	85
1. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny	85
2. Matematika Határok Nélkül	87
3. Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny	87
4. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia	88
5. Feladatok a nemzetközi matematikaversenyekről	92
12. Tehetséggondozás és versenyfelkészítés	94
1. A tehetség összetevői és felismerése	94
2. Kreatív személyiségtulajdonságok és fejlesztésük	94
3. A problémaérzékenység	95
4. Ötletgazdagság	96
5. Hajlékonyság, rugalmasság, könnyedség	96
6. Eredetiség	96
7. Kidolgozottság	96

8. Újrafogalmazás	97
9. Kiterjesztés	97
10. Transzferálás	97
11. Összegzés	98
12. Feladatok	98
Irodalomjegyzék	xcix

1. fejezet - A hazai matematikai tehetséggondozás, versenyek hagyományai

1. Történeti háttér

Az 1867. évi kiegyezés után fejlődés indult el a magyarországi matematika oktatásában. A középfokú oktatásban bevezették a Trefort-féle tantervet, amely egészen 1899-ig érvényben volt. A tanterv matematika tananyagának kidolgozásában olyan tudósok is részt vettek, mint Kármán Mór és König Gyula.



Kármán Mór



König Gyula

E tantervben központi szerepet játszott a függvénytan és az algebra, mely hosszú időre meghatározta a középiskolai tananyag fő irányvonalát, és indítást adott sok fiatalnak, hogy elmélyüljenek a matematika művelésében. 1891. nov. 5-én kezdte meg működését a Bolyai János Matematikai Társulat, melynek kimondott célja volt a hazánkban a matematikai tehetségek segítése és felkarolása azáltal, hogy lehetőséget adott tudományos cikkek közzétételére az általuk indított „Mathematikai és Fizikai Lapok”-ban.



Bolyai János

1894-től a társulat minden év őszén az abban az évben érettségizettek között Budapesten és Kolozsvárott matematikai és fizikai versenyt szervezett „olyan célzattal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék”(Math. és Phys. Lapok, 3.k. 1894. 197-198). Ezt kívánta segíteni Arany Dániel, a győri reáliskola matematika tanára, amikor 1894-ben megindította a „Középiskolai Mathematikai Lapok”-at, a mai KöMaL elődjét.

2. A KöMaL története

A KöMaL 1893. december 1-én jelent meg először egy „mutatványszámmal”, amelyben már feladatokat (többek közt érettségi példákat is) közöltek, majd 1894. januárjától folyamatosan megjelent.



2011. május



Faragó Andor (1863-1945)

A kifejezetten az érdeklődő tanulóifjúságnak szóló cikkek mellett minden számban megjelentek a következő hónapban beküldendő feladatok, eleinte a hetedik-nyolcadik gimnazistáknak (17-18 éveseknek) szóló számozott „Feladatok” (1893 decemberétől 1914 áprilisáig 2415 darab), majd 1900 januárjától, 1-től 1390-ig számozva a 15-16 éves korosztálynak szánt „Gyakorlatok”. Külön, római számozással jelentek meg az ábrázoló geometriai feladatok. A lapban a példamegoldások a beküldő iskolások dolgozatai alapján készültek, a legjobbak neve megjelent, az eredményeket a tanév végén összesítették, és a diákokat jutalmazták. A Lapok versenye – a tanárok közreműködésével – országosan elterjedt. Az első világháború miatt be kellett szüntetni a lap kiadását, a háború alatt és utána néhány évig más gondjuk volt az embereknek. Azonban 1925-ben egy újabb tanár, Faragó Andor úgy gondolta, érdemes újra kezdeni a matematikai lapot, nagyobb szerepet adva benne a fizikának. A megváltozott nevű Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban így előlről kezdődött a feladatok és gyakorlatok, illetve az ábrázoló geometria feladatok számozása. A lap második korszaka 1938-ig, az újabb világháború kezdetéig tartott, melynek sajnos Faragó Andor is áldozata lett. 1946-ban egy szegedi matematika tanárnő, dr. Soós Paula, fiatal kezdő tanár kollégája segítségével elindította a saját terjesztésű stencilezett Szegedi Íveket, amelyből a Középiskolai Matematikai Lapok harmadszorra is újra indult.



Soós Paula

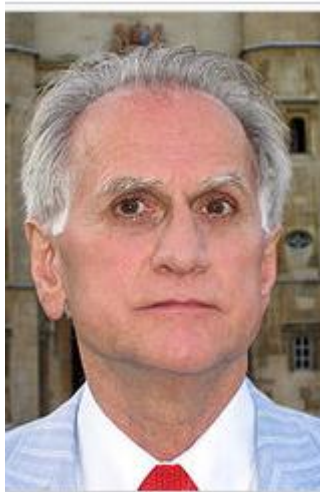
A fiatal tanár, Surányi János középiskolás korában maga is beküldte a lap feladatait, ő lett az új sorozat első főszerkesztője.



Surányi János

A folyóirat kiadását a Bolyai János Matematikai Társulat lapjaként a művelődési minisztérium finanszírozta. Újra indult a feladatok számozása 1946-tól, majd ismét kezdődtek a 15-16 éveseknek szóló gyakorlatok 1952-től. 1959-ben fizika rovattal és feladatokkal bővült a lap, melyeket az Eötvös Loránd Fizikai Társulat gondozott. A korábbi jól bevált hagyományoknak megfelelően minden tanévben pontversenyt hirdettek, a legjobb beküldött megoldások megjelentek a lapban, csakúgy, mint a verseny eredménye és a jó helyezést elérték fényképe. A Középiskolai Matematikai Lapokat a 80-as években kezdték KöMaL-nak hívni, ez maradt a rövidítése az után is, hogy 1992-től ismét Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok lett a neve és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat kiadásában a két társulat közös lapjaként, a Minisztérium és további alapítványok és cégek támogatásával jelenik meg.

A feladatmegoldások beküldői között évről évre olyan diákok nevei fordulnak elő, akik később neves matematikusként, fizikusként öregbítették hazánk hírnevét itthon és külföldön egyaránt. A lap 100 éves fennállásának jubileumi megemlékezésén a Magyar Tudományos Akadémia 1994. január 29-i előadóülésén sok mai tudós és államférfi dicsőítette a „világ egyik legelső, legszínvonalasabb, leghuzamosabb ideig működő és a diákságot leginkább aktivizáló” (Kálmán Attila, Művelődési és Közoktatási Minisztérium államtitkára) lapot. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok archívuma ma egy különleges, több mint egy évszázadot átölelő feladat- és cikkgyűjtemény, mely a magyar matematika és fizika tudománytörténetének része. Ez a – kezdetben matematika, később fizikával kiegészült – lényegében csak igényes szakmai anyaggal foglalkozó, havonta rendszeresen megjelenő folyóirat két világháborút és politikai rendszerváltásokat túlélve alapozta meg a magyar természettudományok hazai és külföldi megbecsülését. Külföldön élő és dolgozó tudósaink is alátámasztják, hogy a lap a maga színvonalával, történelmével és a természettudományos oktatásra gyakorolt hatásával a világon egyedülálló. Még a cambridge-i egyetem sem mert felvállalni egy hasonló, középiskolás korosztálynak szánt lap indítását Bollobás Béla, ott élő matematikusunk kezdeményezésére.



Bollobás Béla

A lap százéves alapításának évfordulójára az 1993. decemberi szám ünnepi visszaemlékezéseket, matematika- és fizikatörténeti érdekességeket tartalmaz. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok történetének legfontosabb adatai időrendi táblázatban e szám 496. oldalán található. Néhány kimaradt cikk pedig 1994 áprilisában jelent meg a KöMaL-ban. Ezeket is érdemes elolvasni mindazoknak, akiket érdekel a folyóirat múltja. A centenáriumi szám angol nyelvű változata 1994 júliusában jelent meg a külföldi érdeklődők számára. Még egy angol nyelvű különszám készült 1996 augusztusában, a Magyarországon, Miskolcon rendezett Nemzetközi Ifjúsági Matematikai Konferencia tiszteletére. A KöMaL 1994 és 1997 közötti feladataiból és cikkeiből válogatott C2K (Century Two of KöMaL) című könyv a laphoz kapcsolódó harmadik angol nyelvű kiadvány. A magyar nyelvű KöMaL-ban a mindenkor kitűzött feladatok utáni oldalakon (külön a matematika és külön a fizika részben) már sok-sok évtizede szerepel a feladatok idegen nyelvű fordítása is. Eleinte francia, később angol, orosz, eszperantó, német változatok jelentek meg a különböző korok és szerkesztők igényei szerint. A legtöbb közülük az angolra fordított feladatszöveg. Ezek megtalálhatók az elektronikus archívumban is. Az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság és a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával 1993-ban, a KöMaL 100 éves jubileuma tiszteletére megjelent egy két lemezt tartalmazó CD is, amely a KöMaL teljes 100 éves anyagát tartalmazza.



3. Matematikai versenyek kezdetei

A KöMaL-ban a feladatokon és cikkeken kívül évtizedekre visszamenőleg nyomon követhetők a magyar matematika és fizika oktatásában nagy szerepet játszó országos és nemzetközi versenyek. Néhány ilyen versenypélda KöMaL-feladatként is megjelent, a legtöbbször azonban a versenybeszámolók őrzik, hogy hol, mikor, milyen eredményekkel és milyen feladatokkal rendeztek matematika vagy fizikaversenyt, az utóbbi években számítástechnika, illetve komplex tanulmányi versenyeket. Talán legfontosabb országos versenyünk az 1894-ben Mathematikai és Fizikai Társulat tanulóversenyeként alapított országos matematikaverseny (megalapítása szerencsésen egybeesett a folyóirat indulásával). Ennek a versenynek az utódja ma a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, amelyet akkor olyan matematikusok szerveztek, mint Rados Gusztáv, König Gyula és Kürschák József. Az ő révükön honosodott meg a matematika versenyek szervezeti formája, színvonalas rendezése. Sok később világhírt szerzett matematikusunk nevét őrzik a versenyek beszámolói.



Rados Gusztáv



Kürschák József

A versenyt minden évben ősszel rendezték az abban az évben érettségizettek részére, három feladattal. 1894 és 1913 között mindig megjelent a beszámoló a lapban a Társulat versenyének díjazottairól, a feladatokról és a megoldásokról, melyek a feladat kitűzése után egy későbbi számban jelentek meg. Ugyancsak rendszeresen tudósított a folyóirat az 1924 és 1938 között megrendezett versenyekről. 1925-ben nevezték a lapban először ezt a versenyt „Eötvös Loránd” matematikai tanulóversenynek. Időközben megalapították a matematikaverseny fizika párját is: 1925-ben a fizikaverseny is Eötvös nevét viseli. 1926-1939-ig Károly Iréneusz paptanár nevét vette fel a matematikához hasonló feltételekkel indított fizikaverseny. A II. világháború után, 1947-ben kivételesen Bolyai János Tanulóverseny néven indították el ezt a matematikaversenyt, 1949-től pedig új nevet kapott Kürschák József egyetemi tanárról, a verseny korábbi lelkes szervezőjéről. Ettől kezdődően rendszeresen tudósított a Középiskolai Matematikai Lapok a Kürschák versenyekről. 1956 őszén a forradalom miatt elmaradt a verseny, azóta azonban újra minden évben indulhatnak rajta nemcsak az érettségizettek, de a fiatalabbak is. Báró Eötvös Loránd nevét a fizikaverseny vette át 1952-től. A fizika rovat megalakulása, 1959 óta minden évben lehet olvasni az Eötvös Loránd fizikai tanulóversenyről.

Fordulatot jelentett a matematikaoktatásban az Országos Középiskolai Tanáregylet és Beke Manó kezdeményezésére a Matematikai Reformbizottság megalakulása 1906-ban, melynek célja a tanterv (1899-1926 között az úgynevezett Wlassich-féle tanterv volt érvényben, melynek központi témája a függvényfogalom volt) megreformálása, a matematika újabb területeinek, eredményeinek beemelése volt a középiskolai tananyagba.



Manó (1862–1946)

A bizottság tagjai között megtaláljuk Kopp Lajost, Rados Ignácot és Rátz Lászlót, az ő nevük pedig garanciát jelentett arra, hogy a reformok a matematika tanításának színvonalasabbá tételét hozzák magukkal.



Rátz László

Az első Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 1923-ban indult matematikából, a középiskola utolsó osztályaiba járóknak. A versenyekről szóló beszámolók 1924 és 1938 között jelentek meg a lapban. 1927-től a fizika (illetve természettan) versenyek tételeit is közölte a lap. 1947-ben újra kezdődött a tavaszi verseny számozása, sőt 1952-ben Rákosi Mátyásról, a kor híres-hírhedt politikus vezéréről nevezték el a Tanulóversenyt. Ma ezeket a versenyeket tekintjük az OKTV (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny) elődeinek. 1950-ben új matematikaverseny indult a 15-16 éves korosztály részére, a Középiskolai Matematikai Lapok országos tanulmányversenyeként, ezt tekintjük ma az első Arany Dániel Tanulóversenynek, amely azóta szintén minden évben megrendezésre került. Kivételes rangjuk van az 1959 óta megrendezett Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáknak. Az ezekről szóló beszámolók, minden évben részletes, megjegyzésekkel kiegészített megoldások megtalálhatók a KöMaL archívumában a talán legrangosabb világverseny példáiról.

4. Feladatok

1.

A matematika, mint szaktudomány mely területein ért el kiemelkedő eredményeket Kürschák József, König Gyula és Rados Gusztáv?

2.

Keressen érdekes feladatokat a KöMaL első 40 évének archívumában!

3.

Milyen eredménnyel vettünk részt a nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon az elmúlt 5 évben?

4.

Oldja meg a következő feladatokat (KöMaL 1996/2)! C.423. Egy derékszögű háromszögben a beírt körnek az átfogón levő érintési pontja az átfogót x és y hosszú szakaszokra osztja. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög területe xy !

5.

Gy. 3038. Adott 50 különböző pozitív egész szám, melyek egyike sem nagyobb 100-nál. Bizonyítsuk be, hogy található köztük néhány (esetleg csak egy), amelyeknek összege négyzetszám!

6.

F. 3107. Igazoljuk, hogy $1991^{1991} + 1992^{1992} + \dots + 1996^{1996}$ nem lehet teljes négyzet!

2. fejezet - Az országos matematikai versenyek rendszere, típusai I.

1. A matematika versenyek típusai

Mint láhattuk, hazánkban a matematikai tehetséggondozásnak nagy hagyományai vannak. A versenyek száma évről évre nő. Minden korosztály az ország minden részében megtalálhatja azt a versenytípust, ami felkészültségének és ambícióinak megfelel. A következőkben a teljesség igénye nélkül a legismertebb, legnagyobb hírű, legtöbb diákot megmozgató országos versenyeket mutatjuk be. Az országos versenyeket négy típusba sorolhatjuk:

- **Egyéni, kifejtéses, indoklásos versenyek:** pl. Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, OKTV, Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, Varga Tamás Matematikaverseny, Kalmár László Matematikaverseny, stb.
- **Egyéni teszt-versenyek:** pl. Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny, Zrínyi Ilona Matematikaverseny, Gordiusz Matematikaverseny, stb.
- **Levelezős versenyek:** pl. KöMaL feladatmegoldó verseny, Abacus levelező verseny, MicroProf levelező verseny, Kis Vakond verseny, stb.
- **Csapatverseny:** pl. Bolyai Matematika Csapatverseny. A versenyeket kívül hazánkban több szervezet, alapítvány rendez matematikai táborokat, találkozókát, szakköröket: KöMaL Ankét, Erdős Iskola, Balatonberényi Matematika Tábor, Kenguru Matematika Tábor, MaMuT, stb.

Ezeket kívül széles választéka van a regionális, megyei szintű versenyeknek, melyeket a pedagógiai intézetek, vagy egyes iskolák lelkes tanárai szerveznek meg és bonyolítanak le helyi szinten. Néhány országos verseny is ilyen helyi kezdeményezésből indult, és szélesedett ki.

2. Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

A versenyt a Bolyai János Matematikai társulat hirdeti meg minden évben az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A verseny két korcsoportban zajlik. A „kezdők” csoportban versenyeznek a magyarországi középiskolákba járó, matematikából 9. évfolyamos tanulók. (A két-tannyelvű és nyelvi előkészítő, 13 éves képzésben résztvevők 9. és 10. osztályos korukban a kezdők kategóriában indulhatnak.) A „haladók” csoportban versenyeznek a magyarországi középiskolákba járó, matematikából 10. évfolyamos tanulók. (A két-tannyelvű és nyelvi előkészítő, 13 éves képzésben résztvevők 11. osztályos korukban a haladók kategóriában indulhatnak.) Ezen belül kezdők esetén I. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a matematikát kötelezően legfeljebb heti 3 órában tanulják. A „Hátrányos Helyzetű Tanulók Arany János Tehetséggondozó” program keretében, előkészítő évben tanuló diákok a heti óraszámától függetlenül az I. kategóriában indulnak. II. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a matematikát kötelezően heti 3 óránál több órában, de nem speciális matematika tanterv szerint tanulják. III. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a matematikát speciális matematika tanterv szerint tanulják. Haladók esetén össze kell adni a 9. és 10. évfolyamos heti matematika óraszámot, eszerint I. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a két évfolyamon, együttesen kötelezően heti 6 órában tanulják a matematikát. II. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a két évfolyamon, együttesen kötelezően heti 6 óránál több órában, de nem speciális matematika tanterv szerint tanulják a matematikát. III. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a matematikát speciális matematika tanterv szerint tanulják a 9. vagy 10. évfolyam valamelyikén.

A kezdők és haladók I. és II. kategóriájában három forduló van. Az első forduló időpontja decemberre, a második forduló időpontja februárra, a harmadik forduló időpontja április végére esik. A kezdők és haladók III. kategóriájában két forduló van. Az első forduló időpontja februárra esik, egy időpontban az I. és II. kategória második fordulójával. A második forduló időpontja április végére esik, egy időpontban az I. és II. kategória harmadik fordulójával.

A versenyek időtartama minden esetben 240 perc, rendszerint csütörtöki napra hirdetik meg mindegyik fordulót. Az iskolák versenyfelelősei a tanulóikat a <https://ad.bolyai.hu/ad> versenyportálon nevezik, a határidő általában október 20-a körül van.

Mindkét korosztályban az I. és II. kategória első és második-, illetve a III. kategória első fordulója „iskolai forduló”, vagyis a dolgozatokat minden versenyző saját iskolájában írja meg. A különböző fordulók feladatait a versenyportálról, a verseny napján, reggel 8. 00 órától, a javítási útmutatókat 19.00 órától „pdf” formában tölthetik le a versenyfelelősök.

A döntő (mindkét korosztályban az I. és II. kategória harmadik-, illetve III. kategória második fordulója) dolgozatait központilag írják meg a versenyzők.

A kezdők és haladók I. és II. kategória első fordulójában, mindkét kategóriában ugyanazt a feladatsort írják meg a tanulók. A kezdők feladatsora négy, a haladóké öt kifejtendő feladatból áll. A III. kategória első fordulója szintén iskolai forduló. A feladatlap öt, az előző két kategória feladataitól eltérő kifejtendő feladatból áll. A versenydolgozatokat az iskola matematikatanárai, a központi javítási útmutató segítségével kijavítják, a versenyzők eredményét megadott határidőig rögzítik a portálon és a megadott ponthatárt elért versenyzőket jelentkeztetik a következő fordulóra. A dolgozatokat a tanév végéig meg kell őrizni (szükség esetén a versenybizottság kérésére, rendelkezésre kell bocsátani). A második fordulóban részt vesz a megadott ponthatárt elért összes versenyző, akinek az előbbieket szerint iskolája felvezette eredményét és jelentkeztette a második fordulóra. Nem vehet részt a második fordulóban az a tanuló, akinek eredménye nem került felvezetésre és nem jelentkeztették a második fordulóra! A második forduló is iskolai, mindkét kategóriában ugyanazt a feladatsort írják meg a tanulók. Ez a feladatsor 5 kifejtendő feladatból áll, melyek a matematika különböző területeit érintik. A versenydolgozatokat ismét az iskola matematikatanárai, a központi javítási útmutató segítségével javítják ki. A versenyzők eredményét a programban rögzítik és a megadott ponthatárt elért versenyzők dolgozatait postai úton a Bolyai János Matematikai Társulatba (1027 Budapest, Fő utca 68.) küldik. Az országos versenybizottság a dolgozatok javítását egységesíti és kijelöli a döntőbe jutó versenyzőket, iskoláikat legkésőbb a döntő előtt egy héttel e-mailen értesíti, és a portálra kiteszi a továbbjutók adatait. A döntőn a versenyzők kategóriájuknak megfelelő, különböző feladatsorokat kapnak. A döntőn általában három feladatot kell megoldani a tanulónak. A dolgozatokat az országos versenybizottság javítja.

A versenyzők minden fordulóban csak a szervező intézmény által lepecsételt papíron dolgozhatnak. Semmilyen elektronikus eszközt (zsebszámológépet, mobiltelefont) nem használhatnak, azokat a verseny helyszínére nem vihetik magukkal. Használhatnak viszont minden maguk által hozott írásos, nyomtatott anyagot (pl. szakkönyvek, tankönyvek, függvénytáblázatok) mindegyik fordulóban.

3. Abacus matematikai lapok 10-14 éveseknek

A Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekéért Alapítvány folyóirata 10-14 éveseknek. Az újság 14 rovatában matematikával és természettudományokkal kapcsolatos pontversenyek és érdekes cikkek jelennek meg. Alapította: Róka Sándor 1994-ben.



Róka Sándor

A folyóiratban 3-8. osztályos tanulók számára vannak érdekes feladatok, melyek megoldását levelező rendszerben lehet az Alapítványhoz beküldeni. Külön feladatsorok vannak a 3-4. osztályos, 5-6. osztályos és 7-8. osztályos tanulók számára. A feladatokon kívül találunk benne matematikatörténeti, logikai, informatikai, csillagászati rovatot, sakk-feladványokat, beszámolókat általános iskolai matematikaversenyekről, érdekes feladatokat és nehezebb problémákat. A KöMaL-hoz hasonlóan itt is találunk fizikai rovatot, beküldendő feladatokkal. Ezenkívül az előző számban közölt feladatok megoldásait is megtaláljuk. A hivatalos megoldás

mellett a tanulók által beküldöttékből is mutatnak be ötletes megoldásokat. A versenyben elért pontszámokat folyamatosan közlik, a legjobb eredményt elérő tanulókat év végén jutalmazzák.

4. Bolyai Matematikai Csapatverseny

Mottója: „Az összedolgozás képessége az egyik legnagyobb érték az életben.”

A Bolyai Matematika Csapatverseny középiskolai tanárok kezdeményezésére, először 2004 őszén került megrendezésre, 5-8. osztályos diákok évfolyamonként szerveződő 4 fős csapatai számára, először Budapest I.-II.-III. kerületében. A következő években a főváros más kerületei és vidéki megyék is csatlakoztak, így az évek során a verseny országossá szélesedett. A verseny első fordulóját írásbeli munka, a második fordulót szóbeli kifejtés formájában bonyolítják le.

A verseny célja: segíteni a diákokat azon képességeik kifejlesztésében, hogy közösen, összedolgozva oldjanak meg problémákat. Lehetőséget szeretnének teremteni arra, hogy átéljék az együttgondolkodás örömeit, és a logikus gondolkodás mellett készségeiket közvetlenül is bemutathassák diáktársaik előtt, és összemérhessék tudásukat.

A verseny résztvevői: a versenyen azonos iskolába járó 5-8. osztályos tanulók évfolyamonként szerveződő 4 fős csapatai vehetnek részt (egy iskolából akárhány csapat indulhat). A négy csapattagnak közösen kell megoldania a feladatokat. A 3-6. osztályosok egy-egy, a 7. és 8. osztályosok két-két kategóriában versenyeznek aszerint, hogy általános iskolai vagy gimnáziumi osztályba járnak. A verseny szabályai: az első fordulóban minden évfolyamon feleletválasztós és írásbeli kidolgozást igénylő feladatot is meg kell oldani a tanulóknak. Minden évfolyamon a teljes munkaidő 60 perc. Az első 13 feleletválasztós feladat szövege után öt lehetséges válasz található (A, B, C, D és E), amelyek közül több is lehet helyes. A válaszlapon a feladatokra adandó helyes válasz betűjelének megfelelő négyzet(ek)be X-et kell beírni. A 14. feladat részletes kidolgozást igényel. Ennek megoldását az ezt követő laprészen kell kidolgozni. A versenyen csak íróeszköz, körző, vonalzó és szögmérő használható.

Az első fordulót követően a versenyző tanulók és felkészítő tanáraik között megyénként 240 díjat osztanak ki. Minden megyéből kategóriánként az első helyezett továbbjut a verseny 2. fordulójába. Meghívják még kategóriánként az országos összesített lista további legjobb csapatait is. A csapatokat az írásbeli feladatok pontszámai szerint csökkenő sorrendbe állítják, és évfolyamonként a legjobb csapatokat hívják be a második, szóbeli fordulóba. E forduló forgatókönyvéről a behívón részletes tájékoztatást kapnak a második fordulóba jutó csapatok. A döntőben először az első fordulóhoz hasonló írásbeli feladatsor vár a versenyzőkre, majd az itt elért pontszám szerint kategóriánként a legjobb 6 csapat még aznap a 3., szóbeli fordulón dönti el a végső sorrendet. A szóbeli fordulóban résztvevő csapatoknak 15 percnyi felkészülési idő után kell ugyanazon két feladat megoldását tábla felhasználásával, zsűri előtt közösen bemutatniuk, majd egyazon villámkérdésre kell választ adniuk. (Az értékelés szempontjai: matematikai felkészültség, a bemutatás minősége, összedolgozási képesség). Ezt követően alakul ki a verseny végeredménye az aznapi írásbeli és szóbeli együttes pontszáma alapján. Holtverseny esetén a szóbelin több pontot szerzett csapat ér el jobb helyezést, amennyiben ez is azonos, akkor az első fordulóban magasabb pontszámot elért csapaté a jobb helyezés. A döntőben a kategóriánkénti legjobb 6 csapat részesül jutalomban. A tanárokat induló diákjaik száma és eredményessége alapján díjazzák, ugyanezen szempontok szerint körzetenként és a döntőn egy-egy tanári fődíj is kiosztásra kerül.

A versenyen az értelmi nevelés mellett azonos szerephez jut az érzelmi nevelés: külön erre a célra összeállított zenei szerkesztéssel fogadják a rendezvényre érkezőket. A versenyzők asztalán gyümölcs és egy szál rózsza várja a csapatokat, a rózsza egy fehér papíron, amin ezt olvashatják: „Az igazat érteni, a szépet érezni, a jót gyakorolni kell!” és a papír alján egy felszólítás: „Ezzel a virággal a verseny után szerezzetek valakinek örömet!”

5. Gordiusz Matematika Tesztverseny

Dr. Poronyi Gábor irányításával pécsi matematikatanárok 1996-ban feleletválasztós tesztversenyt rendeztek középiskolásoknak Baranya megyében a Zrínyi Ilona Matematikaverseny folytatásaként. A kedvező fogadtatáson felbuzdulva a következő évtől kezdve már kétfordulós (megyei/körzeti, majd országos döntő Pécsen) Gordiusz Matematika Tesztversenyt hirdettek meg és bonyolítottak le. A diákok hamar megszerették ezt a versenyt, így évről évre nőtt a helyszínek és versenyzők száma. A határon túli diákok 1998-ban kapcsolódtak be a versenybe először. A Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány 2004/2005 tanévtől kezdődően szervezi a versenyt. Az elmúlt évben az indulók száma több mint 15000 volt. A két forduló

verseny (területi és országos) teszt formájában kerül lebonyolításra. A versenyen 9-12. osztályos tanulók vehetnek részt.

A verseny elsődleges célja a matematika népszerűsítése. A feladatsorok megoldására fordított kevés idő (egy feladat megoldására átlagosan 3 perc jut) gyors, fegyelmezett és logikus gondolkodásra nevel. A feladatok szövegeinek megértéséhez fontos a magyar nyelv elemeinek pontos használata. A versenyre való felkészülés fejleszti a tanulók akaraterejét, kitartását. A verseny kiváló lehetőség az új, kétszintű érettségire való felkészülésre is, mivel a középszintű érettségi első részében is rövid idő alatt kell sok, különböző témához kapcsolódó, egyszerű feladatot megoldani.

A versenyen nem csak a magyarországi középiskolások vehetnek részt, hanem a határon túli erdélyi, kárpátaljai diákok is (mindenki számára magyar nyelvű a feladatlap!). A megyei (területi) fordulót saját iskolájukban, illetve kijelölt körzeti iskolákban írják meg a tanulók. Erre általában február közepén kerül sor. Az első fordulóban és a döntőben is 30 feladatot tartalmazó, évfolyamonként különböző feladatsort kell megoldani 90 perc alatt. Minden feladat után öt válasz szerepel, ezek közül kell az egyetlen helyeset kiválasztani. A versenyen a sok feladat miatt könnyű és nehéz feladatok is szerepelnek. A kódlapon rögzített válaszok értékelése számítógéppel történik, így az értékelés gyors és objektív. Az értékelés a gimnáziumi és szakközépiskolai kategóriákban külön történik. A megfelelő pontszámot elért tanulókat hívják be az országos döntőbe. A döntő helyszíne Kecskemét, április második felében kerül megrendezésre. A nevezési díj 1000 Ft/fő, határon túli versenyzőknek 300 Ft/fő.

6. Kalmár László Matematika Verseny

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulat /TIT/ még az 1960-as években indította el a Kis Matematikusok Baráti Köre /KMBK/ mozgalmat. Ennek keretében a matematikában tehetséges tanulók szakköri foglalkozásokon vettek részt. Később versenyeket is rendeztek részükre, először területi, majd 1971-től országos szintűt. Ez a verseny 1977 óta Kalmár László nevét viseli, aki néhány héttel halála előtt – mint a TIT Matematikai Választmányának az elnöke – még közreműködött a KMBK verseny országos döntőjének szervezésében és lebonyolításában.

Kalmár László



A Kalmár László Országos Matematika Versenyt az 1980-as évek végétől minden évben a TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület rendezi meg a TIT megyei szervezeteinek a közreműködésével. A kétfordulós versenyen először a matematikában kivételesen tehetséges 10-14 éves diákok vettek részt, később kibővült a verseny a 3-4. osztályos korosztállyal. A megyei fordulót, amelyre bárki jelentkezhet, megyénként több városban és Budapesten azonos időpontban tartják (március közepe). Ezeken évente körülbelül 6000-8000 az indulók száma. A verseny nevezési díja 1000 Ft/fő. A 3-4. évfolyamosoknak 60 perc, az 5-8. évfolyamosoknak 90 perc áll rendelkezésre a hagyományos, 4-5 feladatból álló feladatsor kidolgozására. A két napos országos döntőbe az évfolyamonkénti 20-25 legjobb eredményt elért tanuló jut. Ezt általában június második felében rendezik. A 3-4. osztályos tanulók Nyíregyházán versenyeznek, az 5-8. évfolyamosoknak rendezett országos döntő helyszíne pedig a váci Táncsics Mihály Mezőgazdasági Szakképző Iskola 1992-től. A döntő mindkét napján egy-egy, a megyeihez hasonló feladatsort kell megoldani a versenyzőknek. A szabadidőben a szervezők

érdekes programokkal teszik emlékezetessé az itt töltött napokat. Ebben szerepel kirándulás a környéken, (Visegrád, Vácra, Gödöllő, Nagybörzsöny) vagy váci városnézés, sportversenyek és a feladatok megbeszélése. A két nap legizgalmasabb része természetesen a váci Városháza Dísztermében megrendezésre kerülő eredményhirdetés. Ekkor mindenki részesül elismerésben és eredményének függvényében tárgyi jutalomban is. A verseny célja kezdettől fogva a tehetségek korai felkutatása és gondozása. A verseny szakmai irányítója 30 éven át dr. Reiman István tanár úr, a Budapesti Műszaki Egyetem professzora, a magyar matematikai diákolimpiai csapat egyik vezetője volt.



Reiman István

Reiman tanár úrtól a zsűri elnöki pozícióját egy másik, igen nagy tudású, a diákokat jól ismerő tanár, dr. Urbán János vette át, aki az indulástól kezdve részt vett a feladatsorok összeállításában is.



Urbán János

Telefon: 06-1/266-2246

E-mail: tittlekiegyesulet@t-online.hu

Fax: 06-1/317-0989

Honlap: <http://www.tittleki.hu>

7. OKTV (Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny)

A versenyt az Oktatási Hivatal szervezi, a matematikát szerető és azt eredményesen tanuló diákok teljesítményének összemérésére a 11. és a 12. évfolyamon. A versenyzők legjobbjai közül sok évtizede országosan, illetve az egész világon elismert matematikus, közmegebecsülésnek örvendő matematikatanár, alkotó természettudós és mérnök került ki. Az első ilyen jellegű versenyt 1923-ban rendezték. A matematika országos versenye 1947-től vált rendszeressé, de Országos Középiskolai Tanulmányi Versenynek csak 1957-től nevezték. 1967-ig egy kategóriában versenyeztek a diákok, 1967-től 1973-ig két kategóriát, 1973-tól 1984-ig három kategóriát szerveztek. Négykategóriás rendszer működött 1984-től 1990-ig, ebben az időszakban jelent meg először önálló kategóriaként a szakközépiskola. A szakközépiskolások I., a nem speciális matematika tagozatos gimnazisták II., végül a speciális matematika tagozatosok III. kategóriájának rendszere 1990 óta biztosítja az ország legjobb középiskolás matematikusainak, hogy képességeiket összemérhessék a versenyen. A verseny az I. és II. kategóriában 3 forduló, a III. kategóriában kétforduló. Az első, iskolai forduló októberben, a második forduló (középdöntő): január elején, a harmadik forduló (országos döntő) március elején kerül lebonyolításra.

Nevezési díj nincs. A résztvevők száma az első fordulóban 5000 körüli szokott lenni, ennél többen csak az angol nyelv és időnként a biológia OKTV versenyein vesznek részt. A második fordulóba jutó versenyzők száma változó, de kategóriánként körülbelül 400 diák jut be. Az országos döntőbe kategóriánként maximum 50 tanulót hívnak be. Minden forduló után a versenybizottság állapítja meg a továbbjutás ponthatárát. 2008-tól az I. kategóriában a versenybizottság javaslatára és az Oktatási Hivatal egyetértésével és engedélyével a második fordulóban elért pontszám 20%-át a döntőben elért pontszámhoz hozzáadják, és ezzel alakul ki a végleges sorrend. A második fordulóba hívható versenyzők számát az Oktatási Hivatal állapítja meg a következő szabályok szerint:

- 3000-nél több jelentkező esetén legfeljebb 300 fő,
- 3000 és 600 közötti jelentkező esetén a jelentkezők legfeljebb 10%-a,
- 600-nál kevesebb jelentkező esetén legfeljebb 60 fő.

A döntőbe hívható versenyzők számát a versenybizottság az előző fordulóban elért pontszám alapján állapítja meg, ez a fentiek szerint 50-nél több nem lehet.

Az I. kategóriában a versenybizottság igyekszik változatos, alkalmanként a szakközépiskolák oktatási gyakorlatához közelebb álló feladatokat kitűzni a versenyen. A második kategóriában a versenybizottság többek között arra törekedett, hogy a tananyagban, az utóbbi években nagyobb hangsúlyt kapott új témák is megjelenjenek a kitűzött feladatokban. A III. kategória feladatai továbbra is a magas színvonalon tanult elméleti anyag ötletes alkalmazását igénylik. Az utóbbi évek feladatai és megoldásai az Oktatási Hivatal honlapján megtalálhatók, régebbi feladatok pedig könyvekben, illetve a versenyvizsga.hu internetes oldalon hozzáférhetők.

Telefon: 06-1/374-2100

E-mail: info@oh.gov.hu

Fax: 06-1/374-2485

Honlap: <http://www.oh.gov.hu>

3. fejezet - Az országos matematikai versenyek rendszere, típusai II.

1. Kürschák József Matematikai Tanulóverseny

A Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt 1894-ben indította a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat közös elődje, a Mathematikai és Physikai Társulat abból a célból, hogy maradandó emléket állítson báró Eötvös Lorándnak, a társulat akkori elnökének vallás- és közoktatásügyi miniszterre történt kinevezése alkalmából. A versenyt eleinte a „Mathematikai és Physikai Társulat versenye”-nek nevezték, később „Mathematikai tanulóverseny”-ként említették, majd Eötvös halála után „Eötvös Loránd matematikai tanulóverseny” lett a kialakult elnevezés. (Voltak időközben kisebb eltérések, a KöMaL beszámolója szerint például 1926-ban „Eötvös Lóránt XXIX. matematikai tanulmányverseny”-t rendeztek.) A versenyen eleinte 100, ill. 50 koronával járó I. és II. b. Eötvös díjban, ill. dicséretben részesítették a legjobb versenyzőket. A verseny eredetileg megjelölt célja ugyan a matematika és fizika szaktárgyak művelésére való rátermettség megállapítása volt, fizika feladat sosem szerepelt a versenyen.

A versenyen érettségizett tanulók indulhattak és használhatták a magukkal hozott könyvet és jegyzetet. A kezdetektől egészen a mai napig érvényes, hogy egyetlen fordulóban három feladatra 4 óra munkaidő áll rendelkezésre. A hagyomány szerint mindig eredeti, más versenyen még nem szerepelt feladatokból áll össze a példasor. Fontos szempont még, hogy a feladatok megoldása minél kevesebb előismeretet, ám annál több ötletességet és lényeglátást igényeljen. Nevezési díj nincs, a résztvevők száma a 2009/2010-es tanévben 105 fő volt.

A KöMaL eleinte részletesen beszámolt a versenyről, a díjakat pedig maga Eötvös Loránd adta át. A későbbi KöMaL beszámolók a feladatok és megoldásaik ismertetésén túl csak a nyertesek adatait közölték néhány sorban.

A versenyeket az első világháborúig Budapesten és Kolozsvárott rendezték meg, az 1919 és 1921 közötti három évben érhető okokból nem volt verseny, majd 1922-től Kolozsvár helyett Szeged lett a második helyszín. A második világháború alatt ismét kényszerű szünet következett: 1944 és 1946 között kimaradt 3 év, de egyúttal az Eötvös Lorándról elnevezett matematikaversenyeknek is vége szakadt. Az alapító jogutódja, a Bolyai János Matematikai Társulat 1947-ben szervezte újra a versenyt, ám azt ekkor Bolyai Jánosról nevezték el. A szabályok pedig annyiban változtak, hogy az érettségi előtt álló tanulóknak is megengedték az indulást. A verseny 1949-ben kapta meg a jelenlegi elnevezését. Az újraindulás után minden évben megrendezték a versenyt valamikor október eleje és november eleje között, az egyetlen kivétel 1956 volt. (Az 1990-es taxisblokádnál is megtartották a versenyt: Budapesten gyalog vagy kerékpáron érkeztek a versenyzők az Árpád gimnáziumba.) A Kürschák-verseny sikerének két fontos tényezőjét emeljük ki. A kitűzött feladatok kiválóan megfelelnek a kezdetben megfogalmazott céloknak: a megoldáshoz a középiskolában tanított ismereteken túl nincs szükség további tudásra, hanem sokkal inkább a matematikai gondolkodásmód alkalmazásával lehet elérni a sikert. Íratlan hagyomány, hogy a feladatok megoldásához lehetőleg ne fárasztó számolás, hanem az összefüggések átlátása illetve egy-egy jó ötlet vezessen. Ebben a tekintetben a verseny talán a világon is egyedülálló. A verseny sikerének másik kulcsa a Kürschák által elindított munka, a Matematikai versenytételek. Ez az a könyv, amiben az 1894 és 1928 közötti versenyek feladatait (tételeit), azok megoldását és a díjazottak neveit találjuk. Kürschák több jól átgondolt megoldást is közölt az egyes feladatokra, amiket számos esetben kiegészítésekkel, „jegyzetekkel” látott el. Ezekben a jegyzetekben a feladatok háttérére világított rá, rámutatott a lehetséges általánosításokra, és olyan tételeket, módszereket ismertetett, amik az adott problémakör jobb megértését segítették elő. Kürschák 1933-ban bekövetkezett halála után a verseny továbbra is a fentiek jegyében folyt. 1964-ben megjelent a Matematikai versenytételek második kötete, Hajós György, Neukomm Gyula és Surányi János szerkesztésében.



Hajós György



Neukomm Gyula

A kötet az 1929 és 1963 közötti versenyeket dolgozza fel, felépítése hűen követi a Kürschák-féle formátumot, azzal a különbséggel, hogy a díjazottak osztályát is jelzik, amennyiben azok a verseny idején még nem érettségiztek. A munka sikerét jól mutatja, hogy a versenytételek nemcsak a hazai, matematikai versenyeken induló középiskolásoknak lett „kötelező olvasmánya”, hanem 1963-ban napvilágot látott a Random House kiadásában megjelent angol fordítás „Hungarian Problem Book” címmel, amit később tovább fordítottak japánra. A könyv 1972-ben megjelent román nyelven, majd 1974-ben az orosz nyelvű kiadás következett, és azóta több más nyelven is elérhetővé vált a munka, így tudunk például a perzsa változatról is. A versenytételek evolúciója egyébként a megjelenésük után is folytatódott: további jegyzetekkel és megoldásokkal egészült ki az újabb kiadások során. A szerzők hangsúlyozták, hogy a szerkesztés mindvégig az eredeti elgondolás szellemében folyt. Neukomm Gyula 1957-ben, Hajós György pedig 1972-ben hunyt el, ezt követően az utolsó „nagy öreg”, Surányi János lett a szervezőbizottság elnöke. Az ő önálló munkája a versenytételek 3. és 4. kötete, amiben az 1964 és 1987 közötti, ill. az 1988-tól 1997-ig rendezett versenyeket dolgozza fel. Surányi János 1998-ban lemondott a szervezőbizottságban betöltött elnöki tisztségéről. Helyét Károlyi Gyula vette át, aki 2002-ig volt tagja a bizottságnak, majd érintettsége okán visszavonult. Surányi János azonban 2006-ig, egészen haláláig (a bizottság tiszteletbeli elnökeként) részt vett a munkában: a feladatok kiválasztásában és a dolgozatok javításában egyaránt. Különös egybeesés, hogy a verseny újraindítását követő 60. évben szervezett Kürschák-verseny eredményhirdetése volt életének utolsó napja.

A Kürschák-versenyen elért díj volt az egyik első sikere számos, később komoly tudományos karriert befutott egykori versenyzőnek. A már nem élők közül a teljesség igénye nélkül az alábbiakat emeljük ki (időrendben): Fejér Lipót, Kármán Tódor Tivadar, König Dénes, Haar Alfréd, Szegő Gábor, Radó Tibor, Rédei László, Kalmár László, Teller Ede, Bakos Tibor, Gallai Tibor, Szele Tibor, Schweitzer Miklós.

A háború után jó darabig a Kürschák-verseny mellett a III. és IV. osztályosoknak az OKTV és az I. és II. évfolyamon az Arany Dániel verseny jelentett további megmérettetési lehetőséget. Mindkét versenyen számos kategóriában, több forduló után választották ki a legjobbkat. Mivel a Kürschák-versenyen mindez egy fordulóban történt, és a teljes középiskolás mezőny mellett az adott évben érettségizők is részt vehettek, a Kürschák-díj tekinthető a legrangosabb elismerésnek, amit hazai matematikaversenyen középiskolás diák elérhetett. A Kürschák-versenyen elért helyezések (akárcsak most) számítottak a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő csapat kerettagjainak kiválasztásakor. További lényeges vonzerő volt, hogy az OKTV-hez hasonlóan, a Kürschák-verseny első tíz helyezettjének nem kellett matematikából érettségiznie, és az egyetemi felvételi vizsgát is maximális pontszámmal számították be. Tekintve, hogy nem a minisztérium szervezte a versenyt, ez a Bolyai Társulatnak és a versenynek is egyfajta elismerése volt. Az 1990-es éveket követően fokozatosan megváltoztak a fenti feltételek. A felvételi rendszer reformjával megszűnt a kötelező felvételi kedvezmény: a lehetőséget az egyes egyetemekre bízta a minisztérium. A mai versenyek közönsége a

fenti okok miatt ennél sajnos jóval kisebb. Mára ott tartunk, hogy az utóbbi években a beadott dolgozatok száma 100 és 130 közé esett vissza. Ennél persze valamivel többen vesznek részt a versenyen, de a Budapesten kívüli 19 másik helyszínről általában nem érkezik adat a résztvevők számáról. A verseny lebonyolítása is megváltozott. A versenyzők 2003 óta nem használhatnak sem írott, sem elektronikus segédeszközt.

Telefon: 06-1/225-8410

E-mail: bjmt@renyi.hu

Fax: 06-1/201-6974

Honlap: <http://www.bolyai.hu>

2. Varga Tamás Matematikaverseny

1987-ben Reményi Gusztávné, az ELTE Trefort Utcai Gyakorló Gimnázium és Laczkó László a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium vezetőtanárai javasolták a BJMT oktatási bizottságában, hogy a Társulat szervezzen és rendezzen – a középiskolások versenyeihez hasonlóan – az általános iskolák felső tagozatos tanulói számára többfordulós matematikaversenyt. A gondolatot a Társulat felkarolta, és gondos előkészítést követően 1988-ban újtárra indították az abban az évben még csak kísérleti jellegű, de az 1990/91. tanévtől kezdődően már a magyar matematikaoktatást megújító Varga Tamás nevét viselő matematikai versenyt.



Varga Tamás

Az első öt évben kikristályosodott a versenyeztetés rendje. Miután megjelentek a 6 illetve 8 osztályos középiskolák, helyenként speciális tagozatokkal, emiatt már évfolyamonként két kategóriában versenyeznek a tanulók. Hatodik éve a Varga Tamás Matematikaverseny szervezője és rendezője a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola.

Az országos verseny háromfordulós: az első (iskolai) fordulóban, melyet október/november hónapban bonyolítanak le, a 7. és 8. osztályba járók versenyeznek matematika óraszámuktól függetlenül. A második (megyei-fővárosi) fordulóba a legalább 50%-os teljesítményt elérőket januárban hívják be, de már két kategóriában, attól függően, hogy a versenyző matematika óraszámát meghaladja a heti 4 órát vagy sem. A harmadik fordulót (országos döntő) március/áprilisban rendezik ugyancsak 2-2 kategóriában, a magasabb óraszámúak létszáma kategóriánként max. 50-50, míg a kisebb óraszámúakból kb. 100-100 versenyző küzd az első három helyezettnek járó díjakért, és a további helyezésekért. A versenyre az iskolák 5000 Ft nevezési díjjal indítják tanulóikat, a nevezési lapot postai úton küldik el a versenyt szervező intézménynek. A verseny feladatait a Társulat tagjaiból álló versenybizottság (Deli Lajos, Kosztolányi József, Pogács Ferenc, Rohovszky Rudolf, Siposné Tóth Krisztina) állítja össze, és tűzi ki. Ez a bizottság javítja a döntő feladataira adott megoldásokat, és állapítja meg a versenyzők végső sorrendjét. A versenybizottság törekszik – ha nem is mindig sikerrel – az iskolai tananyagra támaszkodó, azt minél szélesebben felölelő olyan feladatok kiválasztására is, amelyek túlmutatnak a kötelező iskolai gyakorló feladatokon. E válogatási elv főszerepet kap a harmadik fordulóra kitűzött feladatokban.

Az 1. fordulóban 12 369 fő vett részt a 2009/2010 tanévben, a 2. fordulóban 1199 fő, míg a 3. fordulóban 222 fő.

Telefon: 06-22/504-358

E-mail: vargatamas@hetvezer-szfv.sulinet.hu

Fax: 06-2-2/504-359

Honlap: <http://www.hetvezer-szfv.sulinet.hu>

3. Zrínyi Ilona Matematikaverseny

Az 1989/90-es tanévben Háriné Kun Éva javaslatára a kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskola matematikai munkaközösségének három tagja (Csordás Mihály, Gálné Szalontai Mária és Háriné Kun Éva) elhatározták, hogy mindegyikük rendez az iskola tanulóinak egy-egy matematikaversenyt. Ekkor Csordás Mihály javasolta, hogy az általa szervezett versenyt városi szinten 3-8. osztályos tanulók számára rendezzék meg, és a verseny formája feleletválasztós teszt legyen. Az első versenyt 1990-ben rendezték meg. A hagyományos versenyektől eltérő forma nagy sikert aratott a tanulók körében. Ez arra buzdította a szervezőket, hogy a következő évben az egész megyében, majd 1992-től országos szinten rendezzék meg a versenyt. 1993-ban az ország minden megyéje, 1994-ben Budapest minden kerülete bekapcsolódott a versenybe. 1995-ben először vettek részt a versenyen a határainkon túl élő magyar gyerekek Erdélyből, Kárpátaljáról és Szlovákiából. Az egész verseny szervezeti formája 1995-től megváltozott, az addigi megyei szervezést egy központi országos szervezés váltotta fel. Ennek lényege, hogy az addigi megyénként eltérő szervezés egységessé vált. Ettől kezdve az addigi kézi javítást szkenneres javítás váltotta fel. 1997-től az országos döntő idején a versenyzőket a Matekergo nevű újság tájékoztatja a legfontosabb eseményekről. A 2005. évi verseny óta a feladatok javítása, az adatfeldolgozás a Matematikában Tehetséges Gyermekéért Alapítvány (Kecskemét) saját tulajdonú szkennerevel (a T-Mobile Magyarország adta támogatásként) és feldolgozó programjával (Cardinal Kft.) történik. Ez még pontosabb és gyorsabb feldolgozást tesz lehetővé. 2007-től bevezették az interneten történő nevezést. 2008-tól megkezdődött a Zrínyi és Gordiusz versenyek fokozatos összevonása. Az évek során kialakult a verseny végleges formája, sajátos arculata.

Az 1. forduló kiírása az interneten jelenik meg szeptemberben. A nevezést az iskolák szintén interneten tehetik meg november végéig. A verseny nevezési díja 1000 Ft/fő, határon túli tanulók számára 300 Ft/fő. Január végére számítógéppel elkészülnek a verseny lebonyolításához szükséges dokumentumok (tanulók ülésrendje, kódlap, feladatlapok). Februárban az utolsó előtti pénteken kerül sor az 1. forduló lebonyolítására megyénként a szervezők által felkért 10-15 iskolában. A kódlapok értékelését az alapítvány munkatársai végzik számítógép segítségével. Vasárnap késő este kerülnek fel a pontszámok az internetre. Itt mindenki megnézheti a saját pontszámait, megoldásait, és a következő hét szerdán 14 óráig nyújthat be kifogást a javítással kapcsolatban. A határidő lejártá után az eredmények véglegesek. A versenyt követő második és harmadik héten minden megyében megtörténik az ünnepélyes eredményhirdetés. Az egyéni eredmények mellett az egyes iskolák három fős csapatait is értékeli, így az iskolák között is folyik verseny. A megyei eredményhirdetés után az eredmények azonnal láthatóak az interneten. Az országos döntő három napos, általában Kecskeméten (2007-ben Veszprémben és 2010-ben Székesfehérváron) rendezik, a versenyt gazdag szabadidős programok egészítik ki. Ezek a döntőbe jutott 430-450 tanuló és hivatalos kísérőik ingyenesen vehetnek részt.

Minden évfolyam feladatsorát egy gyakorló pedagógus állítja össze. A feladatsorok összeállítói szeptemberben olyan feladatokat keresnek, amelyeket több évfolyam feladatsorában is szerepelhetnek. Ezek közül és a Matekergo Alapítvány által kiírt pályázatra érkező feladatokból kiválogatásra kerülnek a feladatsorokban szereplő közös és hasonló feladatok. A feladatsorok először egy belső lektoráláson mennek át (mindegyik feladatsort három másik készítő nézi át és javítja), majd két külső lektor véleményezi a feladatsorokat. Ezután készülnek el a végleges változatok. Az alapítvány a feladatsor összeállításáért járó összeg nagyobb részének kifizetését feltételként teljesítéséhez köti. Ilyenek például a következők: a megyei feladatsor első ötödének megoldási átlaga 80% feletti, a hibátlan megoldók száma 1 és 5 közötti, az országos döntőbe jutás pontszámára az elérhető maximális pontszám 80-90%-a, a döntő győztesének eredménye 90% feletti legyen, a díjazott helyeken ne legyen holtverseny, stb. Ez a rendszer garantálja a jó feladatsorok előállítását. A feladatsorokban az egészen egyszerű és a nagyon bonyolult feladatok is helyet kapnak. A verseny – a kezdeti idegenkedést leküzdve – szakmai körökben is egyre elismertebb lett. Az 1995/96 tanévtől kezdve több éven át a MOZAIK módszertani napok keretében Csordás Mihály és Nagy Tibor az ország különböző városaiban (Budapest, Győr, Miskolc, Pécs, Szeged, Székesfehérvár és Szombathely) előadást tartottak a verseny tanulságairól. Az 1995. évi békéscsabai és a 2005. évi salgótarjáni Rátz László vándorgyűlésen Csordás Mihály feladatmegoldó szemináriumot tartott a verseny feladataiból. A 2009. évi veszprémi Rátz László Vándorgyűlésen Csordás Mihály és Csordás Péter tartottak előadást a verseny szervezeti formájáról és a verseny feladatainak megoldása során előforduló tipikus gondolkodási hibákról. Azóta is egyre többször jelennek meg cikkek szakmai folyóiratokban, amelyek a verseny feladataival, tanulságaival foglalkoznak. A verseny elindulásakor a szervezőkben megfogalmazódott, hogy

sokféleképpen lehet valamit csinálni, de csak jól érdemes. A verseny mindenkor szervezőit ez az igényes munkára való törekvés mind a mai napig jellemzi. Ez tette lehetővé, hogy az egész rendezvény kicsit a matematika ünnepévé vált, s Kecskemét a legnépesebb magyarországi matematikaverseny központja lett.

A résztvevők száma a 2009/2010-es tanévben az 1. fordulóban 52 563 fő volt, a 2. fordulóban 435 fő volt.

Telefon: 06-76/483-047

E-mail: mategye@mail.datanet.hu

Fax: 06-76/483-047

Honlap: <http://www.mategye.hu>

4. Feladatok

1.

Nézzen utána, hogy megyéjében/régiójában milyen matematikai versenyeket szerveznek!

2.

Állítson össze 9-10. évfolyamos diákok számára iskolai válogató versenyhez feladatlapokat, kifejtendő választ igénylő feladatokkal, valamint készítse el a megoldási útmutatót is!

4. fejezet - A teszt-versenyek feladattípusai

A hazai matematikaversenyek sorában a legkésőbb – csak az 1990-es évektől kezdődően – honosodtak meg a teszt jellegű matematikaversenyek. Elsőként a Zrínyi Ilona Matematikaverseny indult el, majd azt követte a Gordiusz és a Nemzetközi Kenguru Matematika Verseny. Ma már egyre több helyi, vagy megyei szintű versenyt is teszt formájában bonyolítanak le (pl. Hajnal Imre Matematikai Tesztverseny). A tesztversenyeken előfordulnak nyílt végű kérdések és eldöntendő kérdések egyaránt, általában 4-5 adott válasz közül kell a helyeset kiválasztani. A feladatok jellemzően játékos formában vannak megfogalmazva, gyakran ábrákkal kiegészítve, és nehézségi szintjük is különböző, versenyenként általában fokozatosan nehezednek (nehezebb feladatok természetesen több pontot érnek). Kezdetben bizonyos ellenállás volt tapasztalható a tanárok részéről a tesztversenyekkel szemben, mert a gondolkodási folyamatot és a feladatok részletes kidolgozását ezeken nem lehet nyomon követni, ami a hagyományos versenyeknél pedig a legfontosabb szempont. A tesztversenyek más típusú készségeket, képességeket igényelnek, mint a hagyományos versenyek. A matematika tananyag ismeretén kívül itt szükség van a tanuló döntési képességére, logikai készségére, gyors gondolkodásra, kreativitásra, viszont kevésbé van szükség a pontos matematikai szimbolizmus és szaknyelv használatára. Mivel ezek a feladatok sokszor gyakorlatiasak, ezért az ilyen gondolkodású, gyakorlati problémák iránt érzékenyebb, de esetleg kevésbé precíz matematikai tudással rendelkező tanulók sokszor eredményesek az ilyen típusú feladatok megoldásában. A problémamegoldó gondolkodást a tesztfeladatok ugyanolyan jól fejlesztik, mint a kidolgozandó feladatok, de az a tény, hogy a részletes kifejtést nem kell leírni, sokkal több tanuló számára teszi elérhetővé a versenyen való részvételt, és így több tanulónak nyújt sikerélményt a matematikával kapcsolatban, mint a hagyományos versenyek. A Kenguru versenynek kimondott célja, hogy a matematikát közelebb hozza a tanulók minél szélesebb rétegeihez, és lehetőséget biztosítson egy-egy iskolából a diákok nagy tömegének a versenyen való indulásra – akár a matematikából gyengébb eredménnyel rendelkezőknek is. A matematika órákon való eredményesség sokszor nem a készségeken, képességeken múlik, hanem a szorgalom, hozzáállás, matematikával szembeni attitűdök, iskolatípus, stb. is befolyásolja. A tesztversenyeken való részvétellel éppen ezeket a hiányosságokat lehet áthidalni, és nagyobb motivációt nyújtani a tanulóknak. Az egyik ellenérv az ilyen típusú versenyekkel szemben az volt az első időkben, hogy a matematika oktatásában a számonkérésben nem szoktunk tesztfeladatokat adni, mert hagyományosan azt kérjük számon a tanulóktól, hogy minden lényeges momentumot, gondolati egységet írjanak le, ami módszertani szempontból nagyon helyes. Ma már ez a kritika nem tűnik helyénvalónak, mert a középszintű érettségi I. részében pontosan ilyen jellegű rövid feladatok szerepelnek (bár többségük nem feleletválasztós, hanem nyílt végű). Ez a fajta gondolkodási mód, melyben a döntésnek, a biztosan hibás válasz kiszűrésének lényeges szerepe lehet, a gyakorlati élet sok területén hasznosítható képességek elsajátítását segíti. Egy másik ellenérv, hogy nem hozza ki a úgy a matematika tudásbeli különbségeket a tanulók között, hiszen „véletlenül” is eltalálhatja a jó választ valaki akkor is, ha nem tudja a pontos eredményt kiszámolni. A tapasztalat azt mutatja, hogy a hagyományos versenyeken jól szereplő tanulók a tesztversenyeken is jó eredményeket érnek el, és emellett azoknak is sikerélményt nyújthatunk, akik ezt a hagyományos feladatmegoldó versenyeken nem tudnák elérni.

A feladatsorok összeállítói nagy gondossággal választják ki a feladatokat, a nehézségi szinteket is be kell állítaniuk. A feladatok nemzetközi szinten is megállják a helyüket. A tesztversenyek egyik pozitívumaként szokták felhozni, hogy a javítás, a tesztlapok feldolgozása gyorsabb és egyértelműbb, ma már gyakorlatilag számítógép végzi. Ezáltal biztosítva van a teljes objektivitás is. Egy másik pozitív vonás, hogy míg a hagyományos versenyeken 4-6 feladat van átlagosan, addig tesztfeladatból 20-30, ami azt jelenti, hogy a matematika sokkal több területét felölelhetik a feladatok, ezáltal a tanulók tudásáról szélesebb spektrumban tájékozódhatunk. Ma már több olyan honlap is található, amelyen ilyen tesztfeladatok szerepelnek, akár érettségire, akár versenyre felkészítés céljából (pl. www.microprof.hu), valamint évente több kiadvány is megjelenik a lezajlott versenyek feladataival, melyek mind a felkészülést segítik. Mivel manapság a matematika tanításának egyik kritikus pontja a motiváció, a tanulói érdeklődés felkeltése, a tesztversenyek kitalálói és lebonyolítói úttörő munkát végeznek ezen a téren, ami méltánylandó teljesítmény, és nem kis segítség a tanároknak a mindennapi munkában.

A továbbiakban a 7-12 évfolyam számára készített tesztversenyek feladataiból mutatunk be néhányat, egyszerűbb és nehezebb feladatokat egyaránt, és néhány didaktikai megjegyzést fűzünk hozzájuk. A tesztek megoldását az olvasóra bízunk.

1. Tesztfeladatok 7-8. osztályosoknak

Könnyebb feladatok (3 pontosak):

1.

Az alábbi kifejezések közül melyiknek legnagyobb az értéke?

A) $10 \cdot 0,001 \cdot 100$ B) $0,01 : 100$ C) $10000 \cdot 100 : 10$ D) $0,1 \cdot 0,01 \cdot 10000$ E) $100 : 0,01$

2.

A parkban 64 pad van, melyek közül 18-cal több padon ülnek, mint ahány üres. Minden padon, amin ülnek, két ember pihen. Hányan üldögélnek a parkban?

A) 41 B) 74 C) 46 D) 36 E) 82

3.

Mekkora a legnagyobb szám azon 11 szomszédos egész szám közül, melyek összege 0?

A) 5 B) 6 C) 11 D) 4 E) 7

4.

Krisztián 17 g vízhez 3 g sót kevert. Hány százalékos sóoldatot kapott?

A) 6 B) 17 C) 16 D) 15 E) 20

5.

Afrika a maga 30 millió négyzetkilométeres területével a harmadik legnagyobb földrész Ázsia és Amerika után. Afrika területének $\frac{4}{5}$ részét sivatag vagy szavanna borítja. Hány millió négyzetkilométer sivatag és szavanna található összesen Afrikában?

A) 4,5 B) 45 C) 2,4 D) 24 E) 25

6.

A virágnektár 70% vizet tartalmaz, és 17% méz készül belőle. Hány kg nektárt kell gyűjteni a méheknek 1 kg mézhez?

A) 5,5 B) 4,75 C) 5 D) 5,88 E) 3,88

7.

Az Óperenciás-tenger mindkét partján van egy-egy kikötő. Mindkettőből minden reggel 7 órakor indul egy-egy hajó a másik kikötőbe. Az út 170 óráig tart. Egy hajón utazva hány hajóval találkozunk szembe?

A) 8 B) 13 C) 15 D) 14 E) 7

8.

Ha $a - (a - (a - (a - (a - 1)))) = 1$, akkor $a = ?$

A) 2 B) -1 C) 1 D) -2 E) 0

9.

Egy háromszögnek van két 7 cm hosszú oldala. A harmadik oldal hossza cm-ben mérve egész szám. Legfeljebb hány cm lehet a háromszög kerülete?

- A) 14 B) 15 C) 21 D) 27 E) 28

10.

Egy osztályba 21 tanuló jár. Az osztályba járó lányok között nincs két olyan, aki fiú osztálytársai közül ugyanannyinak tetszik. Legfeljebb hány lány jár ebbe az osztályba?

- A) 5 B) 6 C) 9 D) 11 E) 15

Megjegyzés: Ezek a feladatok alapvető ismeretekre épülnek, általában egy kulcsgondolat kell a válasz megadásához, vagy egy rövid számolás. Legtöbbször közvetlenül egy tanult definíció, tétel vagy szabály felismerésén alapulnak.

Közepes nehézségű feladatok (4 pontosak):

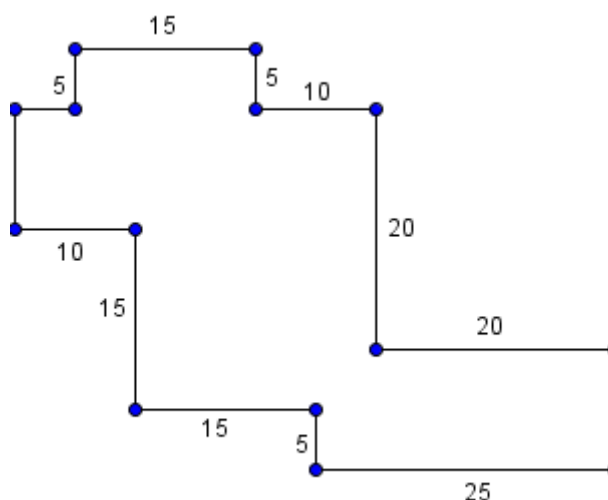
11.

Mely számjegyeket töröljük az 592647 számból, hogy a legnagyobb háromjegyű, páros számot kapjuk?

- A) 2, 4, 6 B) 2, 5, 6 C) 2, 6, 7 D) 2, 4, 5 E) 2, 5, 7

12.

Kriszta kertjének alaprajzát látod az ábrán. A távolságok méterben vannak megadva. Hány m² a kert területe?



- A) 800 B) 750 C) 850 D) 900 E) 700

13.

Egy régi típusú kenyérpíró egy perc alatt 4 szelet kenyér egyik oldalát tudja megpirítani. Minimum hány perc kell 9 szelet kenyér mindkét oldalának a megpirításához?

- A) 5 B) 6 C) 4 D) 8 E) 7

14.

Az elmúlt öt évben és idén nagypapa életkora osztható volt unokájáéval. Hány éves lehet a nagypapa?

- A) 64 B) 90 C) 66 D) 68 E) 86

15.

Jani, Feri és Józsi egy almásban dolgoznak. Jani 30 perc, Feri 45 perc, Józsi 36 perc alatt szed tele egyedül egy ládát almával. Mennyi idő alatt szednek 3 láda almát együtt?

- A) 36 B) 54 C) 111 D) 30 E) 37

16.

Egy sakkmester szimultánt ad. Az első órában a befejezett játszmák 90%-át nyeri meg, és 1 partit veszít el. A szimultán befejezésekor a mester az első órában be nem fejezett játszmáknak csak a 20%-át nyeri meg, 2 partit elveszít és 2 parti döntetlenül végződik. Hány partit nem fejezett be az első órában?

- A) 6 B) 7 C) 4 D) 5 E) 8

17.

Mennyi a $\frac{m \cdot a \cdot t \cdot e \cdot m \cdot a \cdot t \cdot i \cdot k \cdot a}{k \cdot ö \cdot n \cdot y \cdot v}$ tört értéke, ha a különböző betűk különböző, az azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek, és a számlálóban és a nevezőben is ezen számjegyek szorzata szerepel?

- A) 252 B) 5040 C) 2520 D) 0 E) 40320

18.

Öt év múlva Karcsi háromszor annyi idős lesz, mint 3 éve volt. Hány éves most Karcsi?

- A) 5 B) 6 C) 4 D) 8 E) 7

19.

Ha a 24009-et és a 41982-t ugyanazzal a négyjegyű számmal elosztjuk, mind a kétszer ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?

- A) 45 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

20.

Egy $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ -es téglalapot $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ -es négyzetekre osztunk. Hány négyzeten halad át a téglalap egyik átlója?

- A) 9 B) 12 C) 7 D) 11 E) 13

VIDEÓ

Megjegyzés: A közepes nehézségű feladatok már több gondolkodást igényelnek, de általános iskolai ismeretekkel mind megoldhatók. A logikus gondolkodásra, az ismeretek új, alkotó módon való alkalmazására ezeknél már nagyobb szükség van.

Nehezebb feladatok (5 pontosa):

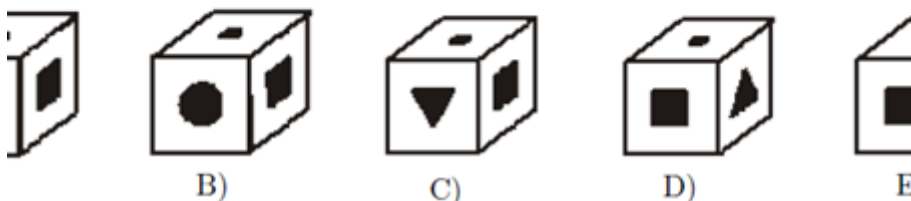
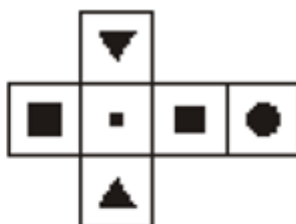
21.

Egy hajó hosszának, árbocmagasságának, a hajókapitány és kisfia életkorának szorzata 303335. A számok pozitív egészek. Hány éves a kapitány?

- A) 37 B) 31 C) 29 D) 35 E) 33

22.

A válaszokban szereplő rajzok közül melyik ábrázolja azt a kockát, amelyet az ábrán látható testhálóból készíthetünk?



23.

Hét rabló a zsákmányolt aranyat úgy osztja el, hogy névsor szerint vesznek annyit, amennyi az ott lévő aranyak számának a számjegyeinek az összege. Két teljes kör után az aranyak elfogynak. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezérnek lett több. Hányadik a vezér a névsorban?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

24.

Timi és Tomi ugyanabban az évben születtek, mindketten vasárnap. Timi április k -adikán, Tomi pedig május $5k$ -adikán. Hányadikán született Tomi?

- A) 20 B) 25 C) 15 D) 10 E) 30

25.

Mennyi a számjegyek összege a legkisebb olyan természetes számban, amely 6-ra végződik, és ha ezt a 6-ost a szám végéről töröljük, és átírjuk a szám elejére, akkor az eredeti szám 4-szeresét kapjuk?

- A) 30 B) 24 C) 27 D) 18 E) 21

26.

Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek legnagyobb valódi osztója éppen 15-szöröse a legkisebbnek (egy számnak 1 és önmaga nem valódi osztója)?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) végtelen sok E) más érték

27.

Hány olyan 10-nél nagyobb, 1000-nél kisebb természetes szám van, amelyben a számjegyek növekvő sorrendben követik egymást? (Például a 469 ilyen, mert $4 < 6 < 9$.)

- A) 84 B) 135 C) 120 D) 500 E) 495

28.

Péter állandó sebességgel kerékpározott el otthonról a nagymamájához. Ha $3 \frac{m}{s}$ -mal nagyobb sebességgel haladt volna, akkor háromszor olyan gyorsan odaért volna. Hányszor olyan gyorsan ért volna oda, ha $6 \frac{m}{s}$ -mal növelte volna meg a sebességét?

- A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 6 E) 7,5

29.

Egy számítógépes játékban a képernyőn található piros és kék körökkel egy lépés során az a változás történik, hogy 3 egyforma színű kör helyett 2 másik színű kör jelenik meg. Ha kezdetben 5 piros és 7 kék kör volt a képen, akkor az alábbi esetek közül hányat kaphatunk meg néhány lépés után: 1 piros és 1 kék, 9 piros és 1 kék, 1 piros és 9 kék, 2 kék?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) 4

30.

Hányféleképpen lehet elhelyezni 4 lila és 4 zöld korongot egy egy 4×4 -es táblán úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban egy lila és egy zöld korong legyen (egy mezőre csak egy korong tehető, és az elforgatással vagy tükrözéssel kapott állásokat különbözőknek tekintjük)?

- A) 108 B) 162 C) 216 D) 324 E) 432

Megjegyzés: A nehezebb feladatok akár 9-10 évfolyamos tanulók számára is nehézséget jelenthetnek, ezért a versenyeken gyakori, hogy átfedés van a feladatok között: néhány a nehezebb 7-8.-os feladatok közül megjelenik a felsőbb évfolyam feladatai között is.

2. Tesztfeladatok 9-10. osztályosoknak

Könnyebb feladatok (3 pontosak):

1.

Péter azt mondta, hogy a könyveinek 25%-a regény, $\frac{1}{9}$ -ed része pedig verseskötet. Elárulta még, hogy 50-nél több, de 100-nál kevesebb könyve van. Hány könyve van Péternek?

- A) 54 B) 56 C) 64 D) 72 E) 98

2.

A városi kutyapecér választásokon 5 jelölt indult. Semelyik két jelölt nem kapott ugyanannyi szavazatot, a győztesre 10-en szavaztak. Legfeljebb hány voksot gyűjthetett a legkutyautóbb kutyapecérjelölt?

- A) 6 B) 4 C) 7 D) 3 E) 5

3.

Egy étteremben egy főételért 2250 forinttal többet kell fizetni, mint egy desszertért. A főétel és a desszert együtt 12-szer annyiba kerül, mint a desszert. Mit mondhatunk a desszert áráról forintban?

- A) 190 és 210 között B) 230 és 250 között C) 210 és 230 között D) 400 forint felett E) 250 és 400 között

4.

Egy digitális órán egy nap során 00:00-tól 23:59-ig hány percen át láthatók a 2, 0, 0, 6 számjegyek egyszerre valamilyen sorrendben?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.

Rakd a következő négy számot növekvő sorrendbe: $A = (-2)^{-2}$, $B = (-3)^{-3}$, $C = (-4)^{-4}$, $D = -77^{\frac{1}{77}}$!

- A) $DABC$ B) $ABCD$ C) $BCAD$ D) $DBCA$ E) egyik sem

6.

Egy szem meggy húsa ugyanolyan vastag rétegben borítja a magot, mint amilyen vastag maga a mag. (Tekintsük a meggyet is, a magot is gömbnek.) Hányszorosa az ehető rész térfogata a mag térfogatának?

- A) 27 B) 9 C) 26 D) 3 E) 7

7.

Mennyi a b számjegy értéke, ha $\overline{bb} = b + b \cdot b + b$, ahol $\overline{bb}$ kétjegyű számot jelöl?

- A) 5 B) 9 C) 7 D) 8 E) 6

8.

Az alábbi számok közül melyik lesz minden n természetes szám értékére páratlan?

- A) $2003n$ B) $n^2 + 2003$ C) n^3 D) $n + 2004$ E) $2n^2 + 2003$

9.

Mi a legnagyobb n kitevő, melyre a 8^n osztója a 44^{44} -nek?

- A) 29 B) 44 C) 13 D) 8 E) 88

10.

Az ábrán látható mindegyik kör területe b , a négyzeté pedig a (I). Mekkora a három kört körülvevő görbével határolt síkidom (II) területe?



- A) $3b$ B) $2a + b$ C) $a + 2b$ D) $3a$ E) $a + b$

Megjegyzés: Ezek a feladatok még inkább az általános iskolai tananyagra építenek, mint a csak középiskolában tanultakra, de megoldásukhoz alapos tudás szükséges. A különböző nehézségi szinteken megfigyelhetjük, a matematika minél több területéről válogatnak feladatokat: geometriai, számelméleti, algebrai jellegű feladatok egyaránt szerepelnek. Itt még több a gyakorlati jellegű feladat, a későbbiekben (közepes és nehezebb feladatok) már több matematikai formalizmus szerepel a feladatok szövegezésében.

Közepes nehézségű feladatok (4 pontosa):

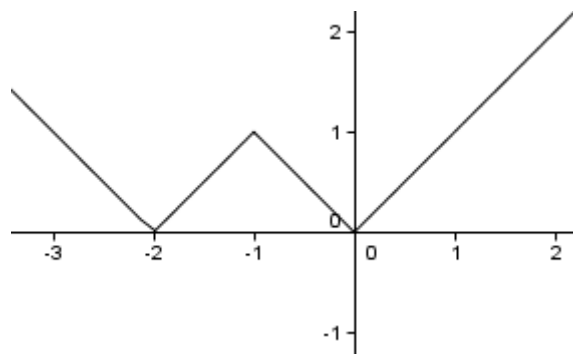
11.

Egy udvariatlan férfi megkérdezte Ágnes asszonytól, hány éves. A hölgy így válaszolt: „Ha 100 évig fogok élni, akkor mostani életkorom háromnegyede egyenlő a hátralévő éveim számának felével.” Hány éves Ágnes asszony?

- A) 32 B) 40 C) 52 D) 64 E) 80

12.

Mi az alább vázolt függvény hozzárendelési szabálya?



- A) $||x - 1| + 1|$ B) $||x| + 1| - 1$ C) $|x - 1| + 1$ D) $||x - 1| - 1|$ E) $||x + 1| - 1|$

13.

Milyen vektor lesz a téglatest egyik csúcsából kiinduló három oldalvektor és három lapátlóvektor összege?

- A) egyik lapátlóval párhuzamos B) egyik oldalvektor többszöröse C) egyik testátló irányába mutat D) egyik sem E) nullvektor

14.

Az ABC háromszög B csúcsából induló félegyenes az AC oldalt a D pontban metszi. Az így keletkezett CDB szög egyenlő a háromszög ABC szögével. Mekkora a BC szakasz hossza, ha $AD = 7$ és $DC = 9$?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 11 E) 12

15.

Ha a 24009-et és a 41982-t ugyanazzal a négyjegyű számmal elosztjuk, mindkét esetben ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?

- A) 45 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

16.

Hány olyan természetes szám van, amely 5-ös és 6-os számrendszerben egyaránt négyjegyű?

- A) 623 B) 409 C) 398 D) 389 E) 420

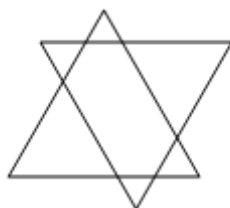
17.

Hány pozitív osztója van a $8^3 + 4^4 + 2^{11}$ számnak?

- A) 37 B) 14 C) 28 D) 7 E) 18

18.

Két egybevágó, 18 cm kerületű szabályos háromszöget az ábrán látható módon úgy helyezünk egymásra, hogy megfelelő oldalaik párhuzamosak legyenek. Hány cm a közös részként kialakult hatszög kerülete?



- A) 9 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

19.

Az ABC háromszögnek a C csúcsnál derékszöge van, a B és C csúcsból induló súlyvonalak pedig merőlegesek egymásra. Ha a BC oldal 12 egység hosszú, akkor az AC oldal hossza:

- A) $8\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$ D) 8 E) $6\sqrt{2}$

20.

Hány természetes számpár megoldása van az alábbi egyenletnek: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$?

- A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) 0

Megjegyzés: A feladatok ezen a szinten már mélyebb középiskolai ismereteket igényelnek. Itt már megjelennek azok az új tartalmak (hatványozás azonosságai, algebrai kifejezések, függvények, geometriai számítások, stb.), amelyekkel a tanulók általános iskolában nem találkoztak. Több feladat ezek közül a magasabb évfolyamon ugyancsak meg szokott jelenni. A nehezebb feladatok már igazi problémamegoldó gondolkodást igényelnek, az ismeretek újszerű alkalmazását. Ezen a szinten a feladatok többsége már elszakad a gyakorlati élettől, és inkább a hagyományos matematika versenyek feladataihoz hasonlít.

Nehezebb feladatok (5 pontosak):

21.

Minden egész percben megmérjük a nagymutató és a kismutató szögét 12:01 és 23:59 között. Hány fokos lesz a legkisebb mért hajlásszög?

- A) 0,5 B) 1 C) 5,5 D) 0,25 E) 3

22.

Egy másodfokú f függvényről tudjuk, hogy $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ és $f(2) = 8$. Mennyi az $f(5)$ értéke?

- A) 23 B) 22 C) 24 D) egyik sem E) 25

23.

Az 1, 2, 3 számokat felírtuk egy körvonal mentén. Következő lépésben a szomszédos számok közé odaírtuk az összegüket, így a következő hat szám szerepel a körvonal mentén: 1, 3, 2, 5, 3, 4. Ezt a műveletet még négyszer megismétljük. Mennyi lesz ekkor a körvonal mentén elhelyezkedő 96 szám összege?

- A) 486 B) 2187 C) 1458 D) 4374 E) 998

24.

Hányféleképpen lehet összeállítani egy vasúti szerelvényt az I, II, III, IV és V jelű kocsikból úgy, hogy az I jelű vagon közelebb legyen a mozdonyhoz, mint a II jelű?

- A) 120 B) 60 C) 48 D) 24 E) 10

25.

Legalább hány számot kell törölni az $\{1; 2; 3; \dots; 16\}$ halmaz elemei közül, hogy a megmaradó számok közül semelyik kettőnek az összege ne legyen négyzetszám?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

26.

Egy focilabdát fehér és fekete bőrdarabokból varrtak össze. A fekete darabok szabályos ötszögek, a fehérek szabályos hatszögek. Minden ötszöget öt darab hatszög határol, a hatszögek mindegyikét pedig három darab ötszög és három darab hatszög veszi körül. A labdán 12 fekete ötszög található. Mennyi a fehér hatszögek száma?

- A) 60 B) 15 C) 10 D) 30 E) 20

27.

Mennyi a számjegyek összege a legkisebb olyan természetes számban, amely 6-ra végződik, és ha ezt a 6-ost a szám végéről töröljük, és átírjuk a szám elejére, akkor az eredeti szám 4-szeresét kapjuk?

- A) 30 B) 24 C) 27 D) 18 E) 21

28.

Egy 7-re végződő pozitív egész számnak 100 pozitív osztója van. Hány pozitív osztója van a szám tízszeresének?

- A) 300 B) 1000 C) nem lehet meghatározni D) 200 E) 400

29.

Felírjuk a pozitív egész számokat a következő elrendezésben:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
...

Mennyi lesz a számok összege a táblázat 100-adik sorában?

- A) 1000100 B) 500050 C) 500000 D) 1000000 E) 5000050

30.

Legyenek a és b különböző pozitív egész számok, továbbá $S(a,b)$ értékét mindig számoljuk ki úgy, hogy a két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének összegéből kivonjuk a két szám összegét. Hány olyan (a,b) számpár van, amelyre igaz, hogy $a > b$ és $S(a,b) = 2$?

- A) 0 B) 2 C) 1 D) végtelen sok E) 4

Könnyebb feladatok (3 pontosak):

1.

Egy akváriumban 200 hal úszik. 1%-uk kék, a többi sárga. Hány darab sárga halat kell kivenni az akváriumból, hogy a benne maradt halaknak a 2%-a legyen kék?

- A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

2.

Az alábbi számok közül melyik a legkisebb?

- A) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ C) $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ D) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ E) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

3.

Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyre $n^2 + n$ prímszám?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) véges sok, de 2-nél több E) végtelen sok

4.

Mi a legnagyobb n kitevő, melyre a 8^n osztója a 44^{44} -nek?

- A) 29 B) 44 C) 13 D) 8 E) 88

5.

Milyen vektor lesz a téglatest egyik csúcsából kiinduló három oldalvektor és három lapátlóvektor összege?

- A) egyik lapátlóval párhuzamos B) egyik oldalvektor többszöröse C) egyik testátló irányába mutat D) egyik sem E) nullvektor

6.

A P paraméter mely értéke mellett érinti az $y = 6x$ egyenletű egyenes az $y = x^2 + p$ egyenletű parabolát?

- A) 7 B) 10 C) 8 D) 9 E) 11

metszespont.html

7.

Az ABC háromszög B csúcsából induló félegyenes az AC oldalt a D pontban metszi. Az így keletkezett CDB szög egyenlő a háromszög ABC szögével. Mekkora a BC szakasz hossza, ha $AD = 7$ és $DC = 9$?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 11 E) 12

8.

Legyen $f(x) = (x + a)^3 + b$. Hány olyan (a, b) valós számpár van, amelyre $f(0) = 1$ és $f(1) = 2$?

- A) 0 B) 3 C) 1 D) 2 E) 4

9.

Egy matematika versenyen 4 feladatot tűztek ki. A 100 induló közül az első feladatot 90-en, a másodikat 85-en, a harmadikat 80-an, a negyediket 70-en oldották meg. Legalább hányan oldották meg mind a négy feladatot?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

10.

Egy 13 és egy 15 cm sugarú kör metszéspontjainak távolsága 24 cm. Hány cm lehet a két kör középpontjának távolsága az alábbiak közül?

- A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

Megjegyzés: Ezek a feladatok hasonlítanak leginkább a középszintű érettségi első részében szereplő feladatokhoz: általában egy definíció, tétel közvetlen alkalmazásával, rövid számolással megoldhatók. Itt és a későbbiekben is a teljes középiskolai tananyag alapján a feladatsor, látható, hogy milyen sokféle területet felölel, nagyon jól alkalmazható a tanulók ismereteinek és képességeinek felméréséhez.

Közepes nehézségű feladatok (4 pontosa):

11.

A 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 számok közül hány olyan van, amely lehet egy egész szám négyzetének utolsó két számjegye?

- A) 2 B) 3 C) 3-nál több D) 0 E) 1

12.

Hány pozitív osztója van a $8^3 + 4^4 + 2^{11}$ számnak?

- A) 37 B) 14 C) 28 D) 18 E) 7

13.

Kiszámítottuk az $(1 - \frac{1}{2^2}) \cdot (1 - \frac{1}{3^2}) \cdot (1 - \frac{1}{4^2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{2004^2})$ kifejezés értékét, elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket is. Mennyi az így kapott tört számlálójának és nevezőjének az összege?

- A) más érték B) 6013 C) 3005 D) 4009 E) 2005

14.

Minden egész percben megmérjük a nagymutató és a kismutató szögét 12:01 és 23:59 között. Hány fokos lesz a legkisebb mért hajlásszög?

- A) 0,5 B) 1 C) 5,5 D) 0,25 E) 3

15.

Az $ABCD$ négyzet 4 cm hosszú AB oldalára befelé az ABE szabályos háromszöget rajzoltuk. Hány cm a CDE háromszög köré írható kör sugara?

- A) 4 B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) $3\sqrt{3}$ E) 5

V I D E Ó

16.

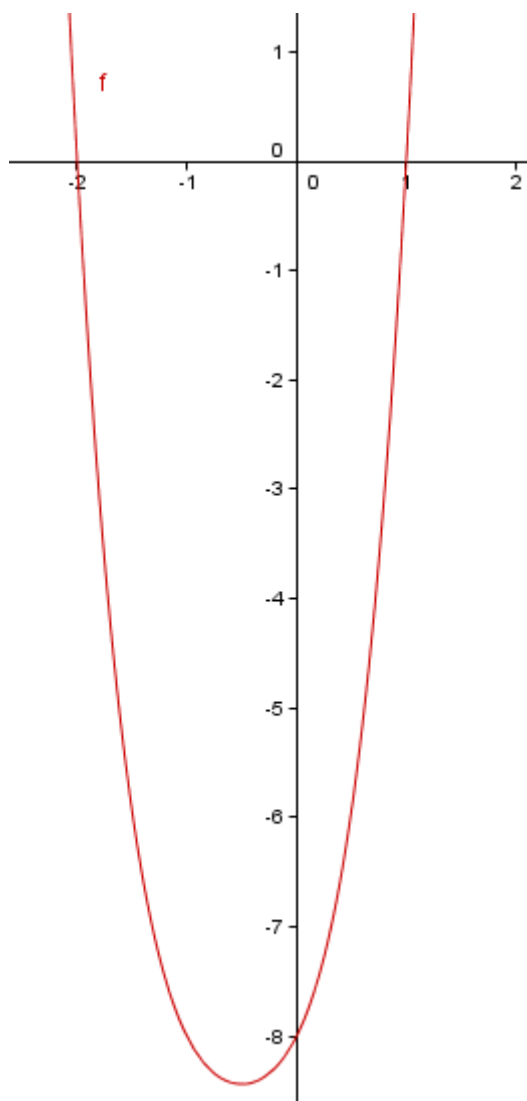
Egy másodfokú f függvényről tudjuk, hogy $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ és $f(2) = 8$. Mennyi az $f(5)$ értéke?

- A) 23 B) 22 C) 24 D) egyik sem E) 25

17.

Mennyi az $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 8 = 0$ egyenlet egész megoldásainak összege?

- A) -1 B) 3 C) 1 D) 0 E) 2



18.

Egy szigeten kétféle kenguru él: világos és sötét. Az összesen 2009 kenguru között semelyik kettő nem ugyanolyan magas. A világos kengurukat nagyság szerint sorba állítottuk, majd a legkisebbtől kezdve mindegyiktől megkérdeztük, hogy hány sötét kengurunál magasabbak. A következő válaszokat adták: 8, 9, 10, 11, 12, és így tovább, egyesével. Hány világos kenguru él a szigeten, ha közülük a legmagasabb az összes sötét kengurunál magasabb?

- A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) ez az eset lehetetlen

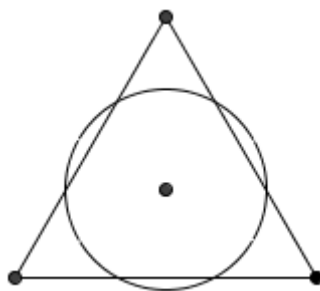
19.

Hány olyan n egész szám van, amelyre a $4^{\frac{n-1}{n+1}}$ kifejezés értéke is egész szám?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 14 E) 5

20.

Egy 1 cm sugarú kör és egy 3 cm oldalú szabályos háromszög középpontja egybe esik. Hány cm hosszú a két alakzat egyesítésével kapott alakzat kerülete?



- A) $3 + 2\pi$ B) $6 + \pi$ C) $9 + \frac{\pi}{3}$ D) 3π E) $9 + \pi$

Nehezebb feladatok (5 pontosak):

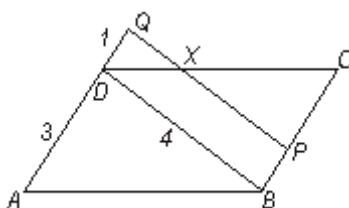
21.

Mennyi az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek ismétlés nélküli permutációival képezhető ötjegyű számok összege?

- A) 10800000 B) 3999960 C) 7200000 D) 3600000 E) 7999920

22.

Az ábrán az $ABCD$ és a $BPQD$ négyszögek paralelogrammák, ahol $AD = 3$, $DQ = 1$, $BD = 4$ egység. Hány egység hosszú a PX szakasz?



- A) az AB szakasz hosszától függ B) $\frac{8}{3}$ C) 2 D) 3 E) 2,7

23.

Egy hosszú folyosón 1000 terem van, az elsőben 1000 ember szorong, a többi üres. Minden percben sípszóra minden olyan teremből, ahol egynél több ember van, egy ember átmegy a következő terembe. Egy óra elteltével hány terem lesz üres?

- A) 31 B) 939 C) 969 D) 940 E) 60

24.

Hány olyan háromjegyű szám van, amely 12-szerese a számjegyei összegének?

- A) 1 B) 0 C) 2 D) több E) 3

25.

Az alábbi értékek közül melyik a legjobb közelítés egy egység sugarú gömbbe írt szabályos tetraéder élhosszára?

- A) 1,3 B) 1,5 C) 1,7 D) 1,1 E) 1,9

26.

Egy derékszögű háromszög befogói $a = \sqrt{x^2 - 13}$ és $b = \sqrt{x^2 + 15}$ egész számok. Mekkora a háromszög területe, ha x is egész szám?

- A) 12 B) 24 C) 48 D) 60 E) 36

27.

Hány olyan legfeljebb négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye 1, 2 vagy 3, és van legalább egy darab 1-es és egy darab 2-es számjegye?

- A) 64 B) 117 C) 58 D) 81 E) 95

28.

Hányféleképpen lehet kivágni 8 mezőt egy sakktáblából, hogy semelyik sorból, illetve oszlopból nem vághatunk ki egynél több mezőt és semelyik sarokmezőt sem vághatjuk ki?

- A) 18450 B) 720 C) 21600 D) más érték E) 4200

29.

Hány olyan $n \geq 3$ egész szám van, amelyre létezik olyan konvex (minden szöge kisebb 180° -nál) n oldalú sokszög, melynek belső szögeinek aránya $1:2:3:\dots:n$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 5-nél több

30.

Egy matekversenyen 10 versenyző jutott a döntőbe. Minden feladatot pontosan 7-en oldottak meg. A névsorban első 9 versenyző mindegyike 4 feladattal boldogult. Mennyit sikerült megoldania a tizedik versenyzőnek?

- A) nem lehet megmondani B) 6 C) 4 D) 5 E) 3

Feladat: Oldja meg a fenti teszteket!

5. fejezet - Az algebra megjelenése a matematika versenyekben

1. Feladatok

Ebben a fejezetben az algebrához kötődő versenyfeladatokból áll egy csokor, érintve az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenség rendszerek, polinomok témaköröket.

1.

Adott egy n változós polinom. Tudjuk, hogy ha mindegyik változója helyébe vagy $+1$ -et, vagy -1 -et helyettesítünk, értéke pozitív lesz, amennyiben a -1 -ek száma páros, és negatív, ha a -1 -ek száma páratlan. Igazoljuk, hogy a polinom legalább n -edfokú. (Azaz van olyan tagja, amelyikben a változók kitevőinek az összege legalább n .)

2.

Legyen n adott pozitív egész szám. Határozzuk meg a valós számokon értelmezett

$$f(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \dots + (2n+1-k)x^k + \dots + 2nx + 2n+1$$

polinom minimumát.

3.

Egy osztály matematika dolgozatának eredményei a következők: 4 darab ötös, 9 darab hármas, 7 darab kettes és 2 darab egyes, míg a többiek dolgozata négyesre sikerült. Hányan írtak négyes dolgozatot, ha a dolgozatjegyek átlaga $3,15$ -nél nagyobb, $3,2$ -nél kisebb, és tudjuk, hogy hármast írtak a legtöbben?

4.

Egy egyenes út mentén két különböző nagyságú, négyzet alakú telek volt egymás mellett. Telekrendezés során a két telket egy téglalap alakú telekké alakították úgy, hogy változatlan maradt a területe is, és az út menti oldal is. Mutassuk meg, hogy az új telek rövidebb oldala nagyobb a hosszabb oldal felénél!

5.

A derékszögű koordináta-rendszer mely $P(x; y)$ pontjainak koordinátáira teljesül, hogy $|2x - 3y| < 12$?

6.

A pozitív egész számokat háromszög alakban rendeztük el az alábbiak szerint:

1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10
x			

(azaz minden sorban a sor számával megegyező számú, egymást követő számokat találunk, amelyek közül az első az ezt megelőző sorban levő utolsó számot követő egész.) Hányadik sorban van az 1994? Mennyi a 100. sorban álló számok összege?

7.

Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének aránya $2 : 3$ volt. Hamupipőke mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még $2kg$ lencsét a zsákba

szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi előtte a bab aránya a lencséhez. Végül hány kg lencsét és hány kg babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?



8.

Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészhez található olyan egész együtthatós polinom, amelynek az $1, 2, \dots, n$ helyeken felvett értékei különböző 2 -hatványok.

9.

Legyen n pozitív egész, $a, b \geq 1, c > 0$ valós számok. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{(ab + c)^n - c}{(b + c)^n - c} \leq a^n.$$

10.

Egy 1996 oldalú konvex sokszög síkjában adott egy P pont. Bizonyítsd be, hogy a P pont csúcsoktól mért távolságainak az összege nagyobb a sokszög félkerületénél!

2. A feladatok megoldásai

1.

Elég olyan polinomokra szorítkozni, amelyekben minden változó legfeljebb első hatványon szerepel. Ha ugyanis minden páros hatványon szereplő változót 1 -gyel, a páratlan hatványon szereplőket pedig a változó első hatványával helyettesítjük, ezzel a polinom foka nem növekszik, a feladatban megadott tulajdonsága pedig nyilvánvalóan megmarad, és ezen az sem változtat, ha a módosítás után összevonható tagokat összevonjuk. Ha pedig a módosított polinom legalább n -edfokú, akkor az eredeti is.

Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Az, hogy egy polinom n -nél alacsonyabb fokú, azt jelenti, hogy nincs benne mindegyik változót tartalmazó tag. Tegyük fel, hogy egy ilyen polinomra teljesülnének a feladat feltételei. Képezzük az összes $+1$ -ekből és -1 -ekből álló sorozatokon vett értékeit a polinomnak, és a pozitív értékek U összegéből vonjuk le a negatív értékek V összegét. Nyilvánvalóan $U - V > 0$. Nézzük meg, hogy egy $a x_{i1} x_{i2} \dots x_{ij}$ tag együtthatója ($j < n$) hányszor szerepel U -ban és hányszor V -ben. A $+1$ -ekből és -1 -ekből álló $c_1, c_2, \dots, c_n$ sorozatokban, rögzítve $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ij}$ értékét, ha

$$c_{i1} c_{i2} \dots c_{ij} = 1,$$

akkor a annyszor szerepel U -ban, ahányféleképpen a többi c -k közt páros számú -1 fordulhat elő. Ez a szám

$$r = \binom{n-j}{0} + \binom{n-j}{2} + \binom{n-j}{4} + \dots,$$

ahol az összeg addig tart, amíg az alsó páros szám nem nagyobb $(n-j)$ -nél; V -ben pedig annyszor, ahányféleképpen a többi c -k közül páratlan számút lehet kiválasztani. Ez a szám pedig

$$s = \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{3} + \binom{n-j}{5} + \dots$$

A kiszemelt tag adaléka az $U - V$ különbséghez tehát a binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} a(r-s) &= a \left\{ \binom{n-j}{0} - \binom{n-j}{1} + \binom{n-j}{2} - \binom{n-j}{3} + \dots \right\} = \\ &= a(1-1)^{n-j} = 0. \end{aligned}$$

Ha viszont

$$c_{i1} c_{i2} \dots c_{ij} = -1$$

akkor $-a$ szerepel U -ban s -szer, V -ben pedig r -szer, így ekkor is 0 a tag adaléka az $U - V$ különbséghez. Mivel ez az indirekt feltevés szerint a polinom minden tagjára teljesülne, így ellentmondásra jutottunk azzal, hogy ez a különbség pozitív. A polinomban tehát szerepelnie kell az $x_1 x_2 \dots x_n$ tagnak nemnulla együtthatóval. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

2.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a polinom értéke a -1 helyen $n+1$, másutt ennél nagyobb. Jelöljük a polinomot f_n -nel.

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)2 + 2 \geq 2,$$

amiből világos, hogy $n = 1$ -re helyes az állítás.

Tegyük fel, hogy n -nek egy $k-1$ értékére igaz az állítás. A nyilvánvaló

$$f_k(x) = f_{k-1}(x)x^2 + 2kx + 2k + 1 = (f_{k-1}(x) - k)x^2 + k(x+1)^2 + k + 1$$

alakból azt kapjuk, hogy $f_k(-1) = k+1$, és minden más helyen a jobb oldal második tagja, továbbá a feltevés szerint az első is pozitív.

Az állítás helyessége tehát öröklődik $k-1$ -ről k -ra. Így minden n -re igaz az állítás.

3.

Jelölje x a négyes dolgozatok számát! Tudjuk, hogy:

$$3,15 < 4 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + x \cdot 44 + 9 + 7 + 2 + x < 3,2$$

Azaz :

$$3,15 < 63 + 44x + x < 3,2$$

(Tudjuk, hogy x biztosan kevesebb 9-nél, hisz ennyien írtak hármas dolgozatot.) Bontsuk ketté az utóbbi egyenlőtlenséget, és oldjuk meg az így kapott egyenlőtlenségeket külön-külön!

$$3,15 < \frac{63 + 44x}{22 + x}$$

$$69,3 + 3,15x < 63 + 44x$$

$$6,3 < 0,85x$$

$$7,41 \dots < x$$

$$\frac{63 + 44x}{22 + x} < 3,2$$

$$63 + 4x < 70,4 + 3,2x$$

$$0,8x < 7,4$$

$$x < 9,25$$

Tehát x olyan egész szám, amely nagyobb, mint $7,41$, kisebb, mint $9,25$ valamint kisebb, mint 9 . Az egyetlen ilyen szám a 8 , azaz 8 -an írtak négyes dolgozatot az adott osztályban.

4.

Ha a és b ($a > b$) jelöli a két négyzet egy-egy oldalát, c pedig a telekrendezés után nyert téglalap oldala, akkor

$$c(a + b) = a^2 + b^2.$$

A feladat $c > a + b/2$ állítását igazolandó, az

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} > \frac{a + b}{2}$$

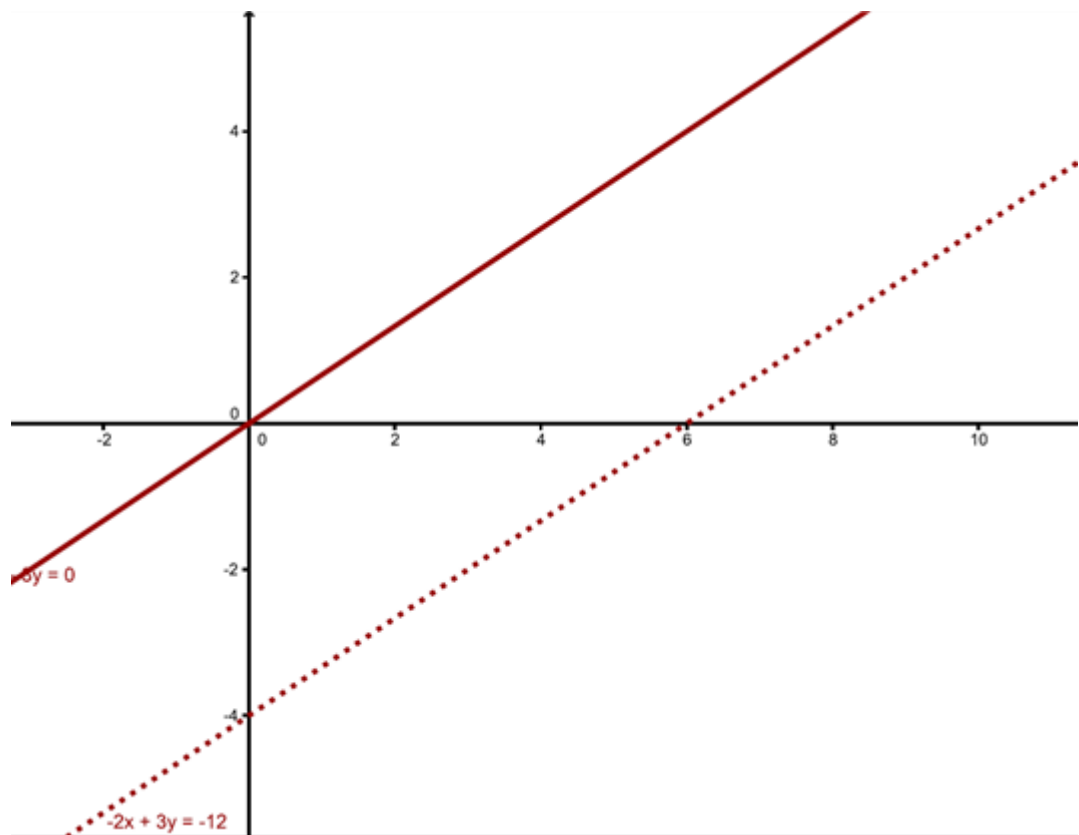
relációt kell igazoljuk. Ez akkor, és csak akkor teljesül, ha

$$2a^2 + 2b^2 > (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

azaz rendezés, összevonás után

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 > 0.$$

Ez viszont teljesül, hiszen $a \neq b$.



5.

Ha $2x - 3y \geq 0$, akkor

$$|2x - 3y| = 2x - 3y,$$

tehát a $2x - 3y - 12 < 0$ kell legyen, aminek a $2x - 3y = 0$ és a $2x - 3y = 12$ egyenletű egyenesek határolta „felül” zárt, „alul” nyílt sáv pontjainak koordinátái tesznek eleget. Ha pedig $2x - 3y \leq 0$, akkor

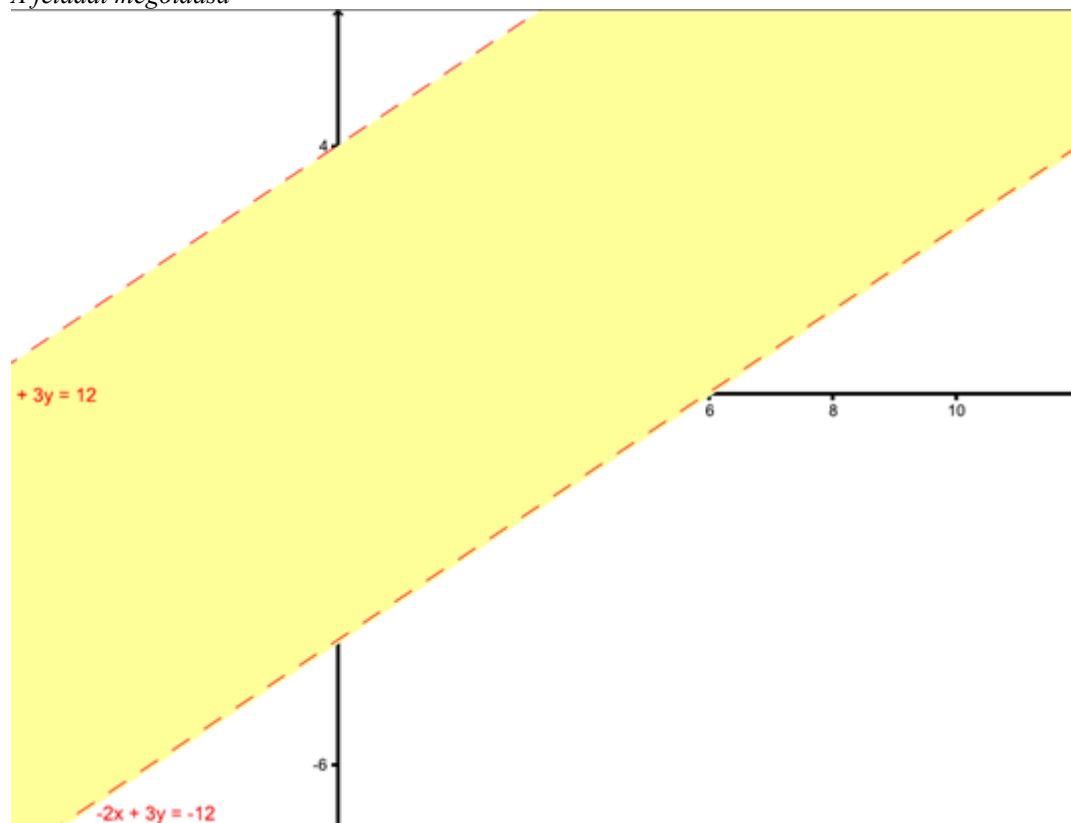
$$|2x - 3y| = 3y - 2x,$$

azaz

$$3y - 2x - 12 < 0$$

kell legyen. E feltételeknek a $2x - 3y = 0$, és a $3y - 2x = 12$ egyenletű egyenesek által határolt „felül” nyílt, alul „zárt” sáv pontjainak koordinátái tesznek eleget. A két sáv egyesítése adja tehát a keresett megoldást: a két egyenes ($3y - 2x - 12 = 0$ és $2x - 3y - 12 = 0$) határolta sáv belső pontjainak koordinátáira teljesül a feltételi reláció.

A feladat megoldása



6.

Ha az 1994 az n -edik sorban van, akkor e sorban levő számokkal együtt

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n+1}{2}n$$

egymást követő számot írtunk le. Ilyképpen keressük azt a legkisebb pozitív n egészet, amelyre

$$1994 \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

vagyis

$$3988 \leq n(n+1).$$

Mivel $63 \cdot 64 = 4032$ és $62 \cdot 63 = 3906$, ezért $n = 63$, vagyis az 1994 a 63-adik sorban van.

A 99-edik sor utolsó eleme az előzőek szerint $99 \cdot 100 / 2 = 4950$, tehát a századik sorban lévő száz szám a 4951-től az 5050-ig terjed, és ezek összege

$$\frac{(4951 + 5050) \cdot 100}{2} = 500050$$

7.

Ha a lencsék tömegét l , a babok tömegét b jelöli, akkor a mostoha ármánykodása előtt $l : b = 2 : 3$, vagyis $3l = 2b$, tehát $b = 3/2 \cdot l$. A mostoha megjelenése után viszont $(l+2) : b = 3 : 2$, azaz

$$2(l+2) = 3b = 3 \cdot \frac{3}{2}l = \frac{9}{2}l.$$

Ebből

$$2l + 4 = \frac{9}{2}l,$$

majd

$$4 = \frac{5}{2}l,$$

tehát $l = 8/5 = 1,6 \text{ kg}$, és így $b = 3/2 \cdot l = 2,4 \text{ kg}$. Ez valóban kielégíti a feladat feltételeit, mivel

$$1,6 : 2,4 = 16 : 24 = 2 \cdot 8 : 3 \cdot 8 = 2 : 3,$$

és

$$3,6 : 2,4 = 36 : 24 = 3 \cdot 12 : 2 \cdot 12 = 3 : 2.$$

8.

Először olyan P polinomot mutatunk, amely az egymástól különböző $a_1, a_2, \dots, a_n$ helyeken rendre az egymástól nem feltétlenül különböző $b_1, b_2, \dots, b_n$ értékeket veszi fel. Ehhez tekintsük $i = 1, 2, \dots, n$ esetén a következő P_i polinomot:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i; 1 \leq j \leq n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

Világos, hogy $p_i(a_i) = 1$ és $p_i(a_j) = 0$, ha $j \neq i$. Ezért a $p(x) = b_1 p_1(x) + \dots + b_n p_n(x)$ összefüggéssel definiált polinom, az ún. Lagrange-féle interpolációs polinom, megfelelő lesz. Könnyen látható, hogy ezen P polinom fokszáma legfeljebb $n-1$. Azonban P még akkor sem lesz mindig egész együtthatós, ha $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ egész számok.

Legyen most $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$. Milyen $b-1, \dots, b_n$ egész értékek mellett tudunk egyszerűen következtetni arra, hogy a P polinom együtthatói egész számok? A P polinom minden együtthatója olyan racionális szám, amelynek a nevezője valamilyen $1 \leq i \leq n$ indexre

$$\begin{aligned} \prod_{j \neq i; 1 \leq j \leq n} (a_i - a_j) &= (i-1)(i-2) \dots (i-(i-1))(i-(i+1)) \dots (i-n) = \\ &= (-1)^{n-i} (i-1)!(n-i)! \end{aligned}$$

alakú, számlálója pedig ugyanakkor $p(i)!$ -nel osztható egész szám. Könnyen látható, hogy az így adódó nevezők mindegyike osztója az p számnak. Ha tehát a b_i értékek mindegyike osztható p -nel, akkor a fenti konstrukcióval létrehozott polinom egész együtthatós lesz.

Az általunk keresett polinomnak azonban az előírt helyeken 2-hatvány értékeket kell felvennie, azok pedig nem oszthatók N -nel, ha $n \geq 4$. Hogyan lehet ezen segíteni? Válasszunk ki n darab különböző 2-hatványt, ami ugyanannyi – mondjuk m – maradékot ad N -nel osztva. Ezt megtehetjük, hiszen végtelen sok különböző 2-hatvány van. Legyenek ezek $c_1, c_2, \dots, c_n$, és tekintsük a $b_i = c_i - m$ ($1 \leq i \leq n$) számokat. Ezekre igaz, hogy b_i osztható N -nel, létezik tehát olyan egész együtthatós polinom, amelyre $p(i) = b_i$ minden 1 és n közé eső i egész számra. Ennek a P polinomnak konstans tagját m -mel megnövelve olyan, továbbra is egész együtthatós P^* polinomhoz jutunk, amelyre $P^*(i) = c_i$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

9.

A nevező pozitív, mert a feladat feltételei mellett $b + c > 1$, és így

$$(b + c)^n \geq b + c > c.$$

Elegendő ennek folytán a nevezővel átszorozva keletkező

$$(ab + c)^n - c \leq a^n(b + c)^n - a^n c$$

egyenlőtlenséget bizonyítani. Ezt teljes indukcióval tesszük. Az $n = 1$ esetben egyenlőség áll fenn.

Jelöljük a bal oldalt A_n -nel, a jobb oldalt B_n -nel. Tegyük fel, hogy n -nek valamilyen m értékére $A_m \leq B_m$, és nézzük meg, mennyivel változik az egyik oldal, mennyivel a másik, ha m -et eggyel növeljük.

$$A_{m+1} - A_m = (ab + c)^m(ab + c - 1)$$

$$B_{m+1} - B_m = a^m(b + c)^m(ab + ac - 1) - a^m(a - 1)c$$

Az $ab + ac - 1$ különbségről a könnyebb összehasonlítás érdekében $ab + c - 1$ -re térve, majd az első tag első és második tényezőjét egy hatvánnyá alakítva az utóbbi különbség így írható

$$\begin{aligned} B_{m+1} - B_m &= a^m(b + c)^m(ab + c - 1) + a^m(b + c)^m(ac - c) - a^m(a - 1)c = \\ &= (ab + ac)^m(ab + c - 1) + a^m(a - 1)c[(b + c)^m - 1]. \end{aligned}$$

Itt az első tag nagyobb az $A - m + 1 - A_m$ különbségnél, ha $a > 1$, mert $ab + ac > ab + c$, a második pedig pozitív. Így $B_{m+1} - B_m > A_{m+1} - A_m$, azaz $B_{m+1} - A_{m+1} > B_m - A_m$.

Indukciós feltevésünk szerint a jobb oldal nem negatív, így a bal pozitív. Ezzel azt láttuk be, hogy ha $(ab + c)^n - c \leq a^n(b + c)^n - a^n c$ teljesül egy n értékre, és $a > 1$, akkor minden nagyobb értékre már szigorú egyenlőtlenség érvényes.

Mivel $n = 1$ -re egyenlőség áll (az eredeti egyenlőtlenségben minden a, c és 0-tól különböző b értékre), így a $(ab + c)^n - c \leq a^n(b + c)^n - a^n c$ egyenletben és az eredeti egyenlőtlenségben is a $<$ jel érvényes minden 1-nél nagyobb n egészre és 1-nél nagyobb a -ra.

Ha $a = 1$, akkor egyenlőtlenségeink egyenlőségbe mennek át. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, és tisztáztuk azt is, hogy milyen esetekben áll fenn egyenlőség.

10.

Tekintsük a P pont és a konvex sokszög egy oldala, az $A_i A_{i+1}$ oldala által meghatározott, esetleg elfajuló $PA_i A_{i+1}$ háromszöget. ($1 \leq i \leq 1996$ és $i + 1 = 1$, ha $i = 1996$).

A könnyebbség miatt a $PA_i = x_i$ jelölést vezessük be. A $PA_i A_{i+1}$ háromszögek mindegyikére felírva a háromszög-egyenlőtlenséget

$$x_1 + x_2 \geq A_1 A_2,$$

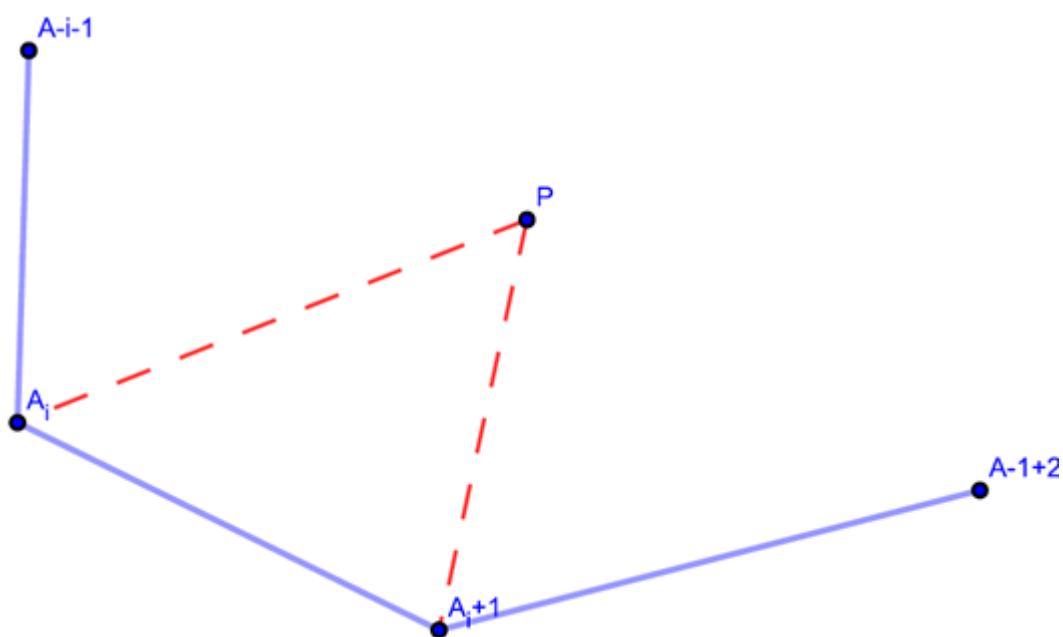
$$x_2 + x_3 \geq A_2 A_3,$$

...

$$x_{1995} + x_{1996} \geq A_{1996} A_{1996},$$

$$x_{1996} + x_1 \geq A_{1996} A_1.$$

Összeadva ezt az 1996 darab egyenlőtlenséget, a bal oldalak összegében a P pontnak minden csúctól való távolsága pontosan kétszer szerepel, a jobb oldalak összege pedig a sokszög k kerülete. Így $2S \geq k$, azaz $S \geq k/2$, ahol S a P -nek a csúcsoktól mért távolságainak összege. Az egyenlőség csak akkor áll, ha a fenti 1996 darab egyenlőtlenség mindegyikében egyenlőség áll. Ez lehetetlen, hiszen a P pont nem lehet a sokszög oldalegyeneseinek mindegyikén. Bizonyításunkból az is kiderült, hogy az állítás nem konvex sokszögre is ugyanúgy megáll, hiszen a konvexitást nem kellett felhasználnjuk.



6. fejezet - A számelmélet megjelenése a matematika versenyekben

1. Feladatok

1.

Legyen p páratlan prímszám, n pedig pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy pn^2 -nek legfeljebb egy olyan d pozitív osztója van, amelyikre $d + n^2$ négyzetszám.

2.

Legyen a és b két pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy legfeljebb véges sok n egész szám esetén lehet $an^2 + b$ és $(n + 1)^2 + b$ egyaránt négyzetszám.

3.

Létezik-e pozitív egészekből álló végtelen sorozat, melyben semelyik szám sem osztója egyetlen másiknak sem, bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója, ugyanakkor nincs olyan 1-nél nagyobb szám, amely a sorozat minden elemének osztója?

4.

Adjuk össze az $1, 2, \dots, n$ természetes számok pozitív páros osztóinak számát, majd végezzük el ugyanezt a páratlan osztókkal is. Mutassuk meg, hogy a két összeg eltérése nem nagyobb n -nél.

5.

Legyen k nemnegatív egész szám, és tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_n$ egész számok legalább $2k$ különböző maradékot adnak $(n + k)$ -val osztva. Bizonyítandó, hogy a számok között van néhány, amelyek összege osztható $(n + k)$ -val.

6.

Az $1, 2, \dots, n$ számok közül úgy akarok kiválasztani (a, b, c) hármasokat, hogy $a < b < c$, továbbá hogy bármely két kiválasztott (a, b, c) , (a', b', c') hármasra az $a = a', b = b', c = c'$ egyenlőségek közül legfeljebb egy teljesüljön. Maximálisan hány ilyen számhármast választhatunk ki?

7.

Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

8.

Igazoljuk, hogy minden olyan derékszögű háromszögben, amelyben az oldalak hosszának mérőszáma egész, valamelyik befogó hosszának mérőszáma osztható 3-mal!

9.

Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

10.

Legyen n természetes szám, s legyen d osztója $2n^2$ -nek. Bizonyítandó, hogy $n^2 + d$ nem négyzetszám.

2. A feladatok megoldásai

1.

Feltétel szerint van olyan k és m egész, amelyekre $pn^2 = dk$ és $d + n^2 = m^2$. Jelöljük n és m legnagyobb közös osztóját d' -vel. Ekkor $n = d'n'$, $m = d'm'$, ahol m' és n' egymáshoz relatív prím. A fenti második egyenlőséget k -val végigszorozva és felhasználva az elsőt és az utolsó két egyenlőséget, az előbbi így írható: $(p+k)d'^2n'^2 = kd'^2m'^2$, amiből $(p+k)n'^2 = km'^2$.

A prímtenyezős felbontás egyértelműsége folytán m'^2 -nek és n'^2 -nek csak olyan prímekek lehetnek osztói, és így közös osztói is, amelyek az alapoknak is osztói, ami esetünkben azt jelenti, hogy a két négyzet relatív prím. Az eukleidészi lemma szerint tehát n'^2 , ami osztója a jobb oldalnak, kell, hogy az első tényezőnek legyen osztója. Alkalmas k' egésszel tehát

$$k = n'^2 k'.$$

Ezt beírva utolsó egyenlőségünkbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$p + n'^2 k' = k' m'^2,$$

vagy átrendezve

$$p = k'(m'^2 - n'^2) = k'(m' - n')(m' + n').$$

Mivel P (pozitív) osztói csak 1 és P , így a jobb oldalon egy tényező értéke P , a másik kettőé 1, és mivel az utolsó tényező nagyobb az előtte állónál, így

$$m' + n' = p, k' = m' - n' = 1, \text{ tehát } n' = \frac{1}{2}(p-1), n = \frac{1}{2}(p-1)d'.$$

Mindezeket beírva az első feltételi egyenlőségbe és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$d = pd'^2,$$

tehát P és n meghatározza d -t – feltéve, hogy egyáltalán létezik megfelelő d ; ennek pedig az a feltétele, hogy n osztható legyen $\frac{1}{2}(p-1)$ -gyel.

2.

Tegyük fel, hogy az n egész, és x és y pozitív egész számokra teljesül, hogy $an^2 + b = x^2$ és $a(n+1)^2 + b = y^2$.

A megfelelő oldalak különbségét képezve és az n -et tartalmazó tagot kifejezve $2an = y^2 - x^2 - a$. Ezt az első egyenlőség $4a$ -szorosába helyettesítve és rendezve a következőt kapjuk:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2a(x^2 + y^2) + a^2 + 4ab = 0.$$

Mind a két oldalhoz $4x^2y^2$ -et hozzáadva a bal oldalon az utolsó tag kivételével teljes négyzet keletkezik. Ezt mind a két oldalból levonva a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$4ab = (2xy - x^2 - y^2 + a)(2xy + x^2 + y^2 - a).$$

A bal oldal egy felbontását kaptuk tehát két egész tényező szorzatára. A kínálkozó teljes négyzetté alakításokkal

$$a - (x - y)^2 = q_1, (x + y)^2 - a = q_2, \text{ ahol } q_1 q_2 = 4ab.$$

Innen kiszámítható x és y . Ha ezek egész számnak adódnak, akkor pl. a megoldás legelső egyenletéből n -re legfeljebb két egész értéket kapunk. A feladat követelményeit tehát legfeljebb négyszer annyi érték elégíti ki, mint ahányféleképpen két tényező szorzatára bontható, tehát valóban véges sok.

3.

Megmutatjuk, hogy létezik a feladat követelményeinek eleget tevő sorozat. Legyen ugyanis $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3, \dots$ a prímszámok (végtelen) növekvő sorozata, és tekintsük az $a_1 = 6, a_2 = 10, a_n = 15p_{n+1} (n \geq 3)$ sorozatot.

Ebben a sorozatban a_n páratlan szám, ha $n \geq 3$, így nem osztható sem a_1 -gyel, sem a_2 -vel, hiszen azok páros számok. Az is világos, hogy a_1 és a_2 közül egyik sem osztója a másikkal. Ha pedig $n \geq 3$, akkor p_{n+1} osztója a_n -nek, de nem osztója a sorozat egyetlen további tagjainak sem, tehát a_n nem lehet osztója a sorozat egy másik elemének. Az első feltétel tehát teljesül.

A sorozatban bármely két számnak van 1-nél nagyobb közös osztója. Valóban: a_1 és a_2 esetén ez a szám 2; a_1 és a_n esetén 3, ha $n \geq 3$, végül ha $n, m \geq 2$, akkor a_n és a_m is osztható 5-tel. Tehát a második feltétel is teljesül.

Végezetül, ha egy pozitív egész osztója a sorozat minden elemének, akkor osztója a_1 -nek és a_2 -nak is, és így csak 1 vagy 2 lehet. A második lehetőség azonban könnyen kizárható, hiszen a_3 páratlan szám. Ezzel igazoltuk, hogy a sorozat a harmadik feltételt is kielégíti.

4.

Jelölje a szóban forgó összegek közül az elsőt $D_1(n)$, a másodikat pedig $D_2(n)$. $D_1(n)$ meghatározásánál minden, az n -nél nem nagyobb pozitív páros számot annyszor kell figyelembe vennünk, ahány többszöröse van az $1, 2, \dots, n$ számok között. Ezért

$$D_1(n) = \sum_{2j \leq n} s_n(2j),$$

ahol $s_n(k)$ jelöli a k pozitív egész 1 és n közé eső többszöröseinek számát: $s_n(k) = \lfloor n/k \rfloor$. Hasonlóképpen

$$D_2(n) = \sum_{2j-1 \leq n} s_n(2j-1).$$

Világos, hogy $k < l$ esetén $s_n(k) \geq s_n(l)$, így a $D_1(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j)$ tagját felülről becsülhetjük a $D_2(n)$ összeg megfelelő $s_n(2j-1)$ tagjával. Következésképpen $D_1(n) \leq D_2(n)$. Hasonlóképpen, az első tag $s_n(1) = n$ kivételével, a $D_2(n)$ összeg minden egyes $s_n(2j-1)$ tagja ($j \geq 2$) megbecsülhető a $D_1(n)$ összeg megfelelő $s_n(2(j-1))$ tagjával, ezért $D_2(n) \leq n + D_1(n)$. A két egyenlőtlenség összevetéséből a feladat állítása azonnal leolvasható.

5.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$ -val osztva. Tekintsük a következő $n+k$ különböző számot:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1, b_3 = a_1 + a_2,$$

$$b_{3i+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i} + a_{2i+1} (0 < i < k),$$

$$b_{3i+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i} + a_{2i} + 2 (0 < i < k),$$

$$b_{3i+3} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i} + a_{2i+1} + a_{2i+2} (0 < i < k),$$

$$b_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{j-k} (3k < j \leq n+k).$$

Ha ezek között van olyan, amelyik osztható $b_s + b_t$ -vel, akkor mar készen is vagyunk. Ellenkező esetben pedig van a számok között kettő, mondjuk k és $k + 1$ amelyek ugyanolyan maradékot ad b_s -vel osztva. Ekkor $a_1, a_2, \dots, n$ nyilván osztható b_s -vel. Azt kell már csak észrevennünk, hogy ez a különbség felírható az k számok közül néhánynak az összegeként. Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor valamilyen $-n$ -nál kisebb $-re$ $(k + k)$, vagyis $2k$ volna. Ez azonban feltételezésünk értelmében nem osztható b_s -vel.

6.

Ha a középső elem egy adott b szám, akkor az első elem az $1, 2, \dots, b - 1$ számok valamelyike lehet, a harmadik pedig a $b + 1, \dots, n$ számok valamelyike. Az előbbieket száma $b - 1$, az utóbbiaké $n - b$. A kettő közül a kisebbik – vagy közös értékük, ha a kettő egyenlő –, adja meg, hogy b maximálisan hány hármasban léphet fel középső elemként.

Természetesen $2 \leq b \leq n - 1$, és az elmondottak szerint a 2 és az $n - 1$ egyszer, a 3 és az $n - 2$ kétszer léphet fel maximálisan, és így tovább. Így a kiválasztható hármasok számára a következő felső korlátot nyertük: ha n páros, $n = 2k$ akkor

$$2(1 + 2 + \dots + k - 1) = k(k - 1) = n(n - 2)/4;$$

ha n páratlan, $n = 2k + 1$, akkor

$$2(1 + 2 + \dots + k - 1) + k = k^2 = ((n - 1)/2)^2.$$

Megjegyzés:

Ennyi hármas ki is választható a feltételnek megfelelő módon minden esetben. Vegyük például az $\{a, b, a + b\}$ alakú hármasokat, ahol $1 \leq a < b$ és $a + b \leq n$. Itt a hármas bármelyik két eleme meghatározza a harmadikat, így két különböző hármasnak legfeljebb egy helyen lehet egyező eleme.

Az is látható, hogy ha $b \leq n/2$, akkor első elemnek 1-től $b - 1$ -ig minden érték előfordul, mert b -hez adva még n -nél kevesebbet ad, ha pedig $b > n/2$, akkor harmadik elemként $b + 1$ -től (amikor $a = 1$) n -ig minden érték előfordul, mert a hozzájuk tartozó első elemre $a = c - b < n - n/2 = n/2$, és ez kisebb b -nél. A kiválasztott hármasok száma tehát annyi, mint a felső korlátként kapott érték.

7.

A hatjegyű szám második, negyedik és hatodik jegye a 2-vel, 4-gyel és 6-tal való oszthatóság miatt páros kell legyen, és az ötödik jegy az 5-tel oszthatóság miatt csak az 5 lehet. Az első és a harmadik jegy tehát csak az 1 és a 3 lehet valamely sorrendben. A hárommal oszthatóság miatt a második jegy csak a kettő lehet, hiszen $1 + 4 + 3$ illetve az $1 + 6 + 3$ egyike sem többszöröse a háromnak. Így ha számunk első három jegye sorrendben 123, úgy a 4-gyel oszthatóság miatt a negyedik jegy csak a 6 lehet, mivel 34 nem osztható 4-gyel, ekkor tehát a hatjegyű szám a 123654. Ha pedig számunk első három jegye rendre 321, úgy a negyedik jegy ismét csak a 6, hiszen a 14 nem többszöröse a 4-nek, számunk tehát most a 321654. Mindkét esetben a 6-tal oszthatóságot a szám párossága és jegyei összegének $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21)$ 3-mal való oszthatósága biztosítja.

8.

Pitagorasz tétele szerint a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével. Ha egyik befogó sem lenne 3-mal osztható, akkor négyzeteik 3-mal osztva 1 – 1 maradékot adnának, s ezek összege 3-mal osztva 2 maradékot ad. Ilyen négyzetszám azonban nincs. Tehát legalább az egyik befogónak 3-mal oszthatónak kell lennie.

9.

Ha a kétjegyű szám tízeseinek a számát x , egyeseinek a számát y jelöli, akkor a feltételek szerint kétjegyű számunkra

$$10x + y = xy + 17$$

ahol $x \geq 1$ és $0 \leq y \leq 9$. Ekkor

$$0 = xy - 10x - y + 10 + 7.$$

Szorzáttá alakítás után:

$$0 = (x - 1)(y - 10) + 7,$$

amiből

$$(x - 1)(y - 10) = -7.$$

Most már látható, miért tettük azt, amit. Az $x \geq 1$ és $y \leq 9$ egészek miatt a bal oldal mindkét tényezője egész szám, mégpedig az első tényező pozitív, a második negatív. Ilyen egészek szorzata csak úgy lehet -7 , ha $x - 1 = 1$ és $y - 10 = -7$, vagy $x - 1 = 7$ és $y - 10 = -1$. Az első lehetőség az $x = 2, y = 3$, a második az $x = 8, y = 9$ megoldásokat ellenőrizendően biztosítja.

10.

Legyen $2n^2 = kd$, ahol a feltevés értelmében k pozitív egész szám. Ha $n^2 + d$ négyzetszám, akkor valamely x egész számra

$$x^2 = n^2 + d = n^2 + \frac{2n^2}{k},$$

és így

$$k^2 x^2 = n^2 (k^2 + 2k).$$

Ez azonban lehetetlen, mert a bal oldal teljes négyzet, a jobb oldal első tényezője is az, viszont a második tényező nem teljes négyzet, hiszen

$$k^2 < k^2 + 2k < (k + 1)^2,$$

azaz két szomszédos négyzetszám fogja közre.

Megjegyzés:

A megoldásban hivatkoztunk arra a tényre, hogy ha a, b, c természetes számok, és $a^2 = b^2 c$, akkor c szükségképpen négyzetszám. Ez következik abból, hogy a természetes számok egyféleképpen bonthatók fel prímszámok szorzatára. Emiatt a^2 és b^2 felbontásában minden prímtényező páros kitevővel szerepel, mert a négyzetre emelés ilyen prímfelbontáshoz vezet. Így tehát az $a^2 : b^2$ osztás elvégzésével c -nek olyan felbontását kapjuk, melyben minden prímtényező páros kitevővel szerepel. Ezért c négyzetszám.

7. fejezet - Függvények, sorozatok

1. Feladatok

1.

Milyen m értékek esetén lesz az

$$f(x) = x^2 + 2mx + m$$

függvény értéke minden valós x -re nagyobb, mint $\frac{3}{16}$?

2.

Milyen p esetén vesz fel az $f(x) = 2x^2 + 2px + 6$ függvény minden valós x -re legalább 1-gyel nagyobb értéket, mint a $g(x) = px^2 + 4x - 2p$ függvény?

3.

Oldjuk meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget, ha

$$f(x) = 2^x - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = 2x + 1!$$

4.

A $[0,1]$ intervallumon értelmezett f függvényre teljesül, hogy $f(0) = f(1) = 0$ és minden $a, b \in [0,1]$ esetén

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b).$$

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van! Létezik-e olyan, a feltételeknek megfelelő függvény, amely nullától különböző értéket is felvesz?

5.

Egy függvényről azt tudjuk, hogy minden $x \neq 0$ esetén

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 3f(x) = x.$$

Határozzuk meg $f(2)$ értékét!

6.

Jelölje a_1, a_2, a_3, a_4 a Pascal-háromszög egyik sorának négy, egymás után következő elemét. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \frac{a_2}{a_2 + a_3}, \quad \frac{a_3}{a_3 + a_4}$$

számok számtani sorozatot alkotnak!

7.

Egy bank a lekötött betétekre a kamatadó levonása után évi 6%-os kamatot ad. A kifizetett kamat nagyságát úgy állapítják meg, hogy kiszámítják az adott pénzösszeg egy napra jutó kamatát (az évet 365 nappal

számolva), és ennek annyszorosa lesz a kamat, ahány napig tartott a lekötés. A lekötés lejártakor a számlára visszavezetik a lekötött összeget, és jóváírják a kamatot. Azonban a bank küld egy-egy értesítést (postai levelet) a lekötés kezdetéről és a lekötés végéről is, melynek díja levelenként 75 Ft. Legalább mekkora összeget érdemes lekötöni ebben a bankban 30 napra? (A bank lekötés nélkül 0%-os kamatot fizet.)

8.

Egy pozitív számokból álló számtani sorozat három, nem feltétlenül egymás utáni tagja a, b és c . Tudjuk, hogy

$$\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0.$$

Adjuk meg a sorozat differenciáját!

9.

Egy számsorozatban a második számtól kezdve bármelyik számot megkaphatjuk úgy, hogy a sorszáma 225 hozzáadjuk a sorozatban közvetlenül előtte álló szám reciprokát. A sorozatban az ötödik szám 43. Határozzuk meg a sorozatban álló negyedik és hatodik számot!

10.

Egy utca páros oldalán a házszámok összege egyik saroktól a másikig 78, ezen a szakaszon legalább 5 ház van. Mennyi lehet a saroktól számított negyedik ház házszáma?

11.

Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre tetszőleges x, y valós számok esetén

$$f(x) + f(x + f(y)) = 2x + y!$$

12.

Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x}$ függvény maximumát!

13.

Melyek azok a pozitív egész számokból álló (a_n) sorozatok, amelyekre minden $i \neq j$ esetén $(a_i, a_j) = (i, j)$ teljesül?

14.

Egy d differenciájú számtani sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = 81$. Egy q hányadosú mértani sorozatban $b_1 = 1$ és $b_n = 81$. Tudjuk még, hogy $\frac{q}{d} = 0,15$. Adjuk meg az összes ilyen sorozatot!

15.

Milyen valós x -ek esetén lesz a

$$f(x) = \sqrt{2 \sin x} - \sin x$$

kifejezés értéke a legnagyobb?

16.

Egy valós számsorozat bármely 5 egymást követő tagjának összege pozitív, bármely 7 egymást követő tagjának összege negatív. Milyen hosszú lehet a sorozat?

17.

Az a_n sorozatot (n természetes szám) a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = 2 \quad \text{és} \quad a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}, \quad \text{ha } n > 0.$$

Adjuk meg a_n -t n függvényében!

18.

Határozzuk meg a $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

2. A feladatok megoldásai

1.

Alakítsuk át $f(x)$ -et teljes négyzetes alakra!

$$f(x) = x^2 + 2mx + m = (x + m)^2 - m^2 + m$$

Innen már látható, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor lesz minden x -re nagyobb $\frac{3}{16}$ -nál, ha

$$-m^2 + m > \frac{3}{16},$$

azaz

$$16m^2 - 16m + 3 < 0$$

Ebből:

$$\frac{1}{4} < m < \frac{3}{4}$$

elso-feladat.html

2.

Ha minden x -re $f(x) \geq g(x) + 1$, akkor $h(x) = f(x) - g(x) - 1$ függvény minden x -re nem negatív, és

$$h(x) = (2-p)x^2 + 2(p-2)x + 5 + 2p.$$

I. Ha $p = 2$, akkor $h(x) = 9$, ez minden x -re pozitív.

II. Ha $p \neq 2$, akkor annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a $h(x)$ másodfokú függvény minden x -re nem negatív legyen az, hogy x^2 együtthatója pozitív és a diszkriminánsa nem pozitív.

a.

$$2 - p > 0 \Rightarrow p < 2$$

b.

$$D = 4(p-2)^2 - 4(2-p)(5+2p) \leq 0$$

$$4(p-2)(p-2+5+2p) \leq 0$$

$$4(p-2)(3+3p) \leq 0$$

a) szerint az első tényező negatív, ezért $3p + 3 \geq 0$, ebből $p \geq -1$. Az a) és b) feltételből $-1 \leq p < 2$.

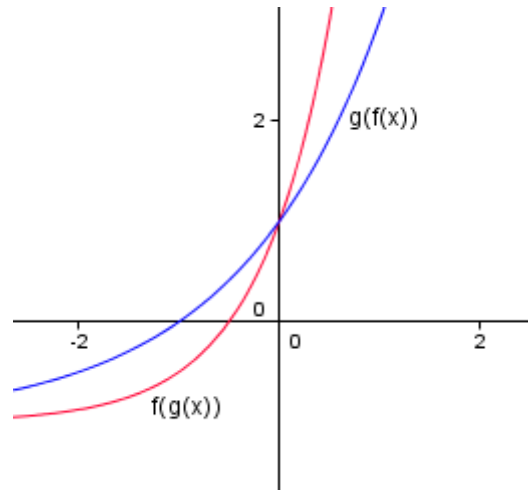
Az I. és II. feltételt figyelembe véve $-1 \leq p \leq 2$ esetén vesz fel $f(x)$ minden valós x -re legalább 1-gyel nagyobb értéket, mint $g(x)$.

masodik-feladat.html

3.

Írjuk fel a kétféle sorrendű összetett függvényeket:

$$f(g(x)) = 2^{2x+1} - 1 \quad \text{és} \quad g(f(x)) = 2(2^x - 1) + 1.$$



Így az egyenlőtlenség:

$$2^{2x+1} - 1 < 2 \cdot 2^x - 1$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x < 0$$

$$2 \cdot 2^x(2^x - 1) < 0$$

$$2^x(2^x - 1) < 0$$

Egy szorzat pontosan akkor negatív, ha tényezői ellenkező előjelűek. Mivel 2^x minden x -re pozitív, így az előzőek szerint $2^x - 1$ -nek negatívnak kell lennie, amiből $2^x < 1$ adódik.

Mivel a 2^x függvény szigorúan monoton növekvő és az $x = 0$ helyen 1 az értéke, így pontosan akkor lesz 1-nél kisebb, ha $x < 0$. Tehát a megoldás: $x < 0$.

4.

Megmutatjuk, hogy ha $f(a) = 0$ és $f(b) = 0$, akkor $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Ebből következik a feladat állítása, hiszen tudjuk, hogy $f(0) = f(1) = 0$, így a $[0, 1]$ intervallumot megfeleztve, majd a kapott intervallumokat tovább felezve és ezt folytatva a felezőpontok mind zérushelyek lesznek.

Tegyük fel tehát, hogy $f(a) = f(b) = 0$. Ekkor a feltétel szerint:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b) = 0$$

Tegyük fel, hogy $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. A feltételt ismét felhasználva:

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

és

$$f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ezeket összeadva:

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

A feltétel szerint is becsülhetjük a bal oldalt. Így a következőt kapjuk:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, hiszen egy negatív szám kétszerese kisebb a számnál. Tehát

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

A függvénynek nem feltétlenül kell mindenhol zérusnak lennie.

5.

Felírhatjuk $x = 2$ esetén, hogy $f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(2) = 2$, amiből

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 3f(2).$$

$x = \frac{1}{2}$ esetén

$$f(2) - 3f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Az $f\left(\frac{1}{2}\right)$ -re kapott eredményt ez utóbbiba helyettesítve

$$f(2) - 3(2 + 3f(2)) = 1/2,$$

$$\text{innen } f(2) = -\frac{13}{16}.$$

6.

Ha (a számozást 0-tól kezdve) a Pascal-háromszög n -edik sorában vesszük az egymást követő $a = \binom{n}{k}$ és $b = \binom{n}{k+1}$ elemeket, akkor

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{k+1}{n+1}.$$

Ezért ha a_1, a_2, a_3, a_4 a Pascal-háromszög n -edik sorának egymást követő elemei, akkor a szóban forgó három tört egy olyan 3-tagú számtani sorozatot alkot, amelynek differenciája $\frac{1}{n+1}$.

7.

A postaköltség 150 Ft, amit a végén, vagy egy másik folyószámláról vonnak le. Ezért akkor éri meg a lekötés, ha a kapott kamat mértéke meghaladja a postaköltséget, azaz

$$\frac{30 \cdot 0,06}{365} x \geq 150.$$

Így $x \geq 30416,6$, így legalább **30 417 Ft**-ot érdemes lekötöni.

8.

Mindkét oldalt abc -vel szorozva, majd a tagokat alakítva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 0 &= (c-b)bc + (a-c)ac + (b-a)ab = c^2b - b^2c + a^2c - c^2a + b^2a - a^2b = \\ &= c^2(b-a) + ab(b-a) + c(a^2-b^2) = c^2(b-a) + ab(b-a) + c(a-b)(a+b) = \\ &= (b-a)(c^2 + ab - ac - bc) = (b-a)[c(c-a) + b(a-c)] = \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Ez akkor 0, ha $a = b$, $a = c$ vagy $b = c$. Mivel a, b és c egy számtani sorozat három különböző eleme, ezért mindegyik esetben a két tag egyenlőségéből következik, hogy a differencia 0.

9.

Jelöljük a sorozat negyedik tagját a -val, hatodik tagját b -vel! A feladat feltételei szerint:

$$5 + \frac{1}{a} = \frac{225}{43},$$

és

$$6 + \frac{43}{225} = b.$$

Ezekből

$$a = \frac{43}{10} \quad \text{és} \quad b = \frac{1393}{225}.$$

10.

Legyen a sarkon álló ház házszáma x . Tudjuk, hogy $x + (x+2) + \dots + (x+2k) = 78$, ahol $k \geq 4$. A számtani sorozat összegképlete alapján ebből

$$\frac{(2x+2k)(k+1)}{2} = 78,$$

és

$$(x+k)(k+1) = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

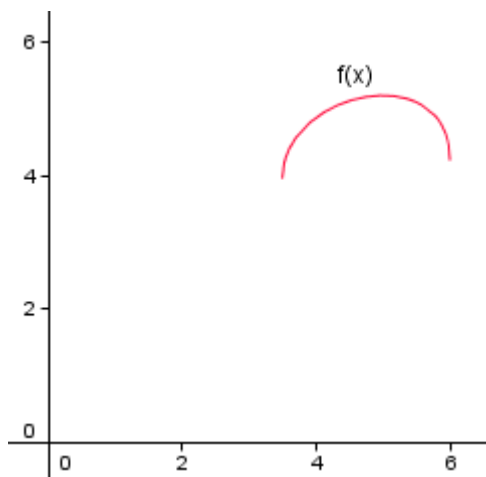
Mivel $k \geq 4$, ezért $k+1 = 6, 13, 26, 39$ vagy 78 . Mivel $x \geq 2$, ezért az utolsó négy esetben $(x+k)(k+1)$ értéke túl nagy lesz. Az első esetben $k = 5$, $x = 13 - 5 = 8$, és így a negyedik ház házszáma $8 + 3 \cdot 2 = 14$.

11.

Az $x = 0$, $y = f(0)$ helyettesítéssel $f(0) + f(0 + f(f(0))) = 2 \cdot 0 + f(0)$, vagyis az $f(f(0)) = a$ jelöléssel $f(a) = 0$. Ha $x = y = a$, akkor a feltétel szerint $0 = 2f(a) = 3a$, $a = 0$. Ha tehát létezik ilyen f függvény, arra szükségképpen $f(0) = 0$. Ekkor tetszőleges x valós szám esetén az $y = 0$ helyettesítéssel $2f(x) = 2x$ adódik, vagyis $f(x) = x$ teljesül minden x -re. Mivel ez a függvény minden x , y valós számpárra ki is elégíti az egyenletet, a feladat egyetlen megoldása az $f(x) = x$ függvény.

12.

Az f függvény értelmezési tartománya a $[\frac{7}{2}, 6]$ intervallum.



A számtani és négyzetes közepek között fennálló egyenlőtlenség értelmében minden ilyen x -re

$$\left(\frac{f(x)}{3}\right)^2 \leq \frac{(x-2) + (2x-7) + (18-3x)}{3} = 3,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-7} = \sqrt{18-3x}.$$

Mint hogy ennek pontosan az $x = 5$ szám tesz eleget, az $f(x)$ függvény maximuma $3\sqrt{3}$, amit az $x = 5$ helyen vesz fel.

13.

Minden m pozitív egész számra $(a_m, a_{2m}) = (m, 2m) = m$, vagyis $m \mid a_m$. Legyen n tetszőleges pozitív egész, ekkor alkalmas k pozitív egész számmal $a_n = kn$. Tegyük fel, hogy $k > 1$. Ekkor $a_n = kn \mid a_{kn}$, vagyis $kn \mid (a_n, a_{kn}) = (n, kn) = n$, ami nem lehetséges. Ezért minden n pozitív egész számra $a_n = n$.

14.

A számtani sorozat n . tagjára vonatkozó képlet alapján $(n-1)d = 80$, ahonnan $d = \frac{80}{n-1}$, $(n \neq 1)$, illetve ebből azonnal látható, hogy d , és a $q = \frac{12}{n-1}$ eredmény miatt q is nyilvánvalóan racionális szám. Felhasználva, hogy

$$\frac{q}{d} = 0,15 = \frac{3}{20},$$

ebből

$$q = \frac{3}{20} \cdot \frac{80}{n-1} = \frac{12}{n-1}.$$

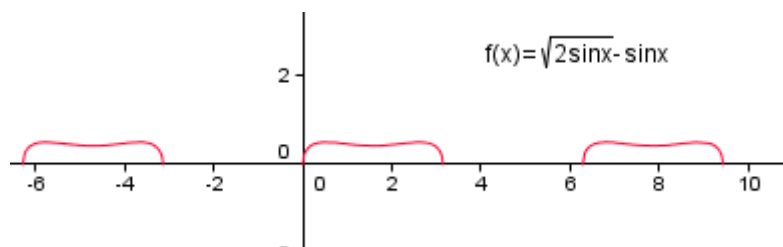
Ha d irracionális szám lenne, akkor $(n-1)d$ is irracionális lenne, ami ellentmondás. Tehát d racionális, így q is az: $q = \frac{a}{b}$, ahol $(a, b) = 1$, vagyis a tört számlálójában és nevezőjében nincsen közös prímtényező.

Ekkor viszont $81 = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}$ számlálójában és nevezőjében sincs közös prímtényező, a törtet nem lehet egyszerűsíteni, tehát csak abban az esetben lehet egyenlő 81-gyel, ha $b = 1$, tehát q egész. Mivel $q = \frac{12}{n-1}$ és n legalább 2, ez csak $n=2, 3, 4, 5, 7$ vagy 13 esetén lehetséges. Ekkor q értéke rendre 12, 6, 4, 3, 2 és 1, azonban q^{n-1} csak $n=5, q=3$ esetén lesz 81. Ebben az esetben $d=20$, és a_5 valóban 81.

Tehát csak egy ilyen sorozatpár van, mégpedig $n = 5$ esetén, ekkor $d = 20$ és $q = 3$.

15.

Legyen $f(x) = \sqrt{2 \sin x} - \sin x$.



Legyen $a = \sqrt{2 \sin x}$,

$$g(x) = a - \frac{1}{2}a^2 = a\left(1 - \frac{1}{2}a\right).$$

Ez egy másodfokú függvény, maximumát $a = 1$ -ben veszi fel. Ekkor $a = \sqrt{2 \sin x} = 1$, vagyis $\sin x = 1/2$. Tehát $f(x)$ értéke

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

$\frac{1}{2}$ esetén lesz a legnagyobb (ez az érték $\frac{1}{2}$).

16.

10 hosszú sorozatra jó példa az 5, -7, 5, -7, 5, 5, -7, 5, -7, 5 sorozat, és ennek bármely néhány egymást követő tagja is jó sorozatot alkot, vagyis $1 \leq n \leq 10$ esetén létezik ilyen sorozat. Megmutatjuk, hogy 11 hosszú sorozat már nem adható meg a kívánt módon, ebből következik, hogy $n \geq 11$ esetén nincsen megfelelő n hosszúságú sorozat. Tegyük fel, hogy mégiscsak létezik ilyen 11 hosszú sorozat. Ebben bármely két egymást követő tag valamelyik irányban kiegészíthető a sorozat 7 egymást követő tagjává, melyek összege negatív, de a hozzávett 5 tag összege pozitív. Ebből következik, hogy a sorozat bármely két egymást követő tagjának összege negatív. Ekkor azonban az első 10 tag összege egyszerre pozitív és negatív is kell, hogy legyen, ami nem lehetséges.

17.

I.

Az n néhány értékének kipróbálása után azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy $a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$. Ez $n = 0$ esetén így van, ha pedig valamely n természetes számra, akkor

$$a_{n+1} = a_n - \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 + \frac{1}{(n+2)!},$$

állításunk helyessége tehát következik a teljes indukció elvéből.

II.

Írjuk fel a megadott feltételek alapján az

$$a_0 - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{n-1} - a_n$$

különbségeket. A különbségek összeadása után azt kapjuk, hogy

$$a_0 - a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

és így $a_0 = 2$ alapján $a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$.

18.

Az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$ függvény pozitív értékeket vesz csak fel, ezért pontosan ott van a maximuma és a minimuma, ahol a négyzetének:

$$f^2(x) = 2\sqrt{(x-2)(3-x)} + 1.$$

Ennek (és $f(x)$ -nek is) legkisebb értéke 1, amit $x = 2$ és $x = 3$ esetén vesznek fel. A legnagyobb értéket pedig $x = 2,5$ esetén veszik fel, ekkor $f(x) = \sqrt{2}$.

8. fejezet - Elemi geometriai feladatok

1. Síkgeometriai feladatok

1.

Igazoljuk, hogy ha egy trapéz átlói merőlegesek, akkor szárainak szorzata legalább akkora, mint a párhuzamos oldalak szorzata.

2.

Legyen adott a síkon egy háromszög. Szerkesszük meg a háromszög belsejében azt a P pontot, amelyikre igaz, hogy azt a háromszög oldalegyeneseire vetítve, a vetületi pontok alkotta háromszög súlypontja éppen P .

3.

Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 72 darab egybevágó négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni?

4.

Adva van az $ABCD$ négyzet. Keressük meg azokat a P pontokat a négyzet síkjában, amelyekre a következő négy háromszög mindegyike egyenlő szárú: ABP, BCP, CDP, DAP !

5.

Adott egy O_1 középpontú, 3 egység sugarú k_1 kör, és egy O_2 középpontú, 4 egység sugarú k_2 kör a síkon, O_1 és O_2 távolsága 8 egység. Mindegyik kör középpontjából érintőket húzunk a másik körhöz. Igazoljuk, hogy az O_1 -ből húzott érintők k_1 körrel való metszéspontjainak távolsága egyenlő az O_2 -ből húzott érintők k_2 körrel való metszéspontjainak távolságával!

6.

Az AB szakaszt a C és D pontok három egyenlő részre bontják. A CD szakasz fölé egy CDO szabályos háromszöget szerkesztettünk. Az O középpontú, $OA = OB$ sugarú kör az OC félegyenest a P pontban metszi. Számítsuk ki az APB háromszög szögeit!

7.

Egy derékszögű háromszög átfogóján határozzuk meg azt a P pontot, amelyre teljesül, hogy P -t két befogóra merőlegesen vetítve, a vetületek távolsága a lehető legkisebb!

2. A feladatok megoldása

1.

Legyen az átlók metszéspontja E , az AB, BC, CD, DA szakaszok hossza rendre a, b, c, d . Ismeretes, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek, ha a szemközti oldalpárok négyzetének az összege egyenlő. Fennáll tehát a következő egyenlőség:

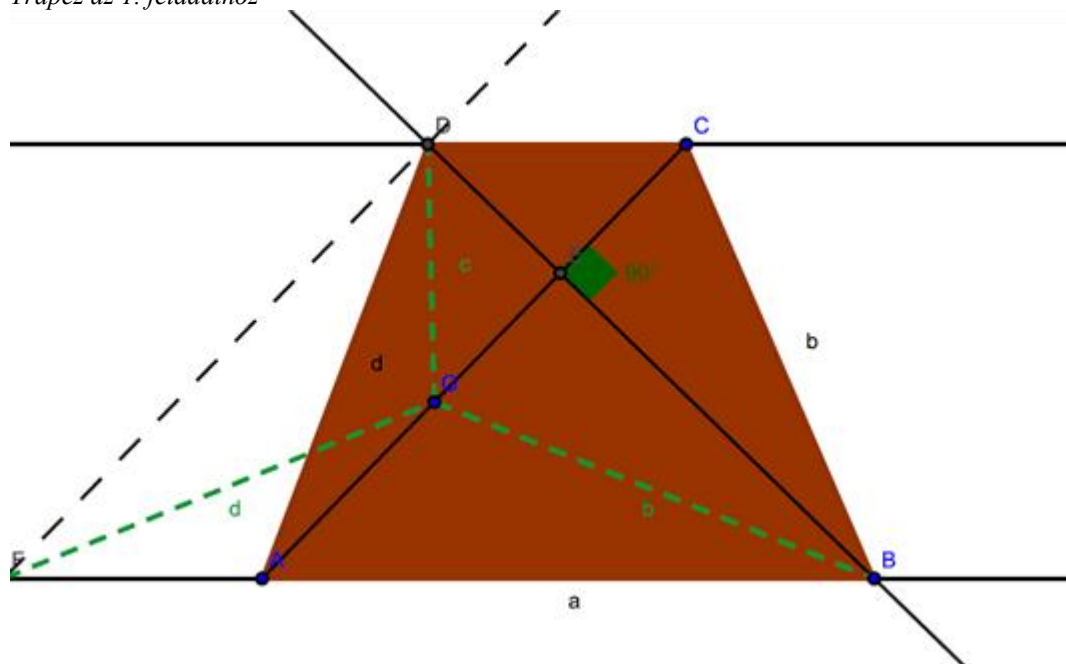
$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2.$$

Átrendezve és teljes négyzetté kiegészítve ebből az

$$(b + d)^2 - (a + c)^2 = 2(db - ac)$$

egyenlőség adódik. Az kell tehát megmutatnunk, hogy a bal oldal nemnegatív. Ehhez kiegészítjük az ábrát. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt $-n$ a BDG szakasszal, továbbá jelöljük tükörképét $-n$ a GF szakasszal. Ekkor $BCGF$ paralelogramma, d a BDG deltoidban pedig $BD = BG$ és $GF = GD$. Így $BCGF$ szimmetrikus trapéz, tehát $BC + GF = BG + GD$.

Trapéz az 1. feladathoz

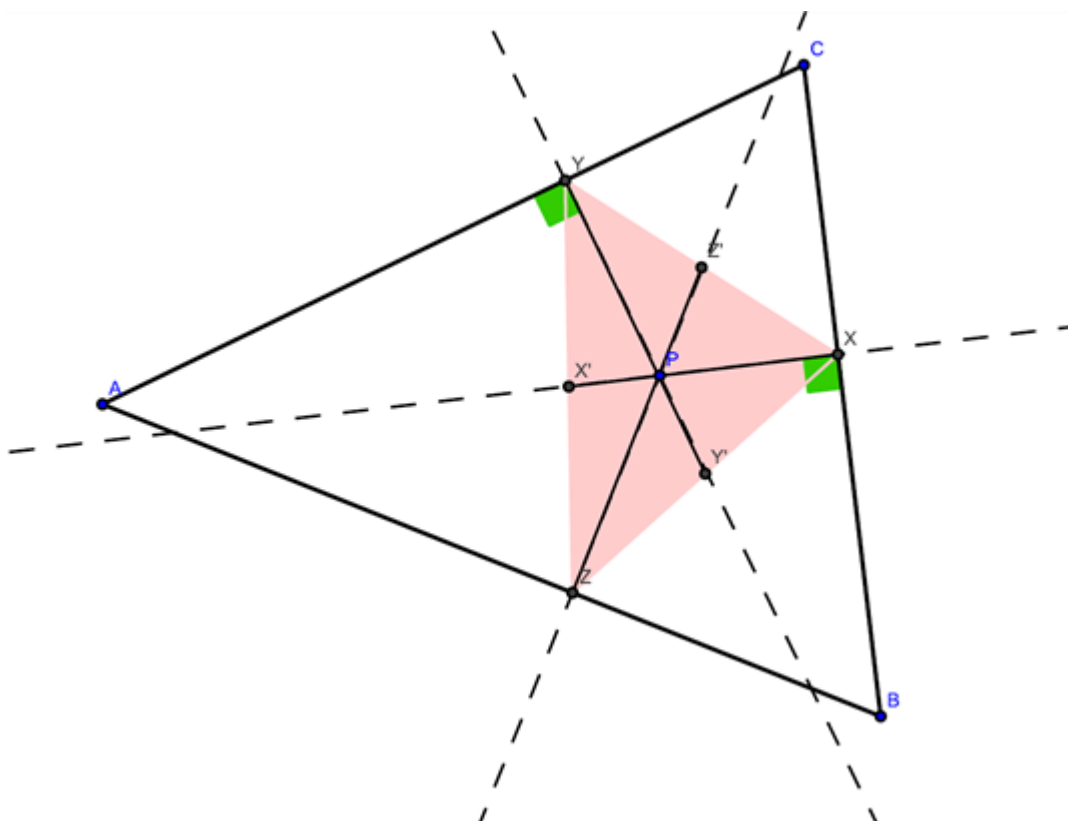


A BGF háromszögből a háromszögegyenlőtlenség szerint

$$b + d \geq a + c,$$

tehát a fenti kifejezés bal oldala valóban nemnegatív. Egyenlőség akkor áll fenn, ha G A -ba esik, vagyis a trapéz átlói felezik egymást, továbbá feltétel szerint merőlegesek, tehát a négyszög rombusz.

2.



A háromszög csúcsait jelölje A , B és C , a P pont vetületei a BC , CA , AB oldalakra pedig legyenek rendre X , Y és Z . P pontosan akkor súlypontja az XYZ háromszögnek, ha a PX , PY , PZ egyenesek rendre felezik az YZ , ZX , XY szakaszokat. Vizsgáljuk meg, mit jelent az, hogy a PZ egyenes felezi az XY szakaszt. Ha a PZ és XY egyenesek metszéspontját Z' -vel, az X és Y pontok AB egyenesre eső vetületeit pedig X_{AB} -vel és Y_{AB} -vel jelöljük, úgy $YZ' = Z'X$ akkor és csak akkor teljesül, ha $Y_{AB}Z = ZX_{AB}$, vagyis ha $YP \sin(\angle YPZ') = XP \sin(\angle XPZ')$.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy Z az AB szakasz belső pontja. Ekkor az ábráról, az $AZPY$ és $BXPZ$ húrnégyszögeket figyelembe véve, leolvasható, hogy

$$\angle YPZ' = 180^\circ - \angle YPZ = \angle YAZ = \alpha$$

és

$$\angle XPZ' = 180^\circ - \angle XPZ = \angle XBZ = \beta.$$

Ez akkor is igaz, ha a Z pont esetleg egybeesik az AB szakasz valamelyik végpontjával, vagy azon kívül helyezkedik el.

A szinusztétel alapján tehát a PZ egyenes pontosan akkor felezi az XY szakaszt, ha

$$1 = \frac{YZ'}{Z'X} = \frac{YP \cdot \sin \alpha}{XP \cdot \sin \beta} = \frac{YP}{XP} \cdot \frac{AC}{BC},$$

vagyis ha $\frac{YP}{XP} = \frac{AC}{BC}$. Azon P pontok, amelyekre ez az összefüggés teljesül, egy C -n áthaladó e_C egyenesre illeszkednek, amelyet megszerkeszthetünk úgy, hogy az AC és BC egyenesekkel, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, azoktól AC , illetve BC távolságban párhuzamosokat húzunk, és ezek metszéspontját összekötjük a C ponttal.

Hasonlóképpen, a PX (PY) egyenes pontosan akkor felezi az YZ (XZ) szakaszt, ha $\frac{ZP}{YP} = \frac{AB}{AC}$ ($\frac{XP}{ZP} = \frac{BC}{AB}$). Világos, hogy a három feltétel közül bármely kettő teljesülése maga után vonja a harmadik teljesülését is.

Ha P az XYZ háromszög súlypontja, akkor szükségképpen illeszkedik az EC egyenesre, és arra az EA egyenesre is, amelyet úgy szerkeszthetünk meg, hogy az AB és AC egyenesekkel párhuzamosokat húzunk, azoknak a háromszöget tartalmazó oldalán, tőlük EC , illetve EA távolságban, és ezen párhuzamosok metszéspontját az E csúccsal összekötjük. Az AB és AC egyenesek az ABC háromszög belsejében metszik egymást. A keresett pont nem lehet más, mint ez a metszéspont, és ez valóban jó is.

3.

72 darab egységnyi oldalú négyzetből kirakandó téglalapot az oldalak hosszával határozhatjuk meg, melyek pozitív egész számok, szorzatuk pedig 72. Mivel $72 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, ezért a következő táblázat foglalja össze a lehetséges eseteket.

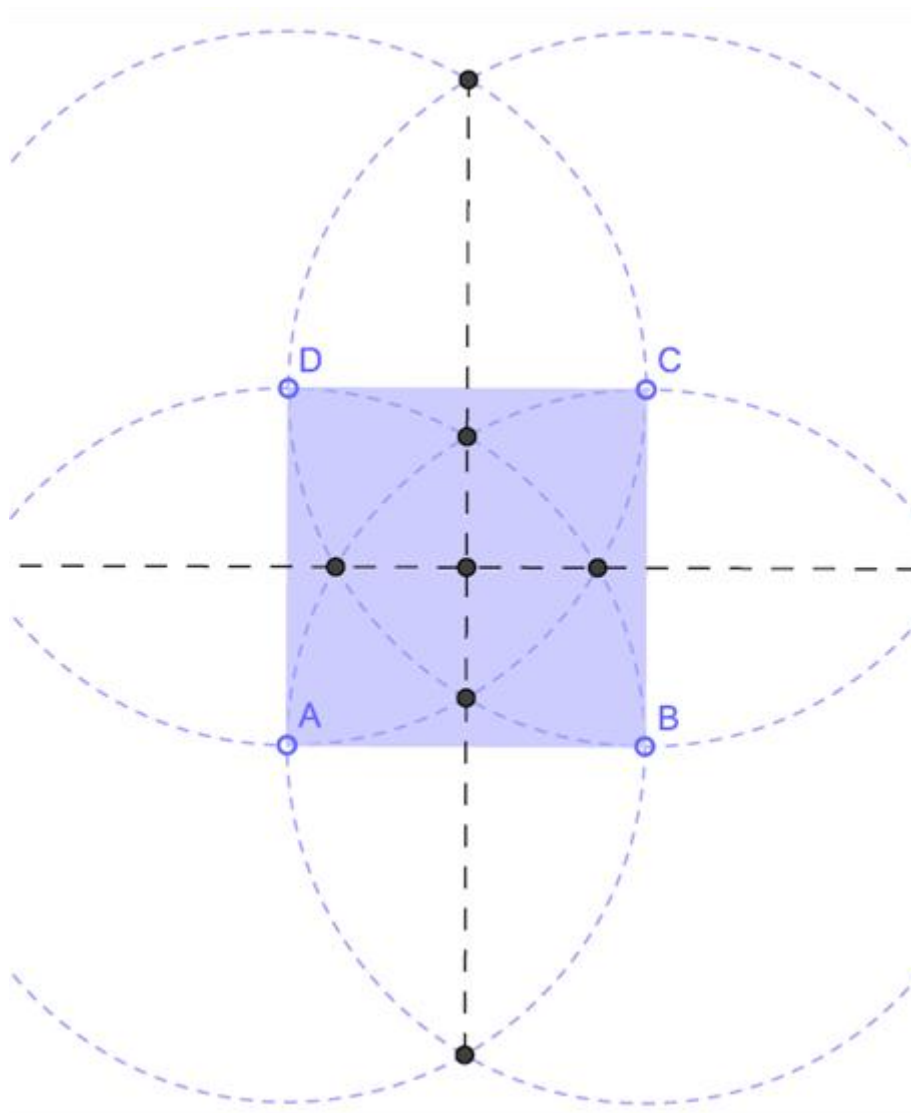
a	1	2	3	4	6	8
b	72	36	24	18	12	9

4.

P lehet a négyzet középpontja, ekkor mind a négy háromszög egybevágó, az alapok a négyzet oldalai. A háromszögek kétféleképpen lehetnek egyenlő szárúak:

- a négyzetoldal az alap, P pedig az oldalak felezőmerőlegesein van
- egyik száruk a négyzet oldala: ekkor P a megfelelő csúcstól oldalnyi távolságra van.

Ezért P a csúcsok körüli oldalnyi sugarú körökön lehet.



5.

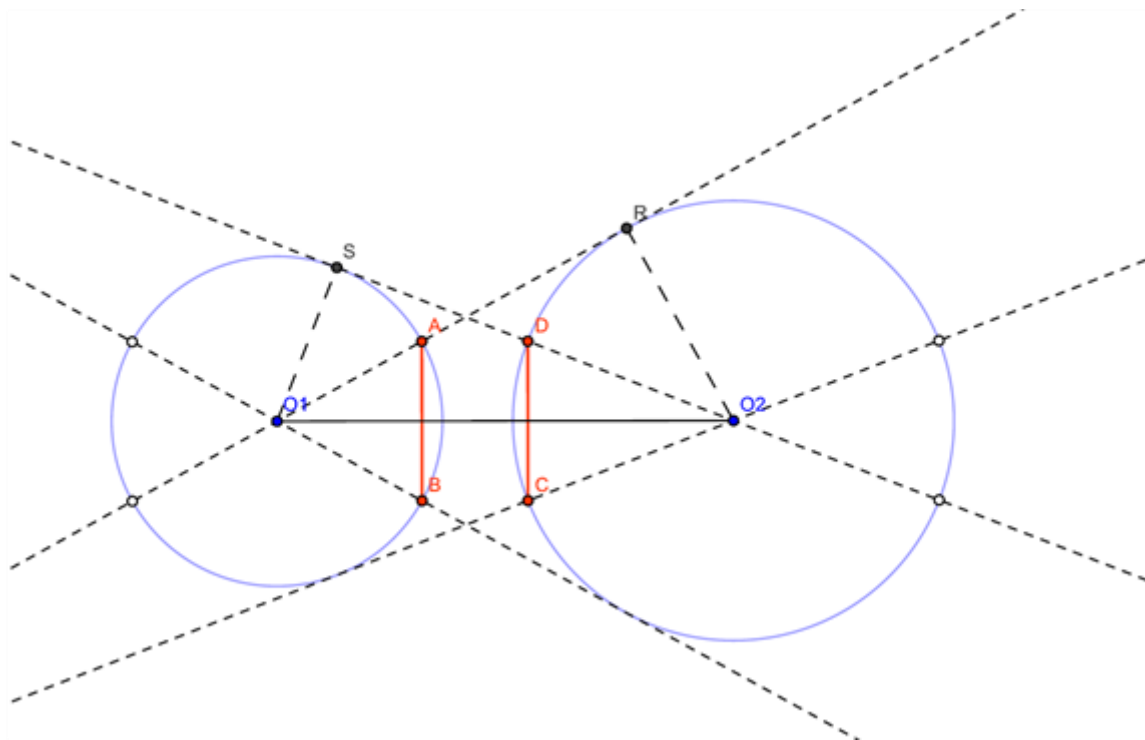
O_1O_2R és O_1AB derékszögű háromszögek hasonlóak:

$$\frac{AB}{O_1A} = \frac{RO_2}{O_1O_2}, \text{ amiből } AB = \frac{3}{2}.$$

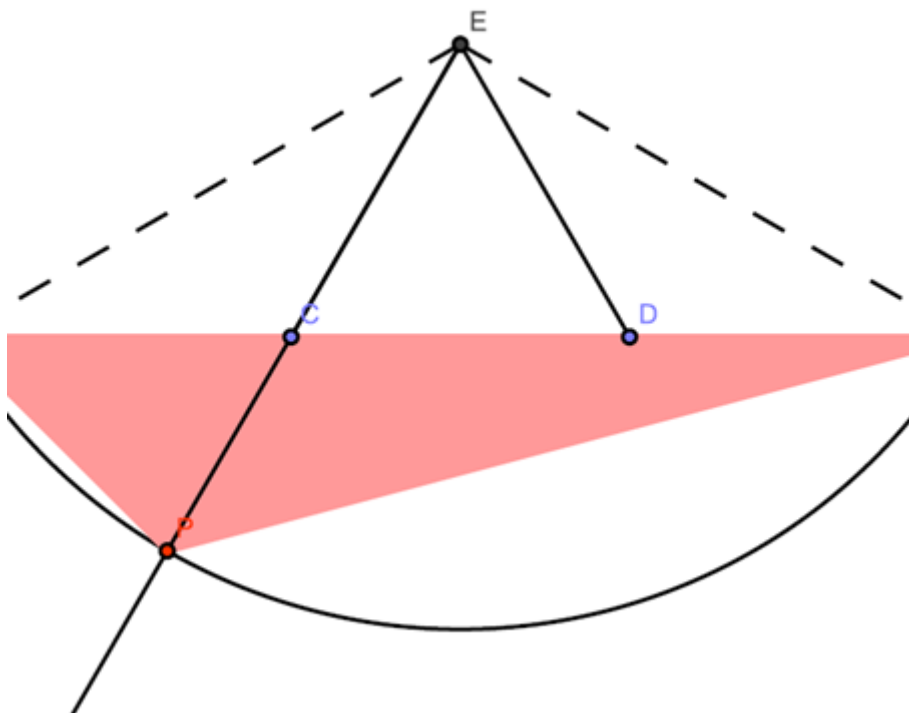
Ugyanígy O_1O_2S és DCO_2 háromszögek hasonlóak:

$$\frac{DC}{DO_2} = \frac{SO_1}{O_1O_2}, \text{ amiből } DC = \frac{3}{2}.$$

A kimetszett húrok valóban egyenlő hosszúak.



6.



$\triangle ACO \cong \triangle ODB$ egyenlőszárú háromszögek, és mivel csúcsszögük mellékszöge 60° , ezért az alapon fekvő szögek 30° -osak.

$\triangle OAP$ és $\triangle OPB$ háromszögek egyenlőszárúak, csúcsuk az O pont.

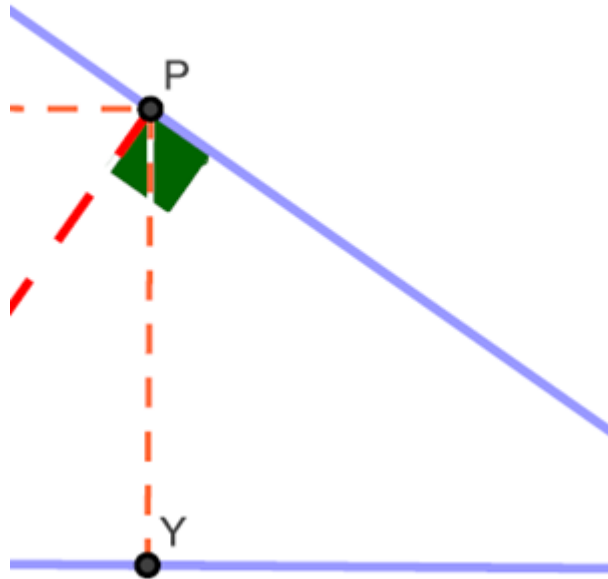
$$\angle OAP = \angle APO = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\angle BOP = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\angle OPB = \angle PBO = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Tehát $\alpha = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ és $\gamma = 75^\circ + 45^\circ = 120^\circ$.

7.



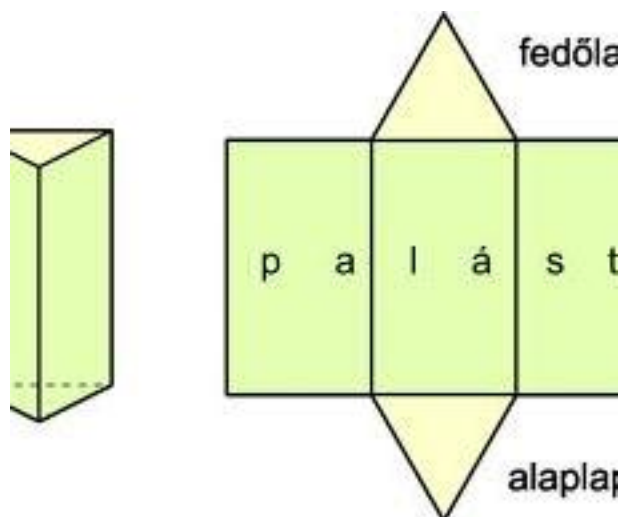
Az $XCPY$ négyszög téglalap, ezért az átlóira igaz, hogy egyenlő hosszúak: $XY = CP$. Így a talppontok távolsága akkor lesz a legkisebb, ha C a legközelebb van az átfogóhoz, azaz P a C -ből induló magasságvonal talppontja.

3. Térgeometriai feladatok

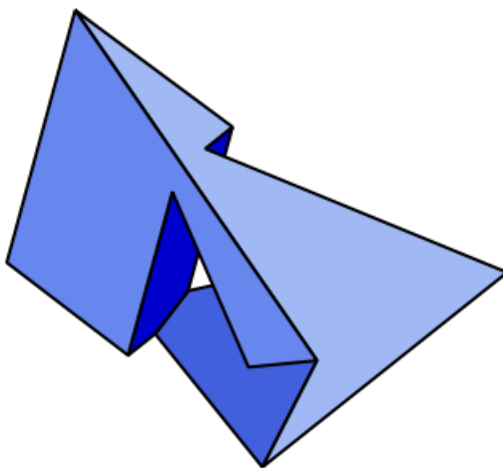
1.

Egy konvex testnek két háromszöglapja és három négyszöglapja van. Kössük össze az egyik háromszöglap mindegyik csúcsát a vele szemközti négyszöglap átlóinak metszéspontjával. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

Egy konvex poliéder – Háromszög alapú hasáb



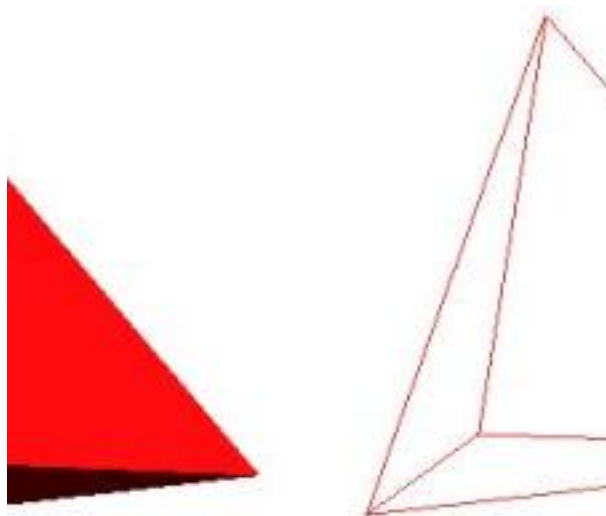
Példa a konkáv poliéderre – Szilassi poliéder



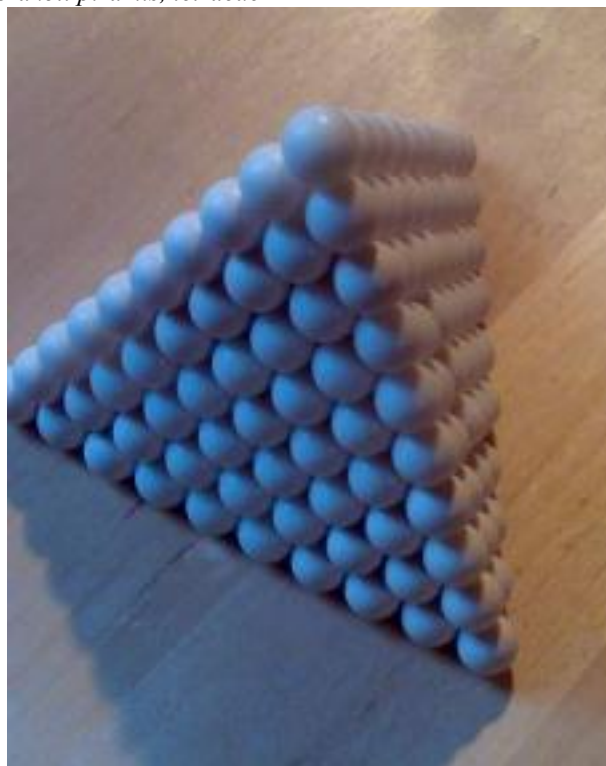
2.

Az $ABCD$ tetraéder D csúcsban találkozó élei páronként merőlegesek egymásra. A P, Q, R, S, T, U pontok a megfelelő élek felezőpontjai. Igazoljuk, hogy $PU = QS = RT$.

Háromszög alapú gúla, tetraéder



Gömbökből összerakott piramis, tetraéder



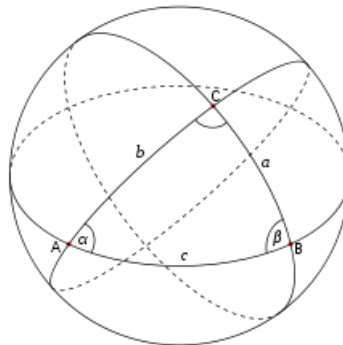
3.

Adott egy szabályos tetraéder. Igazoljuk, hogy a tetraéder bármely belső pontjára igaz, hogy a négy laptól mért távolságának összege egyenlő az egyik csúcshoz (bármelyiknek) a szemközti laptól mért távolságával!

4.

Bizonyítandó, hogy ha egy test minden síkmetszete kör, akkor a test gömb.

Gömb síkmetszetei



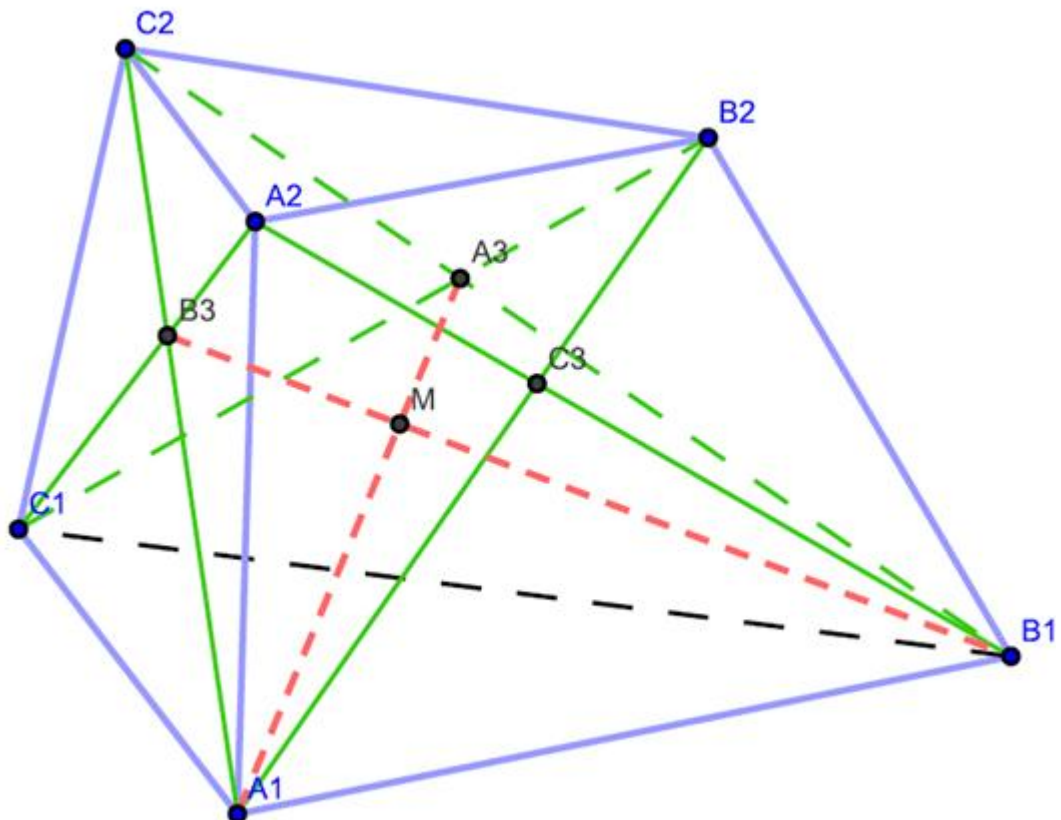
5.

Az $ABCD$ gúla tartalmazza (belsejében vagy határán) a D -től különböző P pontot. Bizonyítsuk be, hogy a PA, PB, PC távolságok között van olyan, amely kisebb a DA, DB, DC távolságok valamelyikénél.

4. A feladatok megoldása

1.

Meg kell határoznunk a test alakját. Egy négyszöglap éleihez csatlakozik mind a négy további lap. Mivel a test konvex, így a testet a négyszöglapok síkjai által határolt egyik konvex térrészből a háromszöglapok síkjai metszik ki.



Ez a térrész egy triéder (háromoldalú testszöglet, amelyiknek a lapszögei 180° -nál kisebbek), vagy végtelen, háromoldalú hasáb. Ennek a határlapjain a további két metsző sík között négyszögeknek kell keletkezniük, tehát a két sík metszésvonalának a térrészen kívül kell lennie, vagy párhuzamos a két sík. A háromszöglapoknak tehát nincs közös pontja.

Legyenek ezek a lapok $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$, a további élek pedig A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 . Jelöljük a $B_1B_2C_2C_1$, $C_1C_2A_2A_1$, $A_1A_2B_2B_1$ lapok átlóinak a metszéspontját rendre A_3 , B_3 , C_3 -mal, és nézzük az A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 egyeneseket.

Az $A_1B_1C_2$ síkmetszet B_1C_2 oldalának belső pontja A_3 , A_1C_2 -nek pedig B_3 , így A_1A_3 és B_1B_3 metszi egymást a háromszög belsejének egy M pontjában. Hasonlóan látható, hogy C_1C_3 is metszi A_1A_3 -at is, B_1B_3 -at is.

Az $A_1B_1C_2$ síknak egyik oldalára esik C_1 , a másikra A_2 és B_2 , tehát C_1 és C_3 is ellenkező oldalára esik. C_1C_3 -nak tehát egy közös pontja van a síkkal, és így csak akkor metszheti A_1A_3 -at is, B_1B_3 -at is, ha ez a pont M . A három egyenes tehát egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

2.

A tetraéder D csúcsból induló élei páronként merőlegesek egymásra, ezért ADC , ADB és BDC derékszögű háromszögek. Az SR, RU, PS, PT, QT, QU a megfelelő derékszögű háromszögek középvonalai, tehát $PT = SD = RU$, $SP = DT = UQ$, $RS = UD = QT$ és az egyenlő szakaszok párhuzamosak is. Ezért a P, T, D, S, R, Q, U pontok egy téglalapot nyolc csúcsa közül kerülnek ki, a PU, QS, RT szakaszok pedig a téglalapot testátlói, tehát egyenlő hosszúak.

3.

Jelölje t a szabályos tetraéder lapjainak területét és m a magasságát (bármelyik csúcsból a szemközti lapra állított merőleges szakasz hosszát). Legyen továbbá P a tetraéder egy tetszőleges belső pontja. A tetraéder térfogata egyenlő annak a négy tetraédernek a térfogatösszegével, amelyre a P -t a csúcsokkal összekötő szakaszok felbontják az eredeti tetraédert. Ha most a P távolságát az egyes lapoktól rendre így jelöljük: d_1, d_2, d_3, d_4 , ezek az egyes résztetraéderek megfelelő magasságok, tehát

$$\frac{t \cdot m}{3} = \frac{t \cdot d_1}{3} + \frac{t \cdot d_2}{3} + \frac{t \cdot d_3}{3} + \frac{t \cdot d_4}{3}.$$

Ebből következik, hogy

$$m = d_1 + d_2 + d_3 + d_4,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

4.

Tekintsük a testnek egy leghosszabb húrját. E húron átfektetett sík a testet körben metszi, s a húr ennek a körnek átmérője, hiszen különben ennek a körnek, tehát magának a testnek is volna a kiszemeltnél hosszabb húrja. Ebből azonban az következik, hogy a test azonos azzal a gömbbel, amelynek egyik átmérője a kiszemelt húr. Ez az okoskodás hiányos, mert nem bizonyítja, hogy van leghosszabb húr. Okoskodásunk bizonyítássá válnék, ha ezt is bizonyítanánk, ehhez azonban a felsőbb matematika eszközeinek használatára volna szükség.

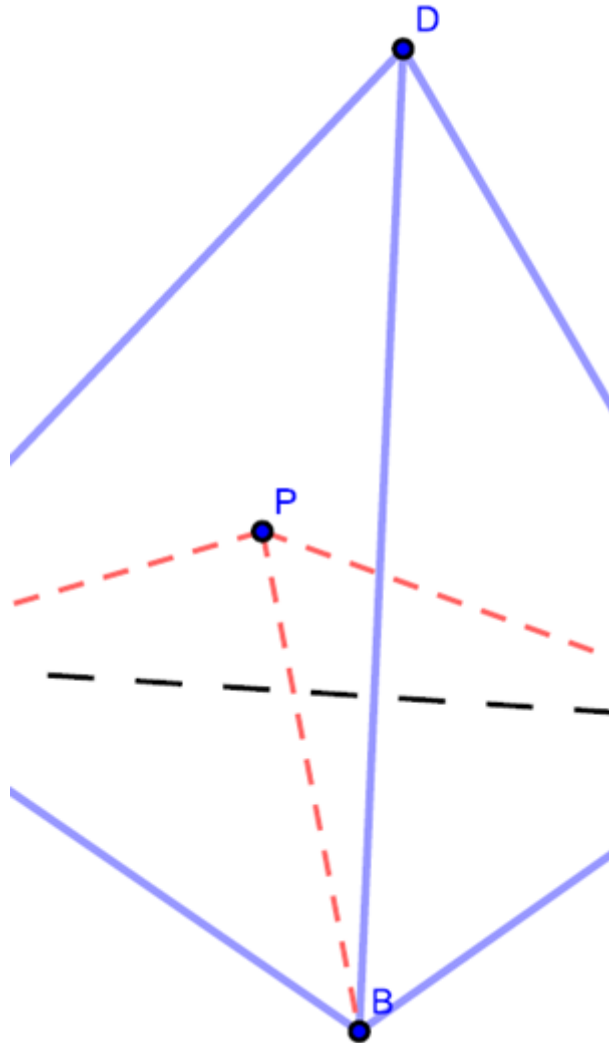
5.

Feltehetjük, hogy P nincs a DA, DB, DC oldaléleken, mert ha pl. a DA élnek D -től különböző pontja, akkor $PA < DA$.

Elég megmutatnunk, hogy az APD, BPD, CPD háromszögek valamelyike P -nél derékszögű vagy tompaszögű. Ha ugyanis pl. az $APD\Delta$ ilyen, akkor DA a legnagyobb oldala, s ezért $PA < DA$.

A P -ből induló, PD -vel hegyesszöget bezáró félegyenesek annak a féltérnek a belsejében haladnak, amelyet a P -ben PD -re merőlegesen állított sík határol, s amely tartalmazza a D pontot. Ha tehát az előbb említett

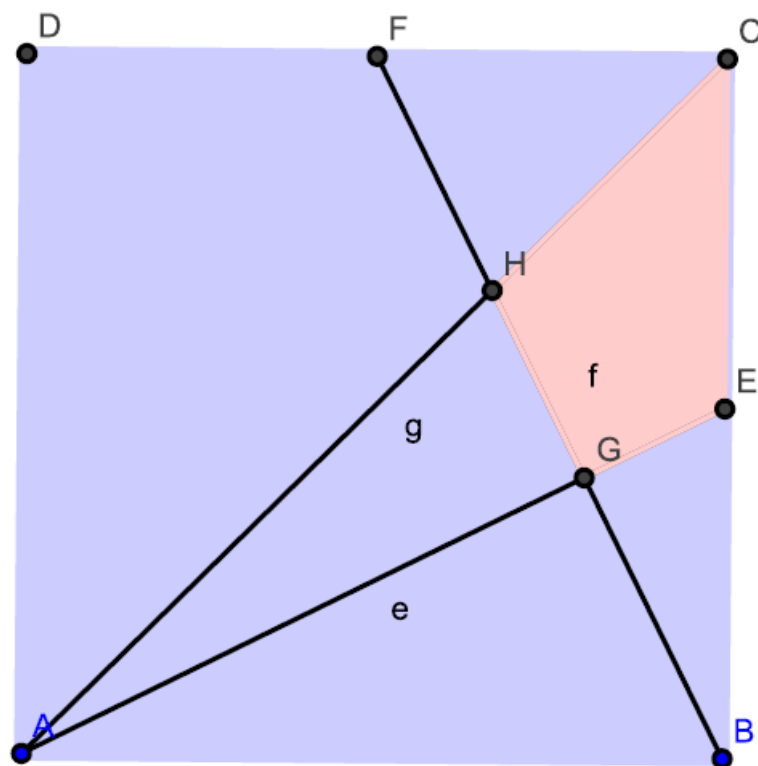
háromszögek P -nél mindannyian hegyesszögűek, akkor a gúla minden csúcsa a mondott féltér belsejében van, tehát maga a gúla is, s ez ellentmond annak, hogy P a féltér határsíkján helyezkedik el. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy háromszögeink között valóban van olyan, amely P -nél nem hegyesszögű.



5. Feladatok önálló feldolgozásra

1.

Az $ABCD$ négyzet területe 60 cm^2 , a BC és a CD oldalak felezőpontjai E , illetve F . Az AE és BF szakaszok metszéspontja G , az AC és BF szakaszoké H . Mekkora a $CHGE$ négyszög területe?



2.

Egy konvex négyszög egyik középvonala felezi a területét. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög trapéz!

3.

A c átfogójú derékszögű háromszög súlyvonalainak négyzetösszege d . Igazoljuk, hogy ha c és d egész szám, akkor $d \geq 6$!

9. fejezet - Logikai feladatok és halmazok

1. Feladatok

1.

1990 papírlapra ráírtunk egy-egy számot. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 45 lap úgy, hogy vagy mindegyikre azonos, vagy mindegyikre különböző szám van írva!

2.

Felbontható-e az $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ halmaz egy két elemű A és egy 13 elemű B halmazra úgy, hogy A elemeinek szorzata egyenlő legyen B elemeinek összegével?

3.

Egy matematikaversenyen három feladatot tűztek ki. 56 versenyző oldott meg legalább egy feladatot. 2 versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta. A harmadik feladatot megoldók közül 10-zel többen oldották meg a másodikat, mint az elsőt. Az elsőt és a másodikat is megoldó versenyzők 10-zel többen voltak, mint akik csak a harmadikat oldották meg. Aki megoldotta az elsőt és a harmadikat is, az a másodikat is megoldotta. Akik csak az első vagy csak a második feladatot oldották meg, összesen 14-en voltak. Hány versenyző oldotta meg a harmadik feladatot?

4.

Egy hételemű halmaz háromelemű részhalmazait kell kiszíneznünk úgy, hogy ha két részhalmaz metszete üres, akkor színük különböző. Legalább hány színre van ehhez szükségünk?

5.

Egy kerek asztalnál hazugok és igazmondók ülnek, összesen 30-an. Tudjuk, hogy minden hazudós két szomszédja közül pontosan az egyik hazudós. A 30 ember közül 12-en azt mondják, hogy nekik pontosan egy hazudós szomszédjuk van, a többiek pedig azt, hogy mindkét szomszédjuk hazudós. Hány hazudós ül az asztalnál?

6.

Adott az $1, 2, 3, \dots, n$ számoknak n darab különböző részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, amelyet minden halmazból elhagyva, a megmaradó halmazok továbbra is különbözőek.

7.

Négy lány és négy fiú elmentek együtt egy bálba. A keringőnél mind a négy fiú felkérte a négy lány valamelyikét táncolni (egy lányt csak egy fiú), majd a tangónál hölgyválasz volt, azaz a négy lány mindegyike kérte fel a négy fiú valamelyikét (egy fiút csak egy lány). A két tánc során nem táncolt együtt kétszer ugyanaz a pár. A következőket tudjuk a felkérésekről:

a.

Csabi azzal a lánnyal keringőzött, aki Danival tangózott.

b.

Andris azt a lányt kérte fel keringőzni, aki azzal a fiúval tangózott, akivel Enikő keringőzött.

c.

Berci azzal a lánnyal keringőzött, aki Mari keringőpartnerével tangózott.

d.

Gizi nem tangózott Bercivel.

e.

Hédi egy olyan fiúval tangózott, aki nem keringőzött Gizivel.

A két tánc után a táncmester kérésére mindenki annak a háta mögé állt, akit felkért (annak a hátát nézte). Így a négy fiú és a négy lány éppen egy nagy körbe rendeződött el.

Ki kivel keringőzött, illetve tangózott?

8.

Egy gyakorló órán a matematikatanár ötféle feladatot tűzött ki, minden fajtából három darabot. Egy feladat jó megoldásáért 1 pontot kapnak a tanulók, ha nem oldottak meg ebből a fajtából többet. Ha két jó megoldásuk van egy fajtából, akkor ezekre feladatonként 4 pontot, ha mindhárom megvan egy fajtából, akkor ezekre feladatonként 9 pontot kapnak. A feladatmegoldásban a tanulók csapatokban vettek részt. A végén minden csapatnak a többiekétől különböző pontszáma alakult ki, de minden csapat pontszáma 3-mal osztható lett. Legfeljebb hány csapat vehetett részt a feladatmegoldásban?

9.

Van egy város, ahol mindenki igazmondó vagy hazudós, és örült vagy normális. Az igazmondók azt mondják, amit gondolnak, a hazudósok az ellenkezőjét mondják annak, amit gondolnak. A normálisak az igazat gondolják, az örültek az igazság ellenkezőjét gondolják. Négyen, akik ebben a városban laknak, a következőket mondták:

- Andi: Örült vagyok.
- Bandi: Igazmondó vagyok.
- Szandi: Hazudós vagyok.
- Dendi: Normális vagyok.
- Andi: Szandi igazmondó.
- Bandi: Dendi örült.
- Szandi: Bandi hazudós.
- Dendi: Szandi normális.

Állapítsuk meg a négy személyről, hogy melyikük hazudós, illetve melyikük igazmondó, valamint melyikük normális, illetve melyikük örült.

10.

Négy fiú és négy lány táncolni mentek egy bálba. Az első négy tánc során a négy fiú mindegyike pontosan egyszer táncolt a négy lány mindegyikével, egy-egy táncot teljesen végigtáncolva egymással. Csaba Fannival, Barnabás Helénnel táncolta a bécsi keringőt. Aladár tangópartnerre Gabriella, Dávidé Fanni volt. Gabriella Csabával, Enikő Dáviddal mambózott. Ki kivel táncolta az első táncot, az angol keringőt?

11.

A 8. évfolyam négy osztálya vett részt az iskolai matematika versenyen. A versenyen minden csapat különböző pontszámot ért el. Az eredményhirdetés előtt az egyik matematikatanár összeadta minden lehetséges módon 2-2 csapat eredményét, és megmondta, hogy a kapott összegek közül a legnagyobb 128, a

legkisebb 82. Továbbá azt is megsúgta, hogy a 2. és 3. helyezett csapat között csak 4 pont volt a különbség. Mennyivel gyűjtött több pontot az első helyezett, mint a negyedik helyezett?

12.

Az A halmaz elemszáma több, mint a B halmaz elemszáma, de kevesebb, mint B elemszámának kétszerese. Tudjuk továbbá, hogy a B halmaznak 16-tal több részhalmaza van, mint a C halmaznak. Hány részhalmaza lehet az A halmaznak?

13.

Egy 500 embert érintő felmérés során kiderült, hogy a megkérdezettek 46%-a szereti az eper, 71%-a a vanília, 85%-a csokoládé fagyaltot. Van-e a megkérdezettek között hat olyan ember, aki mind a háromféle fagyaltot szereti?

14.

Egy iskola kilencedik évfolyamán négy osztály van. A négy osztály négynapos erdei iskola programon vett részt. Minden osztály egy nap túrázni ment, a többiek ekkor különböző foglalkozásokon, előadásokon vettek részt. Hétfőn az A osztály túrázott, ekkor 81-en, kedden a B osztály, ekkor 79-en, szerdán a C-sek, ekkor 75-en, csütörtökön pedig a D-sek, ekkor 80-an maradtak a táborban. Hány fős osztályok vannak az évfolyamon?

2. A feladatok megoldásai

1.

Ha a lapokon szerepel legalább 45 különböző szám, akkor kiválasztható 45 lap úgy, hogy mindegyiken különböző szám szerepel.

Ha nincs 45 különböző szám, azaz legfeljebb 44 féle szám szerepel, akkor az 1990 számot helyezzük el annyi skatulyába, ahány szám szerepel! (Az azonos számokat ugyanabba a skatulyába, a különbözőket különböző skatulyába.)

Mivel legfeljebb 44 skatulya van, és $44 \cdot 44 = 1936 < 1990$, ezért lesz olyan skatulya, amelyben 44-nél több, tehát legalább 45 szám szerepel.

Így kiválasztható 45 olyan lap, amelyen azonos számok szerepelnek.

2.

Nem bontható fel. Tegyük fel, hogy létezik ilyen felbontás.

$1 + 2 + \dots + 15 = 120$. Legyen a kételemű halmaz $A = \{x, y\}$. Ekkor B elemeinek összege $120 - x - y$. A feltétel szerint

$$xy = 120 - x - y$$

$$xy + y + x = 120$$

$$xy + x + y + 1 = 121$$

$$(x + 1)(y + 1) = 121$$

Ha x és y az eredeti halmaz különböző elemei, akkor 121-et kellene felírni két különböző 2 és 16 közé eső szám szorzataként. Ez nem lehetséges, tehát nem létezik megfelelő felbontás.

3.

Azok között, akik a másodikat megoldották, 10-zel többen oldották meg a harmadikat, mint az elsőt. Így $m = l + 10$.

Az elsőt és a másodikat is megoldó versenyzők 10-zel többen voltak, mint akik csak a harmadikat oldották meg. Így

Aki megoldotta az elsőt és a harmadikat is, az a másodikat is megoldotta. Így $l = 0$.

Akik csak az első, vagy csak a második feladatot oldották meg összesen 14-en voltak. Így $x + y = 14$.

$$x + z + 8 + 14 - x + 0 + 2 + 10 + z = 56 \quad \Rightarrow \quad z = 11.$$

Tehát a harmadik feladatot 23-an oldották meg.

4.

Legyen a halmaz $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Az $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,1,2\}$, $\{3,4,5\}$, $\{6,7,1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{5,6,7\}$, $\{1,2,3\}$ sorozatban minden egyes részhalmaz más színű kell legyen, mint az azt megelőző. Látszik tehát, hogy két szín még nem elegendő, hiszen a sorozat tagjait felváltva színezve, az utolsó tagnál azt tapasztaljuk, hogy azt más színnel kell kiszíneznünk, mint a vele megegyező első tagot.

Három színnel azonban a feladat már megoldható. Színezzük pirosra azokat a részhalmazokat, amelyekben benne van a 7, a többi háromelemű részhalmazt pedig színezzük kékre, illetve zöldre szerint, hogy a bennük lévő elemek összege páros-e, avagy páratlan. Tegyük fel, hogy $\{a,b,c\}$ és $\{d,e,f\}$ metszete üres. Ha valamelyik piros, akkor a másik nyilván nem lehet az, hiszen a 7 nem szerepelhet mindkét halmazban. Ha viszont egyik sem piros, akkor $\{a,b,c,d,e,f\} = \{1,2,3,4,5,6\}$, tehát $(a+b+c) + (d+e+f) = 21$. Ezért a két részhalmazban szereplő elemek összege különböző paritású, vagyis egyik részhalmaz kék, a másik pedig zöld kell legyen.

5.

A feltételek szerint azt, hogy pontosan egy hazudós szomszédjuk van, csak az igazmondók mondhatják. Ekkor a következő ülésrend lehetséges: (I – igazmondó, H – hazudós) IHIIIHHI. Ha egy igazmondó mindkét oldalán hazudós ül, akkor az IHHIHHI szekvencia valósul meg. Három igazmondó nem ülhet egymás mellett a feltételek szerint. Ezek szerint a hazudósok száma páros. A két lehetséges szekvenciát az IHHI és a HHI ülésrenddel írhatjuk le. Csak az első esetként, azaz hogy minden igazmondó mellett üljön hazudós is nem lehetséges, mert 30-an vannak, holott ennek a feltételnek csak annyian tudnak megfelelni, amikor számuk 4-gyel osztható. Ezért $4k + 3l = 30$, ahol k az első eset előfordulása, l pedig a másodiké, ami úgy is megfogalmazható, hogy $2(k+l)$ hazudós és $2k+l$ igazmondó, továbbá, hogy $2k = 12$, ahonnan $l = 2$. Tehát 16 hazudós és 14 igazmondó ül az asztalnál.

6.

Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, vagyis minden $1 \leq i \leq n$ esetén található az adott halmazok között egy A_i és egy B_i halmaz úgy, hogy $i \notin A_i$, de $B_i = A_i \cup \{i\}$. Tekintsük az adott halmazokat egy gráf csúcsainak, melyben minden i -re az A_i és B_i halmazokat összeköttöttünk egy e_i éllel. Ennek az n szögpontú, nyilván egyszerű gráfnak pontosan n éle van, tehát található benne egy kör, vagyis az adott halmazoknak egy olyan $H_1, H_2, \dots, H_k$ sorozata, ahol az indexekkel modulo k számolva, minden i -re H_i és H_{i+1} között halad egy él. A kör irányítását megfelelően választva feltehetjük, hogy $H_1 = A_j$, $H_2 = B_j$ valamely $1 \leq j \leq n$ esetén. Ekkor a j szám nem eleme a H_1 halmaznak, de eleme H_2 -nek. Mivel $i \neq 1$ esetén H_i és H_{i+1} között már nem az e_j él vezet, ebből $j \in H_3$, majd ugyanígy $j \in H_4, \dots, j \in H_k$, végül $j \in H_1$ adódik. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy az állítás mégiscsak igaz kellett legyen.

7.

Jelöljük a személyeket kezdőbetűikkel, a betűkből induló nyilakkal pedig azt, hogy ki kit kért fel táncolni. A megadott adatok alapján az alábbiakat tudjuk:

- $C \rightarrow ? \rightarrow D$
- $A \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow E$
- $B \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow M$

- $G \rightarrow B$ nem!

Hédi olyan fiú mögött áll, aki előtt nem Gizi áll.

Nézzük végig a fiúk lehetséges sorrendjét! Ez csak két esetet jelent, ha Csabától indulunk. Ugyanis a Csaba előtti fiú mindenképpen Dani, és a folytatás csak A, B vagy B, A sorrend lehet.

I. eset: C előtt D, előtte B, előtte A. Ekkor a korábban mondottak alapján a kör így nézhet ki: $C \rightarrow ? \rightarrow D \rightarrow ? \rightarrow B \rightarrow ? \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow C$. De az A előtti harmadik személy Enikő (AMCE sorrend), tehát $C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow ? \rightarrow B \rightarrow ? \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow C$. Gizi nem állhat Berci mögött, így a kör: $C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow C$. De $H \rightarrow B \rightarrow G$ ellentmond az utolsó feltételnek.

II. eset: C előtt D, előtte A, előtte B. Ekkor a korábban mondottak alapján a kör így nézhet ki: $C \rightarrow ? \rightarrow D \rightarrow ? \rightarrow A \rightarrow ? \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$. De a B előtti harmadik személy Mari (BECM sorrend), tehát $C \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow ? \rightarrow A \rightarrow ? \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$. Gizi nem állhat Berci mögött, így Andris mögött kell álljon, Hédi pedig Andris előtt. Így a kör: $C \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C$. Ennek megfelelően a keringőző párok: Csaba-Mari, Dani-Gizi, Andris-Hédi, Berci-Enikő, a tangó párok: Mari-Dani, Gizi-Andris, Hédi-Berci, Enikő-Csabi.

8.

A csapatok a megoldott feladatcsoportokért 0, 1, 2 · 4 vagy 3 · 9, azaz 0, 1, 8 vagy 27 pontot kaptak. Egy csapatnak öt feladatcsoport megoldására volt lehetősége, tehát pontszáma összesen öt darab 0, 1, 8 vagy 27 összege. Foglalkozzunk táblázatba, az egyes feladatcsoportokra kapott milyen pontszámok esetén lesz 3-mal osztható az összpontszám!

$1 + 1 + 1 + 1 + 8 = 12$	$1 + 1 + 1 + 27 + 27 = 57$
$1 + 1 + 8 + 8 + 27 = 45$	$1 + 8 + 27 + 27 + 27 = 90$
$1 + 8 + 8 + 8 + 8 = 33$	$0 + 0 + 0 + 1 + 8 = 9$
$27 + 27 + 27 + 27 + 27 = 135$	$0 + 0 + 0 + 27 + 27 = 54$
$0 + 0 + 0 + 27 + 27 = 54$	$0 + 0 + 0 + 0 + 27 = 27$
$0 + 0 + 0 + 0 + 27 = 27$	$0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
$1 + 1 + 1 + 0 + 27 = 30$	$1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3$
$1 + 1 + 8 + 0 + 27 = 63$	$1 + 1 + 8 + 8 + 0 = 18$
$1 + 8 + 0 + 27 + 27 = 63$	$1 + 8 + 0 + 0 + 27 = 36$
$1 + 8 + 0 + 0 + 27 = 36$	$8 + 8 + 8 + 0 + 27 = 51$
$8 + 8 + 8 + 0 + 0 = 24$	$0 + 27 + 27 + 27 + 27 = 108$
$0 + 27 + 27 + 27 + 27 = 108$	$0 + 0 + 27 + 27 + 27 = 81$

Ez összesen húsz lehetőség, tehát legfeljebb 20 csapat vehetett részt a feladatmegoldásban.

9.

A feltételek alapján könnyen végiggondolható, hogy a normális igazmondó és az örült hazudós igazat mond, az örült igazmondó és a normális hazudós pedig hazudik. Mivel Szandiról ketten is állítottak valamit, ezért induljunk ki Szandi első mondatából.

I. eset: Ha Szandi első mondata igaz, akkor Szandi örült hazudós, tehát Andi és Dendi sem mondott igazat a második állításában, így az elsőben sem. Ennek megfelelően Andi normális hazudós és Dendi örült igazmondó. Ekkor Bandi második állítása igaz, így Bandi normális igazmondó. Ekkor viszont Szandi második állítása nem igaz, de Szandi igazat mond a feltételünk értelmében, így ez az eset nem lehetséges.

II. eset: Szandi első mondata tehát hamis, így Szandi örült igazmondó. Ekkor Andi második mondata igaz, tehát Andi az első mondata alapján örült hazudós. Dendi második állítása viszont nem igaz, így Dendi is örült igazmondó. Bandi második állítása igaz, tehát az első is, így ő normális igazmondó.

10.

Készítsünk egy táblázatot, melyben feltüntetjük, hogy melyik fiú melyik lánnyal milyen táncot táncolt. Rögzítsük ebben a táblázatban a feladatban megadott információkat.

	Csaba	Barnabás	Aladár	Dávid
anni	bécsi keringő			tangó
lelén		bécsi keringő		
gabriella	mambó		tangó	
nikő				mambó

A táblázat minden oszlopában és minden sorában pontosan egy táncnak kell szerepelnie. Így kiderül, hogy Gabriella csak Dáviddal bécsi keringőzhetett, így Dávid Helénnel angol keringőzött. Helénnek így a mambóban csak Aladár lehetett a partnere, tehát Csabával tangózott. Ezeket rögzítve a táblázatban a hiányzó táncok gyorsan beírhatók.

Tehát az angol keringőt táncoló párok: Aladár Fanni, Barnabás Gabriella, Csaba Enikő, Dávid Helén.

11.

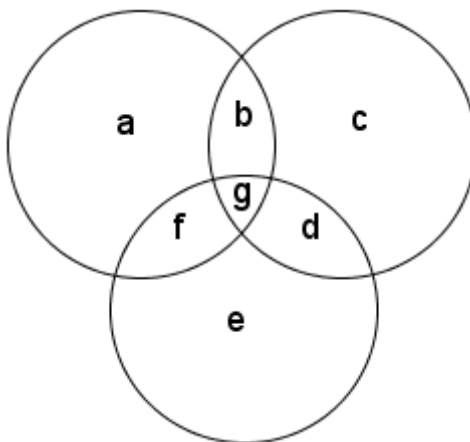
A legnagyobb összeget akkor kapjuk, ha a két legtöbb pontot elért csapat eredményét adjuk össze, a legkisebb összeget pedig akkor, ha a két legkisebb pontszámot elért csapat eredményével számolunk. Az első és a második helyezett tehát 46 ponttal többet gyűjtött összesen, mint a harmadik és a negyedik helyezett. Ebből 4 pont a második és harmadik közti különbségből származik, tehát a maradék 42 pont az első és a negyedik helyezett pontszámának különbsége.

12.

Ha a B halmaznak k db eleme van, a C halmaznak pedig n , akkor B részhalmazainak száma 2^k , C részhalmazainak száma 2^n . Tehát a két kettőhatvány különbsége 16. Ha mindkettő nagyobb 32-nél, akkor a különbségük már akkor is legalább 32, ha szomszédos kettőhatványok. Ha az egyik nagyobb 32-nél, a másik pedig 32 vagy kisebb, akkor is legalább 32 a különbség. Ha mindkettő kisebb vagy egyenlő 32-nél, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy csak a 32 és a 16 jelent megoldást. Tehát a B halmaznak 32 db részhalmaza, így 5 eleme van. Mivel az A halmaz elemszáma B elemszámánál több, de B elemszámának kétszeresénél kisebb, ezért az A halmaz 6, 7, 8 vagy 9 elemű, részhalmazainak száma 64, 128, 256 vagy 512 lehet.

13.

Van.



A Venn-diagram alapján a következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$a + b + c + d + e + f + g = 500,$$

$$a + b + f + g = 0,46 \cdot 500 = 230,$$

$$b + c + d + g = 0,71 \cdot 500 = 355,$$

$$d + e + f + g = 0,85 \cdot 500 = 425.$$

Ezek alapján

$$500 - (230 + 355 + 425) = -510 = (a + b + c + d + e + f + g) -$$

$$-(a + b + f + g) - (b + c + d + g) - (d + e + f + g) = -(b + d + f + 2g).$$

Vagyis $(b + d + f + g) + g = 510$, és mivel $b + d + f + g$ legfeljebb 500, a jobboldal viszont legalább 510, ezért legalább 10. Vagyis legalább 10 olyan ember van, aki mind a háromféle fagyaltot szereti.

14.

Adjuk össze az egyes napokon a táborban maradók létszámát. Mivel minden osztály háromszor volt bent, és egyszer kirándult, ezért minden tanulót pontosan 3-szor számolunk meg ebben az összegben. Így az összegként kapott 315 a tanulók számának háromszorosa, tehát 105 tanuló van összesen. Az egyes napokon a táborban maradók létszámát ebből kivonva megkapjuk a kiránduló osztályok létszámát. Ennek megfelelően az A-ban 24-en, a B-ben 26-an, a C-ben 30-an és a D-ben 25-en vannak.

10. fejezet - Kombinatorika és valószínűség a versenyfeladatokban

1. Feladatok

1.

Egy sakkbajnokságon mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Ha a résztvevők számát felére csökkentenék, akkor 145-tel kevesebb lenne a mérkőzések száma. Mennyivel csökkenne a mérkőzések száma, ha a résztvevők eredeti számát nem felére, hanem negyedére csökkentenénk?

2.

Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Két versenyző lemondta a részvételét, ezért a tervezettnél 17-tel kevesebb mérkőzésre kerül sor. Hány résztvevő lesz így a lemondás után?

3.

a.

Hány olyan háromjegyű természetes szám van, melynek az első vagy az utolsó számjegye 3?

b.

Hány 10 jegyű számot képezhetünk 5 db 2-es, 2 db 1-es és 3 db 0 számjegyből?

c.

A b) feladatban szereplő 10 jegyű számok közül hány lesz négyzetszám?

4.

Egy 9 tagú társaságból mindenki k társának küld karácsonyi üdvözlőlapot. Milyen k esetén lesz biztosan olyan pár, akik kölcsönösen üdvözölték egymást?

5.

Van 12 számkártyánk, amelyekből 4 kártyán 1-es, 4 kártyán 2-es és 4 kártyán a 0 számjegy szerepel.

a.

Hány különböző, 12 jegyű számot lehet összeállítani ezekből a kártyákból?

b.

Hány különböző, 4-gyel osztható 12 jegyű számot lehet összeállítani?

c.

Hány különböző, 12 jegyű négyzetszámot lehet összeállítani a kártyákból?

6.

Egy dobozban 2000 golyó van. Tömegük rendre 1 g, 2 g, 3 g, ..., 1999 g, 2000 g.

a.

Valaki kivett a dobozból 500 golyót. Biztosan ki tudunk-e még 500-at venni úgy, hogy a kivett 1000 golyó tömegének összege megegyezzen a dobozban maradt 1000 golyó tömegének összegével?

b.

És ha 501-et vett ki valaki, akkor biztosan ki tudunk-e még 499-et venni úgy, hogy a kivett 1000 golyó tömegének összege megegyezzen a dobozban maradt 1000 golyó tömegének összegével?

7.

Egy társaságban házaspárok jöttek össze, és mindenki mindenkivel kezét fogott, kivéve a saját házastársával. Így 200-nál több kézfogás történt. Másnap eggyel kevesebb házaspár jelent meg, ezért ezen a napon 200-nál kevesebb volt a kézfogások száma. Hány házaspár jelent meg a társaságban a két napon?

8.

Számítógépünkre írtunk egy programot, amely véletlenszerűen kiír egy háromjegyű számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy abban páros és páratlan számjegy is szerepel?

V I D E Ó

9.

Adott a síkban 10 általános helyzetű egyenes. (Nincs köztük két párhuzamos, és bármely metszésponton csak két egyenes halad át.)

a.

Hány metszéspontja van a 10 egyenesnek?

b.

Hány egymást nem fedő szakaszt, és hány félegyeneset számolhatunk össze a 10 egyenesen?

V I D E Ó

10.

Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek

a.

minden jegye páratlan,

b.

minden jegye páros?

c.

Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a jegyek nem növekvő sorrendben követik egymást, azaz egyik jegy sem nagyobb az előtte állónál?

11.

Hány olyan 11-gyel osztható 9-jegyű szám van a tízes számrendszerben, amelyben a nulla kivételével minden számjegy előfordul?

12.

A G gráfnak egy S feszített részgráfját „dominánsnak” nevezzük, ha G minden S -en kívüli csúcsának van szomszédja S -ben. Létezik-e olyan gráf, aminek páros számú számú domináns részgráfja van?

13.

11 000 űrhajósból álló csoportot készítettek fel a Mars-utazásra. Tudjuk, hogy bármely 4 űrhajós közül kiválasztható 3 olyan, akik megfelelő személyzetet alkotnak a leszálló modulhoz. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható 5 űrhajós úgy, hogy közülük bármelyik 3 megfelelő személyzet legyen.

2. A feladatok megoldásai

1.

Ha egy körmérkőzéses bajnokságon n résztvevő van, akkor mindegyikük játszik a többi $n - 1$ résztvevővel, ez $n(n - 1)$ mérkőzés. De így minden mérkőzést minden résztvevőnél számoltunk, ezért a mérkőzések száma csak ennek fele: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ha eredetileg x résztvevő volt, akkor a mérkőzések tervezett száma $\frac{x(x-1)}{2}$.

feleannyi résztvevő esetén:

$$\frac{\frac{x}{2}(\frac{x}{2}-1)}{2}.$$

Ezek különbsége 145.

$$\frac{x(x-1)}{2} - \frac{\frac{x}{2}(\frac{x}{2}-1)}{2} = 145.$$

ennek pozitív megoldása $x = 20$. Tehát eredetileg 20 résztvevő lett volna.

Ha a résztvevők száma 20-ról negyedére, azaz 5-re csökken, akkor a mérkőzések száma $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ -ról $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ -re, tehát 180-nal csökken.

2.

Ha a lemondás után x résztvevő marad, akkor a két lemondott játékosnak elmarad egyenként x mérkőzése a megmaradtak ellen, és egy mérkőzése egymás ellen:

$$2x + 1 = 17; \quad x = 8.$$

3.

a.

Ha az első jegy 3-as, akkor a következő két helyen 10-10 jegy állhat, tehát 100 ilyen szám van.

Ha az utolsó jegy 3-as, akkor az első helyen 9, a második 10 jegy állhat, tehát 90 ilyen szám van.

Kétszer számoltuk azokat, amelyeknek első és utolsó jegye is 3-as, itt a középső helyen 10 jegy állhat, tehát 10 ilyen szám van.

Tehát összesen $100 + 90 - 10 = 180$ olyan háromjegyű természetes szám van, melynek az első vagy az utolsó számjegye 3.

b.

Ha az első jegy 1-es, akkor a további 9 jegyből $\frac{9!}{3! \cdot 5!}$ szám képezhető.

Ha az első jegy 2-es, akkor a további 9 jegyből $\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$ szám képezhető.

Tehát a képezhető 10 jegyű számok száma:

$$\frac{9!}{3! \cdot 5!} + \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{9! \cdot 7}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = 1764$$

c.

Minden számban a jegyek összege 12, ezért mind osztható 3-mal, de egy sem osztható 9-cel, így egyik sem lehet négyzetszám.

4.

Rajzoljunk egy 9 pontú gráfot, és abban a küldött lapok jelentsenek egy irányított élt. Akkor lesz olyan pár, akik üdvözölték egymást, ha van olyan $A - B$ pontpár, hogy A -ból B -be és B -ből A -ba is megy él, tehát ha van kettős él. Ha minden él egyszeres, akkor legfeljebb $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ élt húzhatunk be.

$k = 4$ üdvözlőlap esetén $9 \cdot 4 = 36$ élt rajzolunk be, ez még elképzelhető, hogy mind egyszeres él. Ez meg is valósítható pl. úgy, hogy a 9 pontot egy körre írjuk, és mindegyikből a tőle pozitív irányban levő négy következőhöz megy él.

$k = 5$ üdvözlőlap esetén $9 \cdot 5 = 45$ élt rajzolunk be, itt már biztosan van kettős él.

Tehát $k \geq 5$ esetén biztosan lesz olyan pár, akik üdvözölték egymást.

5.

a.

Az 1-gyel kezdődő számok száma annyi, ahányféleképpen a megmaradó 4db 2-es, 4 db 0 és 3 db 1-es számjegyet sorba lehet állítani:

$$\frac{11!}{3! \cdot 4! \cdot 4!} = 11550.$$

A 2-vel kezdődő számok száma is:

$$\frac{11!}{4! \cdot 3! \cdot 4!} = 11550.$$

Az összes 12 jegyű szám száma:

$$2 \cdot \frac{11!}{3! \cdot 4! \cdot 4!} = 23100.$$

b.

Négygyel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha az utolsó két jegyből álló szám osztható 4-gyel. Ezért a következő hat eset lehetséges:

Az 1-gyel kezdődő 00-ra végződő számok száma:

$$\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260.$$

A 2-vel kezdődő 00-ra végződő számok száma:

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260.$$

Az 1-gyel kezdődő 20-ra végződő számok száma:

$$\frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680.$$

A 2-vel kezdődő 20-ra végződő számok száma:

$$\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!} = 1260.$$

Az 1-gyel kezdődő 12-re végződő számok száma:

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260.$$

A 2-vel kezdődő 12-re végződő számok száma:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = 1260.$$

Így a négyvel osztható számok szám a fenti hat szám összege: 7980.

c.

Mindegyik számban a jegyek összege $4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$. Ezért mindegyik szám osztható 3-mal, de egyik sem osztható 9-cel, tehát egyik sem lehet négyzetszám.

6.

a.

Biztosan ki tudunk még 500-at venni.

Képezzük a következő 1000 párt: (1;2000); (2;1999); (3;1998); ... (1000;1001).

Nézzük sorban az először kivett 500 golyót.

- ha valamelyiknek a fenti párja nincs a kivettek között, akkor vegyük ki a párját is.
- ha egy pár mindkét eleme az előre kivettek között van, akkor vegyünk ki egy olyan párt, amelynek mindegyik eleme még a dobozban van.

Az így kivett 1000 golyó 500 párt alkot a fentiek közül, és mivel minden pár azonos tömegű, így a kivett 1000 golyó tömege azonos a dobozban maradt 1000 golyó tömegével. Mindegyik összesen $500 \cdot 2001 \text{ g} = 1000500 \text{ g}$.

b.

Nem biztos, hogy ki tudunk venni még 499-et.

Ha először például az 1 g, 2 g, ... 501 g tömegűeket vesszük ki, akkor ez összesen $501 \cdot \frac{1+501}{2} = 125751 \text{ g}$.

Ha ehhez a legnehezebb 499-et vesszük ki, akkor ezek tömege $499 \cdot \frac{1502+2000}{2} = 873749 \text{ g}$.

Az 1000 golyó tömege $125751 \text{ g} + 873749 \text{ g} = 999500 \text{ g}$, így sem éri el az összes tömeg felét.

7.

Ha az első napon n házaspár, azaz $2n$ résztvevő volt, akkor mindenki $2n - 2$ emberrel fogott kezét, ez összesen $2n(2n - 2)$ kézfogás, de így minden kézfogást kétszer számoltunk, tehát a kézfogások száma $2n(n - 1)$. A második napon $n - 1$ házaspár esetén a kézfogások száma $2(n - 1)(n - 2)$.

A feltételek szerint

$$2(n-1)(n-2) < 200 < 2n(n-1)$$

azaz,

$$(n-1)(n-2) < 100 < n(n-1)$$

Ha $n > 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $(n-1)(n-2)$ és $n(n-1)$ is növekvő, ezért elegendő egy megfelelő n értéket találni, amire a fenti egyenlőtlenség teljesül.

$n = 11$ esetén $9 \cdot 10 < 100 < 10 \cdot 11$. Ez 11-nél kisebb és nagyobb n -eknél már nem teljesülhet.

Tehát első nap 11, második nap 10 házaspár vett részt. Valóban, 11 házaspárnál 220, 10 házaspárnál 180 kézfogás történt.

A végeredmény a másodfokú egyenlőtlenségek és $n > 1$, illetve $n \in \mathbb{N}^+$ figyelembe vételével is megkaphatjuk az eredményt.

8.

Csak páratlan jegyeket tartalmazó számban az egyes helyiértékekre 5-5-5 jegyet választhatunk, ez összesen 125 szám.

Csak páros jegyeket tartalmazó számban az egyes helyiértékekre 4-5-5 jegyet választhatunk, ez összesen 100 szám.

Összesen van 900 háromjegyű szám, tehát a páros és páratlan jegyet is tartalmazók száma $900 - 125 - 100 = 675$.

Tehát annak a valószínűsége, hogy a kiírt számban páros és páratlan számjegy is szerepel: $\frac{675}{900} = \frac{3}{4}$.

9.

a.

Bármely két egyenes meghatároz egy metszéspontot, ezért 45 metszéspont van.

b.

Minden egyenest 9 másik metsz, és a 9 metszéspont között 8 szakasz és a két végén 1-1 félegyenes van. Tehát 80 szakaszt és 20 félegyenest számolhatunk össze.

10.

a.

Az egyes helyiértékekre 5,5,5 számjegyet választhatok, ezért csak a páratlan jegyet tartalmazó számok száma $5^3 = 125$.

b.

0 nem állhat az első helyen, ezért az egyes helyiértékekre 4,5,5 számjegyet választhatok, így a csak páros jegyeket tartalmazó számok száma $4 \cdot 5^2 = 100$.

c.

A 0, 1, 2, ..., 9 számokból kell kiválasztani hármat úgy, hogy ismétlés is lehetséges, de minden lehetséges hármaszt csak egyszer, nem növekvő sorrendben számolunk. Így a lehetőségek száma $C_{10}^3(i) = 220$. Ebből egy nem jó, a 000, tehát az összes eset száma: 219.

11.

Mivel a 0-n kívül összesen 9 számjegyet használunk fel a 9 jegyű számhoz, ezért minden számjegy pontosan egyszer szerepel benne. A keresett számok 11-gyel oszthatóak, tehát az oszthatósági szabály szerint a páratlan helyeken álló számjegyek összegének és a páros helyeken álló számjegyek összegének különbsége osztható 11-gyel. Legyen a szám

$\overline{abcdefghi}$

alakú: $11 \mid (a + c + e + g + i) - (b + d + f + h)$. A legnagyobb különbség $(9+8+7+6+5)-(4+3+2+1)=25$, a legkisebb $(1+2+3+4+5)-(6+7+8+9)=-15$. A számjegyek összege 45, (így a páratlan helyeken álló számjegyek összege pont 45 és a különbség összegének fele) tehát a különbség nem lehet páros: csak 11 vagy -11 lehet. Legyen A a számjegyek összege, B a páratlan helyeken, C pedig a páros helyeken álló számjegyek összege. Ekkor egyrészt $A = B + C = 45$, másrészt $B - C = 11k$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva $2B = 45 + 11k$, ahonnan nyilvánvalóan látszik, hogy k nem lehet páros, azaz csak $B - C = -11$ vagy $B - C = 11$ lehetséges. Ha a különbség 11, akkor az ötös csoportbeli számok összege 28. Keressük azon öt különböző számjegyet, melyek összege 28: (9 8 7 3 1), (9 8 6 4 1), (9 8 6 3 2), (9 8 5 4 2), (9 7 6 5 1), (9 7 6 4 2), (9 7 5 4 3), (8 7 6 5 2), (8 7 6 4 3). Ha a különbség -11, akkor kereshetjük azon 4 számjegyet, melyek összege 28: (9 8 7 4) és (9 8 6 5). Mivel a számjegyek különbözők és egyik sem 0, ezért a csoporton belül bármilyen sorrendben követhetik egymást: a páratlan helyeken álló 5 számjegyből álló csoport 5!, a páros helyeken álló csoport 4 tagjának összesen 4! különböző sorrendje van. A 9 számjegy két részre osztásakor tehát $5! \cdot 4!$ különböző számot kapunk, melyek egy jó kettéosztás esetén mind oszthatóak 11-gyel. Összesen $9+2=11$ jó kettéosztása volt a számjegyeknek, tehát $11 \cdot 5! \cdot 4! = 31\,680$ darab olyan 11-gyel osztható 9-jegyű szám van, amiben a nulla kivételével minden számjegy előfordul.

12.

Legyen a gráf $G=(V,E)$, és definiáljunk egy új gráfot. Az új gráf csúcsai legyenek V nemüres részhalmazai. Két részhalmazt akkor kössünk össze, ha diszjunktak, és nem megy él az egyik halmazból a másikba.

Nézzük, mennyi lehet egy $H \subset V$ részhalmaznak a foka az új gráfban. Ha egy H domináns, akkor minden P pont vagy benne van H -ban, vagy megy él P -ből H -ba. Ez azt jelenti, hogy ha V egy nemüres részhalmaza diszjunkt H -tól, akkor megy belőle él H -ba, tehát semmiképpen nincs összekötve H -val az új gráfban, vagyis egy domináns részhalmaz foka nulla.

Most tegyük fel, hogy H nem domináns. Álljon H_1 azokból a pontokból, amelyek nincsenek H -ban, és nem is megy belőlük él H -ba. Ez tehát nem üres. Egy $H_2 \subset V$ akkor és csak akkor lesz H -val összekötve, ha H_1 -nek részhalmaza. Mivel az üres halmaz nincs a csúcsok között, ha H_1 -ben k pont van, akkor H -nak $2k - 1$ szomszédja van, ami páratlan, mivel $k > 0$.

Tehát pontosan a nem domináns részhalmazoknak páratlan a foka az új gráfban, így páros sok van belőlük. Az üres halmaz nyilván sosem domináns, így összesen páratlan sok nem domináns halmaz van, de összesen páros sok részhalmaz van, tehát páratlan sok domináns részhalmaz van.

13.

Vizsgáljuk meg először, hogy kiválasztható-e 4 jó úrhajós, vagyis 4 olyan úrhajós, hogy közülük bármelyik 3 megfelelő személyzetet alkosson. Vegyünk egy tetszőleges A úrhajóst. Két másik úrhajóst kössünk össze egy piros madzaggal, ha A -val együtt megfelelő személyzetet alkotnak, ellenkező esetben pedig kék madzaggal kössük össze őket. Ha van 4 úrhajós, melyek közül bármely kettő kék madzaggal van összekötve, akkor vegyünk ezek közül hármat, legyenek ezek B, C, D .

Az A, B, C, D úrhajósok közül csak B, C, D alkothat megfelelő személyzetet, tehát a feladat feltétele szerint nekik mindenképpen megfelelő személyzetet kell alkotniuk. Vagyis ha 4 úrhajós közül bármelyik kettő kék madzaggal van összekötve, akkor közülük bármelyik 3 megfelelő személyzet lesz. Ha pedig van 4 úrhajós, melyek közül bármely kettő piros madzaggal van összekötve, akkor a feladat feltételének megfelelően válasszunk ki közülük hármat, akik megfelelő személyzetet alkotnak, legyenek most ezek B, C, D . Ekkor az A, B, C, D úrhajósok közül bármely 3 megfelelő személyzetet alkot.

- Jelölje tehát $R(a, b)$ azt a legkisebb n természetes számot, amelyre igaz, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf minden élét piros vagy kék színűre festjük, akkor vagy lesz benne egy a csúcsú teljes részgráf, amelyiknek minden éle piros, vagy pedig egy b csúcsú teljes részgráf, amelyiknek minden éle kék. A fenti okoskodás

szerint, ha az A úrhajós mellé kiválasztunk $R(4,4)$ további úrhajóst, akkor közöttük lesz 4 jó úrhajós. Más szóval, bármely $R(4,4) + 1$ úrhajós között lesz 4 olyan, hogy közülük bármely 3 jó személyzetet alkot.

- Nyilván $R(2, n) = R(n, 2) = n$, és nem nehéz megmutatni, hogy $a, b \geq 3$ esetén $R(a, b) \leq R(a, b-1) + R(a-1, b)$, hiszen ha egy $R(a, b-1) + R(a-1, b)$ szögpontú teljes gráf minden élét piros vagy kék színűre festjük, akkor egy csúcsát kiválasztva, abból vagy kiindul legalább $R(a, b-1)$ kék színű él, vagy pedig kiindul legalább $R(a-1, b)$ piros színű él. Ebből az egyenlőtlenségből $a + b$ szerinti teljes indukcióval adódik, hogy

$$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1} = \binom{a+b-2}{b-1}.$$

- Ezek szerint $R(4,4) + 1 \leq 21$. Tekintsünk most $R(21,5) + 1 \leq \binom{24}{4} + 1 = 10627 < 11000$ úrhajóst. Vegyünk megint csak egy tetszőleges A úrhajóst, két másik úrhajóst pedig kössünk össze egy piros madzaggal, ha A -val együtt megfelelő személyzetet alkotnak, ellenkező esetben meg késsel. Ha van 5 úrhajós, melyek közül bármely kettő kék madzaggal van összekötve, akkor a már látott gondolatmenet szerint közülük bármely 3 jó személyzetet kell, hogy alkosson. Ha nincs 5 ilyen úrhajós, akkor viszont kell lennie 21 olyan úrhajósnak, melyek közül bármely kettő piros madzaggal van összekötve. Mint láttuk, ezek között van 4 jó úrhajós, akik mellé még A -t kiválasztva kapunk 5 jó úrhajóst.

11. fejezet - Nemzetközi matematikaversenyek és a Matematikai Diákolimpia

1. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

A Kárpát-medencében a matematikát több helyen tanítják magyar nyelven. A különböző országokban tanító magyar anyanyelvű matematika tanárok régóta érezték, hogy a meglévő matematika versenyek mellett szükség van egy szélesebb körű rendezvényre, ahol a különböző régiókban élő diákok találkozhatnak, összemérhetik tudásukat, erősíthetik együvé tartozásukat. A magyar diák, a környező országok közül, bármelyikben is éljen, meríthet a világhírű magyar matematika gazdag kincsestárából, valamint az ukrán, a román, a délszláv, a szlovák és más népek matematikai hagyományaiból is. A verseny megrendezésének régóta dédelgetett gondolatát, -amelyre az új közép-európai helyzetben nyílt lehetőség- az 1991-es szegedi Rátz László Vándorgyűlésen fejtette ki Bencze Mihály brassói matematika tanár.



Az első verseny megrendezésének önzetlen nagy munkáját Oláh György tanár úr vállalta magára.



Így született meg a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny. Azóta minden évben egyszer megrendezik ezt a versenyt. Minden második évben Magyarországon, a közbülső években pedig a szomszédos országokban rendezik meg.

A 12. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny helyszíne Eger volt. Az alábbi képen dr. Mátyás Ferenc zsűrielnök megnyitja a versenyt.



Évente 200-300 kárpát-medencei diák és tanár vesz részt ezen a megmérettetésen. A versenyek célja a feladatok megoldásán túl az egységes magyar matematikai nyelv megteremtése, a különböző országok magyarlakta tájainak, kultúrájának, történelmének és szokásainak megismerése.

A 4. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny résztvevői egy alapítvány létrehozását határozták el. Az alapítvány céljai: a Nemzetközi Magyar Matematika Verseny támogatása, a kimagasló eredményt elért diákok esetenkénti jutalmazása és a hosszabb időn át matematikai tehetséggondozással foglalkozó, eredményes és elismert munkát végző tanárok jutalmazása. Alapítók: Teller Ede professzor, Oláh György tanár (Rév-Komárom), Szabó József (Paksi Atomerőmű Rt), Gálos István (Paksi Atomerőmű Rt ESZI).

A versenyen 9-12. évfolyamos középiskolás diákok indulnak, évfolyamonként külön kategóriában. A verseny egyéni, régiók szerinti összehasonlítás nem készül. A versenyen minden versenyzőnek 6 feladatot kell megoldani, ehhez 4 óra áll rendelkezésére. A feladatok egyformán 10-10 pontot érnek. A feladatok megoldását indokolni kell.

A versenyeket több (4-5) napos rendezvénysorozat kíséri, melyben helyet kapnak kulturális programok, kirándulások, sportesemények, illetve diákoknak és tanároknak szóló matematikai előadások is. A huszadik versenyt 2011-ben megrendező bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium a kerek évfordulóra való tekintettel minden résztvevő diákot és tanárát két-két CD-vel ajándékozott meg, amelyeken megtalálható a bonyhádi verseny teljes feladatanyaga és a verseny húsz éves története fényképekkel, visszaemlékezésekkel.

Honlap: berzsényi.tvnet.hu/nemecs/nmmv

E-mail: nemecs@berzsényi.tvnet.hu

2. Matematika Határok Nélkül

A verseny hivatalos neve: Mathematique Sans Frontières. A verseny 1989-ben Franciaországból indult, majd Németország, Olaszország, Svájc után 1993-94-ben már 14 ország 45000 középiskolás diákja között 500 magyar tanuló is részt vett az erőpróban. 1997-98-ban 18 ország 80148 diákja között 6400 magyar tanuló versenyzett. Minek köszönhető ez a határokat nem ismerő siker? Először is a vetélkedőn 14-15 éves diákokból álló osztályok mérik össze erejüket. Ez jó alkalmat biztosít az együttes munka, kollektív erőfeszítés örömeinek megismerésére. A feladatok között van gondolkodtatöbb a matematikából tehetségesebbek számára, de az elsősorban középiskolásokkal rendelkezők is választhatnak megoldásra váró feladatot, hiszen sok gyakorlati jellegű példa is szerepel, sőt van egy, amely több – választható – idegen nyelven kerül megfogalmazásra és a megoldást is ezen a nyelven kell megadni, így a nyelvből tehetségesebbek is találnak maguknak megfelelő munkát. A feladatok érdekesek, színesek, gyakorlati problémákhoz kapcsolódóak. A feladatok szövegezése újszerű, az iskolai megfogalmazástól kissé elütő. Minden évben van néhány tudománytörténeti érdekesség, melyek szövege valamilyen új ismerettel gyarapítja a résztvevők tudását. A versenyt minden évben megelőzi egy úgynevezett próbaforduló, amely az osztályok versenyre való felkészülését szolgálja, ennek még nincs tétje. Ezen próbálhatják ki a tanulók a munka megszervezésének, lebonyolításának nem is olyan könnyű formáját. Feladatanyaga hasonló erősségű, mint a versenyé. A versenyen minden osztályban egy konkurrens osztály tanára felügyel. A vetélkedőt Magyarországon a Matematika Határok Nélkül Alapítvány szervezi. A szervezést, a lebonyolítást, a felügyeletet, a javítást önkéntes alapon tanárok végzik fizetés és tiszteletdíj nélkül a szabadidejük terhére. Az eredményhirdetés országokként illetve megyéenként, tartományokként történik. Nincs összesített eredménylista. A „Matematika Határok Nélkül” célja ugyanis inkább közelebb hozni a diákokat a matematikához, egymáshoz, és nem a versenyjelleg erősíteni.

3. Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny

A versenyt a Kangourou sans Frontieres nemzetközi alapítvány koordinálja. Ezen a versenyen mindenki részt vehet – az is, akinek kettőse van matematikából –, a könnyebb és nehezebb feladatok együtt mindenki számára sikerélményt biztosítanak. A verseny elsődleges célja, hogy népszerűsítsük a matematikát. Mottójuk: „Legyen a verseny időtartama a matematika ünnepe szerte Európában!” A verseny célja:

- a matematika népszerűsítése, a matematika megszerettetése,
- sikerélmény biztosítása
- Magyarország bekapcsolása egy egységes európai versenybe
- nemzetközi hírnevünk javítása
- tehetségek kiválasztása.

Ebben a versenyben Magyarország részvételét 1996 óta a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány biztosítja, amely dr. Pintér Ferenc vezetésével a magyarországi versenyt szervezi és lebonyolítja. A verseny egy forduló, 2-12. évfolyamig minden korosztály részt vehet benne. Két-két évfolyamonként azonos feladatlapot kapnak a tanulók. A 3-4 osztályosoknak 24 feleletválasztós kérdést kell 60 perc alatt megoldaniuk (a 2. osztályosok a 2009-2010 tanévtől kapcsolódhattak be, 45 perc alatt kell 18 kérdésre megtalálniuk a választ). A magasabb évfolyamokon 30 feleletválasztós kérdésre kell 75 perc alatt megtalálni a jó választ. A feladványok első harmada könnyebb, 3 pontos, a második harmada közepes nehézségű, 4 pontos, és az utolsó harmada nehezebb, 5 pontos feladat. Minden kérdésre 5 megadott válaszból (A, B, C, D, E) kell pontosan egy helyeset kiválasztani. A kódlapokat központilag értékeli, számítógépes feldolgozással a résztvevők nagy száma miatt. A verseny nevezési díja 500 Ft/fő. A verseny minden évben március harmadik csütörtökén van, amennyiben valamelyik országnak nincs ezt kizáró indoka, de ezen időpont előtt akkor sem rendezheti senki. A verseny kiemelt célja az Európai Unió központú munkaprogramjával összhangban, a természettudományi pályák iránti érdeklődés fokozása annak érdekében, hogy minél több jó képességű fiatal kerüljön a pályára. A versenyképességet megalapozó technológiai tudás nagyon nagy részben matematikai ismeretekre épül. Cél a logikus gondolkodás, az absztraháló képesség, a jó megfigyelőképesség, a kombinatív képesség, a jó térszemlélet, az igényes és pontos szövegértés fejlesztése, a kíváncsiság és a tudásvágy felkeltése. A verseny további célja a résztvevő 46, zömében európai ország diákjainak együttgondolkodása, a matematika népszerűsítése. Azt szeretnék elérni szerte Európában, hogy ez a 75 perc legyen a matematika ünnepe, amikor több millió kis és nagy diák ugyanazon feladatok megoldásával foglalkozik. 2009-ben ezen a világversenyen összesen 5.571.560 diák vett részt. Magyarországon 2009-ben 37.490, 2010-ben 36.046 diák indult. Az évenkénti feladat-összeállító európai konferencián ezért lényegében csak olyan feladatok kerülnek kitűzésre, amelyek érdekesek, logikus gondolkodást és a tanultak gyakorlati alkalmazását igénylik. Nem annyira ragaszkodnak az adott évfolyamok konkrét tantervi anyagához, de azt nem lépik túl. Ezért ezen a versenyen mindenki részt vehet – az is, akinek valamilyen ok miatt a konkrét tananyagban lemaradása, hiányossága van -, mert a könnyebb és nehezebb feladatok együtt biztosítják, hogy minden résztvevő diák sikerélményhez jut, ami motiválja a további ismeretszerzésre. A verseny másik célja a tehetségek kiválasztása. Azáltal, hogy minden résztvevő a saját iskolájában írja meg a versenydolgozatot, esélyegyenlőséget biztosít a legkisebb településen élő diákok számára is tehetségük megmutatására. A legjobbaknak lehetőségük nyílik olyan közösségbe kerülni (tréningek, nemzetközi cseretáborok), ahol tudásukat még jobban elmélyíthetik. Az országos helyezettek nemzetközi cseretáborokban is részt vehetnek lengyel, finn és német diákokkal. Az említett országok mindegyike, így mi is rendezünk ilyen 9 napos összejövetelt. A versenyen a kitűzött feladatokon keresztül a matematikatanároknak lehetősége nyílik bepillantani az európai matematikaoktatás követelményeibe, fejlődési irányába. A kitűzésre kerülő feladatok konszenzussal kerülnek elfogadásra, ezért úgy tekinthetők, mint a résztvevő országok tantervi anyagának közös része. A nemzetközi feladatbankba, amelyből a feladatok kitűzésre kerülnek évente, az alapítvány, mint Magyarország képviselője 60 feladattal járul hozzá. Feladatokat bárki eljuttathat az alapítványhoz, erre felhívást tesznek közzé. Honlapjukon – <http://www.zalamat.hu> – különböző statisztikákat tesznek közzé a versennyel kapcsolatban (létszámok kategóriák szerint, eredményességi táblázatok feladatonként, stb.) Az alapítvány hat éve minden évben könyvet ad ki a versenyről, így bárki hozzájuthat a feladatokhoz és a megoldásokhoz, megismerheti a legjobb versenyzők eredményeit.

4. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (angolul International Mathematical Olympiad, IMO) egy 1959 óta évente megrendezett diákerseny, a nemzetközi tudományos diákolimpiák legrégebbike. A hetvenes évekig a szocialista országok versenye volt, ma az egész világra kiterjed, kb. 80 állam vesz rendszeresen részt. Minden résztvevő ország régebben nyolc, ma hat versenyzőt küldhet. A versenyzők életkora nem érheti el a 20 évet, és nem vehetnek részt középfokúnál magasabb iskolai képzésben.

Magyarország eddig három alkalommal adott otthont Nemzetközi Matematikai Diákolimpiának: a rangos verseny 1961-ben Veszprémben, 1970-ben Keszthelyen, 1982-ben pedig Budapesten került megrendezésre.

Az 50. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát (IMO 2009) Németországban, Brémában rendezték 2009. július 10-től 22-ig. Száznégy ország ötszázhatvanöt versenyzője vett részt. A magyar csapat egy arany, két ezüst és három bronzéremmel harmas holtversenyben 19. lett az országok közötti pontversenyben.

A harmadik olimpia Veszprémben került megrendezésre, igen jó hangulatú és színvonalú verseny volt. Itt kezdtek körvonalazódni azok a szervezeti intézkedések, amelyek az olimpiák jövőjét több évre biztosították. A kezdeti évek versenyei, hat-nyolc ország részvételével inkább tűntek szűk körű baráti összejöveteleknek, mint hivatalos nemzetközi rendezvényeknek; sok esetben a programok is csak helyben alakultak ki. A negyedik olimpiát Csehszlovákia, az ötödiket Lengyelország rendezte; itt két olyan előrelépés is történt, amely

nagymértékben befolyásolta az olimpiák jövőjét. Az első a szervezés területén történt. A megírt dolgozatokat egészen odáig ugyanis csak a saját csapat vezetője ellenőrizte, ettől kezdve azonban az értékelés egyöntetűsége céljából ún. koordinációs testület is átnézte azokat. A bizottság ekkor még a csapatok vezetőiből állt, a következő olimpiától kezdve viszont már a rendező ország matematikusaiból, ill. esetenként a rendező ország által felkért más matematikusokból is. A második előrelépés az volt, hogy a lengyelek meghívták az akkoriban – környékünkön – még meglehetősen bizonytalan politikai megítélésű Jugoszlávia csapatát is. Ez azért volt jelentős, mert így Jugoszlávia is módot kapott a rendezésre 1967-ben, s mivel Jugoszlávia megtehetette azt, amire a többi résztvevőnek nem volt módja: nyugati országokat is meghívhatott, az olimpia kapui kinyíltak. Fokozatosan bekapcsolódtak az európai országok, majd az észak-amerikai, azután az ázsiai, ausztráliai államok is, ma már 70-80 körül állandósult a részt vevő országok száma. Manapság valamennyi olyan ország elküldi diákolimpikonjait, amelyben számottevő matematikai élet van. Minden európai (Albánia időnként hiányzik) és csaknem valamennyi ázsiai ország képviselteti magát (Hongkong megtartotta önálló csapatát), viszont Közép- és Dél-Amerikából csak Argentína, Brazília és Kolumbia tartozik az állandó vendégek közé, a többiek időnként jelennek csak meg. Meglehetősen gyér a háborúktól szabadt Afrika képviselője: Dél-Afrika és Marokkó állandó résztvevő, időnként Algéria és Tunézia is megjelenik. A létszámot mintegy 15-tel növelte a Szovjetunió, Jugoszlávia és Csehszlovákia osztódása is.

A részt vevő országokról szólva el kell mondanunk azt a sajátos helyzetet, amely az olimpiák szervezését és működését jellemzi. Ezeknek a versenyeknek nincs olyan nemzetközi hivatalos szervezete, mint amilyen pl. a sakk vagy labdarúgó versenyeknek van. Eredetileg – az akkori szokásoknak megfelelően – a rendező ország iskolákkal foglalkozó minisztere a meghívandó ország megfelelő miniszteréhez írt levelében kérte fel a csapatokat a versenyen való részvételre; ahol ilyen minisztérium nem volt, ott a legfőbb rendező szervek leveleztek egymással. Elvben minden ország az előzőtől függetlenül a saját szabályai szerint rendezte meg a versenyt, ez a szabályzat azonban lényeges pontokban sohasem tért el a kialakult szokásoktól, és ez a rend mindmáig megmaradt. Általában az volt a gyakorlat, hogy az előző olimpián részt vevő országokat mind meghívták és esetleg olyanokat is, amelyek addig még nem vettek részt rajta.

A lebonyolítással kapcsolatos matematikai kérdésekben mindig a csapatok vezetőiből álló zsűri dönt. A nyolcvanas évektől kezdve ezen belül Site Committee, majd Advisory Board néven működő szűkebb bizottságot hoztak létre, amely elsősorban elvi és szervezési kérdésekkel foglalkozik.

A matematikai olimpia – a már kialakult szokások szerint – így zajlik le: a verseny előtt néhány hónappal a bejelentkezett országoktól feladatjavaslatokat kérnek, s ezekből a rendezők mintegy 20-25-öt megvitatásra készítenek elő a zsűri számára. A zsűri a csapatok megérkezése előtt ül össze és választja ki a két versenynap 3-3 feladatát; amelyeket aztán a vezetők a nemzeti nyelvekre fordítanak le. A legfeljebb hattagú csapat a vezető helyettesével érkezik az olimpia színhelyére és egy-két nap áll rendelkezésükre az „akklimatizálódásra”. Erre rendszerint szükség is van, mert sok csapat más évszaktól és gyakran 6-8 órás időkülönbséget jelentő zónából érkezik. A feladatok megoldására a versenyzőknek naponta 4 és fél óra áll a rendelkezésükre. A problémák a matematika különböző területeiről valók, megoldásuk nem igényel középiskolainál magasabb szintű szaktudást. Mindenki a saját nyelvén írja le a megoldásokat; ezeket a csapat vezetői átnézik, majd a koordinációs bizottság előtt valamelyik hivatalos nyelvre (ma gyakorlatilag angolra) szóban lefordítják. A koordinátorok ennek alapján a feladatokra bizonyos pontszámokat (egy feladatra maximálisan 7-et) javasolnak. Az esetek többségében – némi vita után – a feladat értékelésében megegyezés születik, a függőben maradt kérdésekben a zsűri szavazással dönt. Így minden versenyző munkájának az eredményét 0-tól 42-ig terjedő pontszámmal értékelik; a versenyzőket pontszámuk szerint rangsorolják és ennek alapján döntenek a díjakról. Ezt korábban hosszú viták előzték meg. Ennek kiküszöbölésére született meg az a javaslat, hogy a versenyzők felét díjazzák, az arany, ezüst és bronzérmek aránya 1:2:3 (egyenlő pontszámok esetén ez kismértékben módosulhat). Ezenkívül olykor még különdíjat vagy okleveleket is kiadnak, pl. azoknak, akiknek van teljes megoldott feladatuk, de nem kaptak díjat. A verseny hivatalosan egyéni, tehát nincs nemzetek közötti verseny; de ahogyan a sportolimpián is, mindenki összeadja az egyes csapatok pontszámát és ebből alakul ki a nem hivatalos sorrend, amit lényegében mindenki az eredményesség fokmérőjének tart. A versenyek végeztével a diákok számára rendszerint kirándulásokat szerveznek, igyekeznek megmutatni az országból néhány érdekes és látványos dolgot. Ezek a közös kirándulások sok lehetőséget nyújtanak a résztvevők közötti kapcsolatok kialakítására is. Az olimpia záróünnepséggel végződik, ezeken osztják ki a díjakat; néha – megfelelő szponzorok esetén – emlékként jutalmakat is kaphatnak a versenyzők.

Az olimpiák tehát hallgatólagosan elfogadott és tiszteletben tartott szabályok szerint folynak, rendszerint hagyományosan barátságos légkörben. Egyetlen kényes pontja van az olimpiai mozgalomnak: a meghívottak körének a megállapítása; ez az a pont, amelyben a napi politika néha – de mindig kellemetlen – szerephez jut. Szerencsére ez elég ritkán fordul elő; ilyen volt például az, amikor Kuba nem hívta meg Izraelt; vagy amikor egy máig sem pontosan tisztázott ok miatt a magyar csapat nem vehetett részt az 1978-as romániai versenyen

(ennek háttérében nagy valószínűség szerint egy szovjet-román nézeteltérés volt). Sajnos, még a legutóbbi, Tajvanon rendezett olimpiára is árnyékot vetett Kína távolmaradása. Ennek oka a csapatelnevezési vita volt (nézetem szerint a rendezők ebben túl merev álláspontot foglaltak el). Érdekes áttekintünk, milyen változásokat idézett elő az olimpiák létezése szerte a világon a matematikai nevelés terén. Az induló országokban (az NDK kivételével) nem voltak ismeretlenek a matematikai versenyek, közülük Magyarország rendelkezett a leghosszabb folyamatos versenyműlttal (Eötvös-, majd Kürschák-verseny), de Romániában is már mintegy fél évszázada létezett matematikaverseny. Az újonnan bekapcsolódott országok gyorsan rájöttek, hogy az olimpiára való felkészüléshez hozzátartoznak a honi versenyek is és egymás után kezdték szervezni a nemzeti versenyeket, pl. Németországban, a Szovjetunióban (addig csak köztársaságonként voltak versenyek), az Egyesült Államokban, de folytathatnánk a világ számos országával. A versenyekre való felkészüléshez természetesen hozzátartozik a megfelelő irodalmi háttér is. A '70-es, '80-as évektől kezdve az elemi matematikai irodalomban soha nem látott fellendülést tapasztalhatunk (a munkába számos nagy hírű matematikus is bekapcsolódott): értékes könyvsorozatok jelentek meg, a diákok számára kiadott folyóiratok megsokszorozódtak. A versenyek száma szaporodik, hiszen több országcsoporthoz regionális versenyeket is tart. Megjelentek természetesen az üzleti vállalkozásban szervezett versenyek is. Mindehhez hozzájárult az a tény is, hogy az olimpia kibontakozásának az időszaka egybeesett azzal – a főként a '60-as évekre tehető – időszakokkal, amelyben a matematika állami támogatása a világ számos országában (mindenekelőtt a Szovjetunióban és az Egyesült Államokban) hathatósan megnövekedett és – több tényező hatására – a matematika szerepének a társadalmon belüli megítélése is kedvezőbbre fordult.

A versenyek szervezésének pedagógiai indoklásában mindenkor az érdeklődés felkeltése, a tehetségek kiválasztásának és felkarolásának az elősegítése volt a leghathatósabb szempont, s úgy tűnik, hogy a versenyek ezt a feladatot részben teljesíteni is tudják. A fiatalok általában szeretnek az élet minden területén versenyezni és ehhez a felkészülés szükségessége számukra is nyilvánvaló és elfogadott. A felkészülés kapcsán a diákok olyan ismereteket szerezhetnek és olyan készségekre tehetnek szert, amelyeket későbbi pályájuk során gyümölcsözően alkalmazhatnak. Nem elhanyagolható az a tény sem, hogy a közös felkészülés folyamán nemcsak a tanároktól, hanem egymástól is számos eredeti, szellemes feladatmegoldási ötletet, gondolatot tanulhatnak meg; egy-egy együttesen megalkotott megoldás a további foglalkozásokra is gyümölcsözően hat. Mindezzel szemben áll az az ellenvetés, hogy a versenybeli kudarc vissza is vethet egy-egy diákot a fejlődésben, elkeseredést válthat ki. Ez igaz lehet, de hatása megfelelő pedagógiai előkészítéssel minimálisra csökkenthető: a felkészülést irányítóknak a versenyt nem célként, hanem eszközként kell kezelniük, játéknak, amelyet komolyan veszünk, de sohasem tragikusan. Vannak, akik szerint a nemzetközi versenyekre való felkészülési időt a tanuló jövője érdekében gazdaságosabban is lehetne felhasználni, például úgy, hogy a diák csupán a matematika egy témakörébe ásná be magát, hiszen a nemzetközi versenyek témaköre rendkívül széles, az elemi matematika ma ismert témaköreinek nagy részére kiterjed. A leendő matematikus viszont akkor ér el gyors sikert a pályáján, ha egyetlen témakörben szerez mély ismereteket. A tudományos minősítések is világosra látták az ilyen tevékenységet értékelik elsősorban. Ennek az állításnak a gyakorlati igazsága nem vitatható. Ezzel viszont azt az érvet lehet szembeállítani, hogy az igazán nagy matematikusok mindig széles körű ismeretekkel rendelkeztek; a matematika egy-egy területén megismert módszer, ötlet a távolabb eső területeken is alkalmazható és a versenyekre való felkészülés mindenekelőtt módszerek, gondolkodási módok megismeréséből áll. Továbbá: a versenyeken részt vevők nem mindegyike készül matematikusi pályára; s ma világsszerűen elfogadott, hogy a matematikától viszonylag távol álló tanulmányokat folytatóknak is kiegészítő tanulmányokként matematikát ajánlanak, éppen a matematikai gondolkodásmód elsajátítására. Többször elhangzik az a rosszalló vélemény is, mely szerint az olimpia néhány ország számára eredeti szerepét elvesztve eszökből célá lett; az olimpiára készölöket kiemelik az iskolai keretből és közel egy tanéven keresztül túlnyomórészt csak az olimpiai felkészüléssel foglalkoznak, vagyis azt csinálják, amit a sportolók egy világversenyre készölve. Pedagógiai szempontból ezt nem tartjuk szerencsésnek, és nem is öhajtjuk követni; meg kell azonban jegyeznünk, hogy eközben olyan felkészítést kaphatnak, amit esetleg életük végéig tudnak használni, ellentétben a legtöbb sportbeli „tréninggel”, az összevetés tehát némileg sántít.

Magyarország kezdettől fogva részt vesz az olimpiákon (az említett 1978-as bukaresti versenyen kívül) és mindenkor az élmezőnyben végzett: a 39 olimpiából 22 esetben az első három hely valamelyikén; az összesítésben a magyarok kapták eddig a legtöbb pontot és a legtöbb díjat; ebben természetesen az is benne van, hogy Magyarország az egyik legrégebbi résztvevő. Ezekből az eredményekből tárgyilagosan egy dolog kétségtelenül kiolvasható: a magyar diákok a többi nemzet csapataihoz viszonyítva mindenkor kiemelkedően szerepeltek. A volt olimpiaiások – az eddigi tapasztalatok szerint – életpályájuk során is kitűnően megállták a helyüket, közülük több akadémikus került ki, ott vannak számos hazai és külföldi egyetem neves tanárai és kutatói között, a nem közvetlen matematikai pályákon is sikeresen boldogulnak.

Gyakran felteszik azt a kérdést – főleg külföldiek -, hogy mivel magyarázható a sikeres szereplés, főként annak a figyelembevételével, hogy a nálunk szerencsésebb helyzetben lévő országokat „lekörözzük” ezen a téren

(kuriózumként említjük meg, hogy a közelmúltban egy japán hírügynökséget bíztak meg ennek a „titoknak” a felderítésével, beleértve a magyar matematikusok sikereit is). A kérdésre adandó válasz meglehetősen összetett. Ha az összetevőket akarjuk felderíteni, feltétlenül meg kell említenünk a hagyomány ösztönző szerepét, hiszen a mi versenyünk rendelkeznek a leghosszabb folyamatos múlttal, továbbá: versenyünkkel csaknem egyidős a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, amely a matematika iránti érdeklődés felkeltésében, az írásbeli közlési készség fejlesztésében fontos szerepet játszik és bevezet az „iskolán túli” matematika egy-egy szép fejezetébe. Bár egy ország matematikaoktatásának általános színvonala és az ország kiemelkedő matematikusainak a száma között aligha lehet megbízható kapcsolatot kimutatni, mint adottságot feltétlenül figyelembe kell vennünk, hogy az utóbbi fél évszázadban nyomon követhető az a törekvés, hogy a matematikaoktatás középpontjában a gondolkodásmód fejlesztése álljon. A siker legfőbb tényezője azonban – véleményem szerint – az a tény, hogy az utóbbi évszázadban mindig akadt néhány olyan hozzáértő pedagógus, akik önzetlenül akartak és főként: tudtak a cél érdekében dolgozni. A magyar pedagógiai közvélemény a versenyeket általában a tehetséggondozás, a tehetségesekkel való foglalkozás címszavai alá sorolja; ez nyilván helytálló megállapítás, ebből baj csak akkor származik, ha azonosítják a tehetséggondozást a versenyzéssel. A verseny ugyanis csak része a tehetséggondozásnak, amelyeknek nem a versenyeztetés az igazi formája; a tehetségek kiművelése nem nélkülözheti az egyéni vagy csaknem egyéni foglalkoztatást. A versenyek különben sem „hoznak minden tehetséget a felszínre”, hiszen a matematikai tehetséggel rendelkezők tekintélyes része rossz versenyző. A versenyek = tehetséggondozás formula alkalmazása nyilván kényelmes megoldás: a versenyek a legjobban adminisztrálható pedagógiai tevékenységek közé tartoznak. A hathatós, széles körű matematikai tehetséggondozásnak nálunk – sajnos – hiányoznak a személyi és tárgyi feltételei. Pedagógusképzésünk nem készít fel kellően a tehetségesekkel való foglalkozásra; s az ehhez szükséges ismeretekkel és készségekkel csak az rendelkezik, aki ezek megszerzésére öntevékenyen és önzetlenül vállalkozik. Ma már elképzelhetetlen az ilyen munka megfelelő irodalmi anyag nélkül. A nemzetközi versenyekre való felkészülést olyan friss anyag szolgálná a legjobban, amely a ma „divatos” témák feladatanyagát gyűjtené össze. Ilyen művek kiadása természetesen anyagi támogatás nélkül elképzelhetetlen. A korábban széles körben (bár nem mindig a cél érdekében) működő matematikai szakkörök közül anyagi okokból ma már csak kevés létezik, bár bebizonyosodott, hogy ezek lehetnek a tehetséggondozás műhelyei. Bizonyos, hogy a jó olimpiai szereplés fontos tényezője a versenyzők kiválasztása. Az országok többségében ez formális: a nemzeti versenyek felépítése olyan, hogy az élen végzett hat versenyző lesz tagja az olimpiai csapatnak. Nálunk ez a gyakorlat már azért sem követhető, mert hivatalos országos versenyünk nem egységesek; továbbá, hogy a versenyzés típusa is különbözik az olimpiai versenyekétől, nálunk ugyanis egyedülállóan még azt az elavultnak tűnő hagyományt követik, hogy a versenyeken mindenféle segédeszköz használható, ami az olimpián tiltott. Mi ezért többször tartunk válogató jellegű versenyeket az olimpiai szabályok szerint, de a csapat-összeállításnál nem a pillanatnyilag elért eredményt vesszük figyelembe, hanem a hosszabb időn keresztül mutatott teljesítményt. A válogatásban az olimpiai szakkörök tagjai vesznek részt; ezekben általában kéthetenként tartanak foglalkozásokat az egész tanév folyamán; résztvevői többnyire az előző évek legeredményesebb versenyzőiből állanak, gyakorlatilag azonban teljesen nyitottak, bárki részt vehet rajtuk. A csapat kiválasztásához figyelembe veszik a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, az OKTV, a KöMal pontversenye és a két olimpiai válogatóverseny eredményét is. A csapatok összeállításának állandó pedagógiai problémája, hogy a legjobb versenyzőknek nem mindig a legtehetségesebb, legígéretesebb matematikus diákok bizonyulnak; a verseny azonban nemcsak a matematikai tudást, hanem a versenyezni tudást is méri, ezért a kiválasztásnak ez is szempontja. A csapatok eddigi sikeres szerepléséhez vezetőik is hozzájárultak, hiszen a dolgozatok elemzése, a versenyzők gondolatmenetének a felderítése (nemegyszer írásuk kibetűzése) és szövegük lefordítása az ő feladatuk. A magyar delegáció vezetője hosszabb időn át Hódi Endre (Országos Pedagógiai Intézet) volt, majd egy évben Pataki János (Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium); az utóbbi tíz évben pedig Pelikán József (ELTE Algebra és Számelméleti Tanszék), aki széles körű tájékozottságával, nagy nyelvismeretével és diplomáciai érzékével lényeges szerepet játszik az olimpiákat irányító Advisory Board-ban is.

Az utóbbi években az olimpiák élmezőnyében a verseny – jó értelemben véve – kiéleződött; egyre többen és ígéretesebben törnek az élre, ez különösen a feltörekvő ázsiai országokra jellemző. Ebben az évben Irán szerezte meg a legtöbb pontot, megelőzve Bulgáriát és az azonos pontszámú Magyarországot, ill. az Egyesült Államokat, de közvetlenül utánuk Tajvan következett. Már az élmezőnyben van Vietnam, Dél-Korea, India és Japán is; természetesen az élre pályáznak az olimpia hagyományos helyezettjei: Kína, Oroszország, Románia, Németország is. Nekünk közöttük kell helytállnunk, és ha meg akarjuk tartani élmezőnybeli helyünket, meg kell kísérelnünk felkészülésünket alaposabbá és főként szélesebb körűvé tenni. A magyar diákoknak csak meglehetősen szűk köre jut el odáig, hogy az olimpiai felkészülésbe bekapcsolódhassék, pl. az utóbbi húsz év versenyzői kilenc város tizenhat középiskolájából kerültek ki és ez a kör egyre szűkülő tendenciát mutat (ebben az időszakban Magyarországon mintegy félezer középiskola volt). Kétségtelen, hogy a speciális matematika tagozatos, ill. kiemelt matematika képzést nyújtó iskolák ebből a szempontból előnyben vannak, hiszen a

legjobbak egy része már eleve itt kezdi meg tanulmányait, de éppen az előbbi tények mutatják, hogy biztosan nagyszámú matematikai tehetség marad még a versenyek szempontjából is felderítetlenül. A jövőre nézve biztató, hogy az állami szervek előtt is egyre nő a diákok nemzetközi versenyeken elért eredményeinek az elismertsége; az utóbbi években a legfelsőbb állami vezetők is többször fogadták és megjutalmazták az olimpiák nyerteseit és felkészítőiket. Ahhoz azonban, hogy megtarthassuk eddig kivívott, de erősen ostromolt állásainkat, meg kell találnunk az ehhez szükséges, fentebb vázolt lépések megtételének a módját.

Érdekességek:

- Magyarországon legtöbbször a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumból jutottak ki az olimpiára. 1962 óta nem volt olyan év, hogy fazekasos diák ne lett volna a csapat tagja, sőt az is előfordult, hogy az összes magyar versenyző ebből az iskolából került ki.
- A román Ciprian Manolescu háromszor is maximális pontszámot ért el, vagyis 42-ből 42-t, ebből egy alkalommal ráadásul egyedül neki sikerült teljes pontszámot elérnie.
- A legsikeresebb női versenyző Eugenia Malinnikova volt, aki kétszer 42, egyszer 41 ponttal nyert aranyérmet a Szovjetunió csapatában, így egyetlen ponttal marad el Manolescu teljesítményétől.
- Az amerikai Reid Barton volt az első, akinek sikerült 4 aranyérmet szereznie (1998-2001). Rajta kívül ez eddig csak a német Christian Reihernek sikerült (2000-2003), aki 1999-ből már egy bronzéremmel is büszkélkedhetett.
- 1994-ben az Egyesült Államok csapatának mind a 6 tagja 42 pontos eredményt ért el. Erről a Time magazin is megemlékezett.
- Az ausztrál Terence Tao a legfiatalabb aranyérmes, 1988-ban 13 évesen érte el ezt az eredményt. Tao a megelőző két évben már nyert egy ezüst- és egy bronzérmet, ám ezt követően, egyetemi tanulmányainak megkezdése miatt, nem indult.
- A legtöbb részvétellel Kunszenti-Kovács Dávid büszkélkedhet, aki 7 alkalommal szerepelt Norvégia csapatában, többek közt megszerezve az ország első aranyérmét. Dávid első olimpiai szereplésekor csak 11 éves volt.
- Legeredményesebb magyar versenyzők: Lovász László és Pelikán József négy éven át (1963-1966) vettek részt a versenyen; 3-3 arany-, és 1-1 ezüstérmet szereztek. (Mellesleg osztálytársak voltak.) Szintén három aranyérmet szerzett Terpai Tamás (1997-1999) és Rác Béla András (2002-2004).
- A magyar csapat vezetője 28 éven át Hódi Endre volt. (Vezető és zsűritag: az 1-28. olimpiákon, kivéve a 20-akat, amelyen nem indult Magyarország.) Az olimpiai csapat felkészítő szakkörének vezetője ma Dobos Sándor, a budapesti Fazekas Gimnázium tanára, aki egyben a csapat kísérője is.
- Az olimpia szervezését irányító nemzetközi testület, az Advisory Board jelenlegi elnöke (2002 óta) Pelikán József, aki egyben a magyar csapat vezetője.
- A magyar csapat 2008-ig 48 olimpián vett részt, ahol összesen: 74 arany, 138 ezüst, 77 bronzérmet és 4 dicséretet szerzett a 324 versenyző. Ezzel a teljesítménnyel Magyarország a 4. helyen áll a nemzetek összesített rangsorában.

5. Feladatok a nemzetközi matematikaversenyekről

1.

Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ természetes szám, akkor $n^8 + n^4 + 1$ összetett szám!

2.

Mely p pozitív prímszámokra lesz $2p + 1$, $3p + 2$, $4p + 3$, $6p + 1$ mindegyike prímszám?

3.

Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (A feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem).

4.

Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2011 és az oldalak mérőszáma egész szám?

5.

Létezik-e olyan négyzetszám, amelynek a számjegyeinek összege 2011^{2010} ?

6.

Határozzuk meg az összes olyan (m, n) párt, ahol m, n egész számok, amelyekre $m, n \geq 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész szám, amire

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

egész szám.

7.

Egy P konvex sokszög mindegyik b oldalához hozzárendeljük a legnagyobb területű olyan háromszög területét, aminek egyik oldala b és ami benne van P -ben. Bizonyítsuk be, hogy a P oldalaihoz rendelt területek összege legfeljebb a háromszoros P területének.

8.

Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát önmagába képezi és amelyre

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

teljesül minden $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ esetén.

9.

Egy pozitív egész számot alternálónak nevezünk, ha a tízes számrendszerbeli felírásában a szomszédos számjegyek mindig különböző paritásúak.

Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amire igaz az, hogy n -nek van olyan többszöröse, ami alternáló szám.

10.

Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely kielégíti a

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

egyenlőséget, valahányszor a, b, c olyan valós számok, amelyekre teljesül

$$ab + bc + ca = 0.$$

12. fejezet - Tehetséggondozás és versenyfelkészítés

1. A tehetség összetevői és felismerése

A tehetség fogalmát sokan sokféleképpen fogalmazták meg, általánosságban el lehet mondani, hogy mindenki tehetséges valamiben, csak meg kell találni, hogy miben. Most egy a matematika tanulásának szempontjából releváns felosztását nézzük a tehetség összetevőinek:

- átlag feletti általános képességek: absztrakció, memória, kommunikáció, információ feldolgozás, intelligencia (bal agyfélteke fejlettsége);
- átlag feletti kreativitás (jobb agyfélteke fejlettsége);
- átlag feletti motiváció: érdeklődés, kitartás, érzelmi stabilitás, hálózatépítés;
- átlag feletti speciális képességek, originalitás egy vagy több adott területen.

Ezen négy elem közül a tehetséges gyermek több összetevővel rendelkezik, de esetleg valamelyikben kevésbé jó. A tanár feladata lényegében az, hogy felismerje e képességeket, és amiben gyengébb, azt erősítse. A tehetséggondozás nem könnyű feladat, mert sokszor a tehetség bizonyos olyan tulajdonságokkal is jár, amelyek az iskolai életben „hátrányosnak” számítanak (magatartási problémák, túlzott aktivitás vagy túlságosan visszahúzódnó természet, antiszociális megnyilvánulások, stb.). A tehetség kibontakoztatásában nagyon fontos a pozitív, támogató háttér, amely kudarcpálya helyett sikerpályát épít fel. Mivel a tehetség összetevőit nagyon nehéz „mérni”, a felismeréséhez jó pedagógiai és pszichológiai képességekkel kell rendelkeznie a tanárnak is. Fontos a bizalom tanár és tanítvány között, de fontos a szülőket is bevonni a folyamatba. Sok szülőben él egyfajta félelem a tehetségtől, amelynek gyökerei abban rejlenek, hogy a tehetséges gyermek gyakran érzi magát kirekesztettnek. Ezért a környezet nevelése éppen olyan lényeges eleme a tehetséggondozásnak, mint magával a tehetséges gyermekkel való foglalkozás. A művészvilágban gyakran tapasztalható „kiégés” jelenségének elkerülése végett is figyelmet kell fordítani erre az aspektusra.

2. Kreatív személyiségtulajdonságok és fejlesztésük

A kreativitás, azaz a teremtő-, alkotóképesség olyan folyamat, amely saját magát fejleszti és bontakoztatja ki. A kreativitás fogalma már az ókorban is megjelent, a görögök is próbálták ezt a képességet leírni, megfejtetni. Az alkotó gondolkodásnak óriási szerepe van a tudomány és a társadalom fejlődésének szempontjából. Persze, nem mindenkiől lehet tudóst, feltalálót nevelni. Nem is ez a célunk: sokkal inkább az, hogy minden tanulóból kihozzuk személyisége széles körű fejlesztésével azt a maximumot, amellyel képessé lesz alkotó tevékenységre (még ha az alkotása csak saját életében számít is újnak).

A kreatív személyiségtulajdonságok kialakulásának feltételei között társadalmi, személyiségbeli, nevelési-oktatási feltételek is szerepelnek. A társadalom részéről olyan perspektívák, célok megfogalmazása és támogatása, amelyek elősegítik és méltányolják a kreatív teljesítményt, és ezáltal ösztönöznék ilyen tevékenységre. A gyermek személyiségében ki kell alakulnia azoknak a képességeknek, amelyek az alkotást lehetővé teszik, de motiváció nélkül a legjobb képességek is elvesznek. Az oktatásnak meg kell teremtenie a kreatív személyiség kialakulásához vezető körülményeket, mintát kell adnia, értéket kell közvetítenie és támogató környezetet kell biztosítani.

A kreativitás fogalma nagyon összetett, ezt az alábbi két idézettel érzékeltetni tudjuk: „Az emberi képességek hierarchiájában a kreativitás az intelligencia legmagasabb foka. Az intelligencia általában konvergens gondolkodást jelent, amely a helyes válaszhoz vezet. A kreativitás divergens gondolkodás, amely többféle válaszra törekszik.” (Erika Landau)

„Ha az egyén olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amelyek segítségével képes tevékenysége tárgyai között olyan kapcsolatokat teremteni, amelyek túlmutatnak korábbi ismeretein, tapasztalatain, amelyek lényegesen megváltoztatják ezekről a tárgyakkal alkotott ismeretrendszerét, a tárgyakkal kapcsolatos tevékenységét, s amelyek lehetővé teszik új produktumok létrehozását. Az ilyen pszichés tulajdonságok összességét kreatív

személyiségtulajdonságoknak nevezzük, s magát a tevékenységet kreativitásnak.” (Pólya György) A kreatív személyiség tulajdonságok közé tartozik többek között:

- a problémaérzékenység,
- az ötletgazdagság,
- a hajlékonyság,
- a rugalmasság,
- a könnyedség,
- az eredetiség,
- a kidolgozottság,
- az újraformálás,
- a kiterjesztés,
- a transzferálás.

Vizsgáljuk meg, hogy ezen tulajdonságok közül matematika órán melyik hogyan mérhető és fejleszthető!

3. A problémaérzékenység

A probléma: világosan megfogalmazott, de jelenlegi tudásunk szokásos alkalmazásával közvetlenül el nem érhető cél, amelyet szándékunkban áll elérni. A probléma nem azonos az ismeretlennel való találkozással, az is szükséges, hogy ez kívátsa érdeklődésünket. A matematika feladatokra különösen áll ez a kitétel. A problémát el kell különíteni a rutinfeladattól: a rutinfeladat az ismeretek szokásos alkalmazását igényli, a probléma az ismeretek alkotó, újszerű módon való alkalmazását jelenti. Ezért a probléma fogalma viszonylagos: ami az egyik tanuló számára probléma, a másik számára lehet rutinfeladat. Mikor nem készíti az ismeretlen gondolkodásra a tanulót? Ennek több oka is lehet:

- nincs meg a szükséges motiváció, a tanuló nem akarja megoldani a kitűzött feladatot;
- a tanuló ismeretei lényegesen magasabb szintűek, mint amit az adott feladat megkíván, ezért unalmas számára a feladat;
- a megoldáshoz a tanuló ismereteinél lényegesen magasabb szintű ismeretek szükségesek, ekkor nem érti a kérdést, a feladat elveszti probléma jellegét, kikerül az érdeklődési köréből.

A problémák tehát nem korhoz és tudásszinthez kötöttek, életünk során folyamatosan szembe találkoznak újabb és újabb problémákkal. Ezek akkor merülnek fel, ha olyan tényekkel kerülünk szembe, amelyeket még nem osztályoztunk, rendszerezünk. A problémát akkor tekintjük megoldottnak, ha rábukkanunk arra a tevékenység formára, amellyel célunk elérhető.

Egy feladat megoldása során sokszor legnagyobb gondot a probléma azonosítása jelenti. Ha képes a tanuló egy feladatban az adatokat, az adott összefüggéseket úgy boncolgatni, csoportosítani, tudását úgy mozgósítani, hogy a probléma előbukkanjon, akkor már „félúton” van a megoldás felé, mert hajlandóságot érez arra, hogy megválaszolja a feltett kérdést. Hogyan lehet mérni a tanulók problémaérzékenységét? A tanulók munkájában (írásbeli és szóbeli) eredménytől függetlenül vizsgálhatjuk, hogy

- van-e értékelhető momentum;
- megfogta-e a kérdés lényegét, részeredményei a megoldás irányába mutatnak-e;
- gondolkodás útján kapott eredmény van csak „látszatomunka” olvasható ki belőle;
- milyen kérdéseket tesz fel (saját magának) a feladat megoldása során;

- mikor veszi észre, hogy egy út zsákutca;
- többféle lehetőséget számba vesz-e a megoldás során, észreveszi-e a jó irányt;
- ki tudja-e szűrni a lényeges adatokat a feleslegesek közül;
- mennyire tudja lekötni a feladat, mutat-e érdeklődést?

A problémaérzékenység fejlesztése közben ezekre a kérdésekre kell figyelniük, és ha pozitívan tudunk válaszolni rájuk, akkor mondhatjuk, hogy fejlődött a tanuló ezen képessége. Magától a problémaérzékenység nem alakul ki, ha nem irányítjuk tevékenységét, akkor munkája e téren felszínes lesz, nem fogja a lényegi összefüggéseket rendszerben látni, és idővel érdeklődése unalomba fullad. Pólya György „A problémamegoldás iskolája” című könyvében konkrét iránymutató kérdéseket is találunk a gondolkodás fejlesztéséhez.

4. Ötletgazdagság

A kreatív személyiségvonások egyike az ötletgazdagság. Az ötlet olyan eljárást, tevékenységet jelent, amely esetleg közelebb vihet a probléma megoldásához, de nem biztos. Ha a tanuló nem rendelkezik a szükséges ismeretek összességével, rendszerével, akkor nem tud ötleteket felsorakoztatni, tehát az ötletgazdagság alapja a stabil tudás. Viszont a használhatatlan ötlet is többet ér az ötletnélküliségnél, hiszen az ötletek kipróbálása vezethet az eddigi ismeretek rendszerbe illesztéséhez, sőt új ismeretek elsajátításához is. Az ötletnélküliség a gondolkodás hiányát is mutathatja. Az ötletgazdagság mérésére olyan feladatok kitűzése alkalmas, amelyeknek szándékosan többféle megoldását várjuk el. Az ötletgazdagság fejlesztésére a tanárnak sok jó példával, a feladatok többféle megoldásának felvonultatásával kell inspirálni a tanulókat. Nem szabad csak a saját gondolatmenetünknek megfelelő megoldási módot elfogadni, értékelni kell a különbözőket – még a hibás megoldást is, ha olyan úton indult el, amely egy eltérő, de jó megoldást hozhat.

5. Hajlékonyság, rugalmasság, könnyedség

E három személyiség tulajdonság között szoros összefüggés van, kicsit mindegyik magában hordozza a másikat, és egymást feltételezik. Ezek a tulajdonságok a divergens gondolkodást jellemzik: többféle út megtalálásának képességét (így összefüggésbe hozhatók az ötletgazdagsággal is). Amennyiben ezek minőségileg különböző megoldások, akkor rugalmasságról, ha nem különbözők, akkor hajlékonyságról beszélünk. Ennek mérésére nagyon jók a „folytasd a számsorozatot” jellegű feladatok, valamint a geometriai szerkesztések, bizonyítások, számítások és az egyenletmegoldások. Minél több egy feladaton belül a kategóriaváltás, annál rugalmasabb a tanuló gondolkodása, minél több az egy kategórián belüli megoldás, annál hajlékonyabb, és minél gyorsabban megy a váltás egy adott megoldásról a másikra (vagy a rossz megoldásról továbblépés), annál könnyedebb a gondolkodása. Ezen tulajdonságok fejlesztésében természetesen a pedagógusnak nagy szerepe van, hiszen nem várható el a tanulótól, például, hogy többféle módon tudjon egyenletet megoldani, ha mindig csak a mérlegelvet látta, mint megoldási módszert.

6. Eredetiség

Aki ezzel a képességgel rendelkezik, az a jelenségeket, dolgokat másképp látja, értékeli, mint a többség. Az eredeti gondolkodást olyan megoldások jellemzik, amelyek legtöbbször sikeresek, és a szokványostól eltérőek. Ez azt is jelenti, hogy ez a képesség viszonylagos, egy nagyobb mintát (akár több osztálynyi tanulót) alapul véve lehet csak eldönteni, hogy melyik tanuló gondolkodása eredeti. Sokszor az osztálykeretek között, tanórán elhangzó eredeti gondolat kifejtésére nincs idő, mert a „másképp gondolkodó” egyéni megoldására több időt kell fordítani, hogy a többi tanuló (és esetleg a tanár is) követni tudja a gondolatmenetet. Ez idővesztéssel jár, ami a tananyag és a többi tanuló hátrányára lehet. Ezért sokszor a pedagógus kénytelen leállítani az ilyen eredeti, a megszokottól eltérő gondolatmeneteket. Megvan azonban annak a veszélye, hogy idővel a tanuló elveszti érdeklődését, nem áll elő új ötletekkel, gondolatokkal, belesimul az átlagba. Az ilyen tanulóval tanórán kívül kell foglalkozni, és teret engedni neki, hogy egyéni gondolatait kifejtse, képességeit kibontakoztassa, és ezáltal fejlődjön. Ha ezt nem tesszük meg, akkor bizony egy tehetség elveszhet.

7. Kidolgozottság

Ez az a képesség, amely lehetővé teszi, hogy ötleteinket megvalósítsuk, a megoldás módját megtervezzük, a megoldást felépítsük. Látszólag ez ellentmond a divergens gondolkodásnak, és az előbb részletezett

képességeknek. Az ellentmondás azonban csak látszólagos, mert a ötletek, a többirányú gondolkodás végül akkor fog a probléma megoldásához vezetni, ha abból ki tudja a tanuló választani a megfelelő utat, és azt tervszerűen végre is tudja hajtani. Tehát a problémamegoldás kezdetén a divergens gondolkodásra van szükség, a végén pedig inkább a konvergens gondolkodásra.

Ez a tulajdonság sem veleszületett a gyermekekkel, kitartó és következetes pedagógiai munkával lehet kialakítani már kisiskolás kortól kezdve. Fokozatosan kell a gyerekeket rászoktatni arra, hogy a találmányra végzett műveletek helyett tudatosan, tervszerűen oldják meg a feladatokat. Nem véletlenül szerepel már az általános iskolás tankönyvekben is a feladatok mellett a „Készíts tervet!” felszólítás.

8. Újrafogalmazás

Ez azt a képességet jelenti, amellyel a tanuló a számára ismert dolgokhoz, jelenségekhez hasonlítja, közelíti az ismeretlent. Ez magában foglalja az adatok, feltételek részletezését, a szükséges ismeretek (tételek, definíciók, eljárások, stb.) felszínre hozását, az adatok közti új kapcsolatok feltárását, az analógiákat. Ez a képesség jól mérhető a szöveges feladatok megoldása kapcsán, illetve geometriai szerkesztések, bizonyítások megoldásánál. Ezeken keresztül lemérhetjük, hogy a köznap nyelvvel hogyan tudja lefordítani a matematika nyelvére. Az újrafogalmazás képességét a következő fokozatokban lehet fejleszteni:

- Egy feladat megoldása után visszakerdezzük: mit lehet még elmondani a feladatról?
- Diszkutáljuk a feladatot: mikor van megoldás, mikor nincs, mi a megoldhatóság feltétele?
- Változtatjuk az adatokat úgy, hogy a megoldás módosuljon.
- Kérjük a feladat, vagy a megoldás módosítását!
- Csak feltételeket és adatokat adunk meg, a kérdést neki kell feltenni saját magának, melyet meg is kell oldania.
- A tanuló maga készít feladatot.

Az újrafogalmazás az alapja és első lépcsőfoka a kreativitás legmagasabb fokát jelentő új feladat konstruálásának. Pólya György írja erről: „A diák matematikai tapasztalata fogyatékos marad, ha sohasem nyílt alkalma megoldani olyan feladatot, amelyet ő maga talált ki. A tanár mutassa meg, hogyan lehet egy, már megoldott feladatból újat készíteni, a így keltse fel a diákjainak érdeklődését.”

Természetesen a feladatalkotás csak a matematikával mélyebben foglalkozó, versenyekre készülő tanulóktól várható el, az átlagos tanulóknál megelégedhetünk azzal, ha úgy át tudja formálni a feladat szövegét, hogy a lényegét megértse.

9. Kiterjesztés

Az előző képességgel szoros kapcsolatban ez azt jelenti, amellyel a tanuló a feladat megoldása után meg tudja vizsgálni, hogy milyen más esetekben, milyen más adatok, feltételek mellett érvényes a kapott összefüggés. Hozzá tartozik ehhez a képességhez annak vizsgálata is, hogy a megváltozott feltételekhez milyen új összefüggéses, vagy milyen analógiás következtetést lehet levonni a feladatból. Ennek a képességnek a fejlesztésére nagyon hasznosak a sík és térgeometriai feladatok, a síkgeometriáról a térgeometriára való áttérések. A különböző számhalmazokon értelmezett műveletek kiterjesztése (pl. hatványozás).

10. Transzferálás

Ez a tulajdonság valamely ismeretanyagnak egy látszólag teljesen eltérő területen való alkalmazását jelenti. a matematikán belül majdnem minden témakör összefügg sok más témakörrel, így könnyű a transzferálásra alkalmas példákat találni: sorozatok – kombinatorika – halmazok, halmazműveletek – logika -eseményalgebra, egyenletek – algebrai műveletek, függvények – egyenletek – koordináta geometria, stb. Természetesen találunk más tárgyakkal való összefüggéseket is: fizika – egyenletek – függvények, kémia – százalékszámítás, rajz – geometriai transzformációk, földrajz – statisztika, stb.

Gyakran tapasztaljuk, hogy a tanulók „nem hajlandók” matematikai ismereteiket más tantárgyaknál alkalmazni, él bennük egyfajta ellenállás: ez most nem matematika óra, akkor miért matekozunk. Ha a matematika órákra viszünk olyan feladatokat, amelyek az említett és más tantárgyak témaköréből merítenek, és ezen megmutatjuk, hogy hogyan lehet a gyakorlatban alkalmazni a megszerzett matematikai tudást, akkor nem csak a matematikában fog fejlődni a tanuló, hanem más tárgyakból is. A kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztése természetesen más területeken is jó hatással lesz a tanulók teljesítményére.

11. Összegzés

Ha végigtekintünk az eddigiekben megvizsgált tulajdonságokon és fejlesztési lehetőségeiken, láthatjuk, hogy nagyon összetett feladatról van szó: a tehetséggondozás sokféle képesség fejlesztését jelenti, különböző módszereket és munkaformákat igényel, és természetesen kreatív és felkészült pedagógust. Nem mondhatjuk ki senkiről, hogy kreatív vagy sem: bizonyos tulajdonságokkal rendelkezik a felsoroltak közül, bizonyosakkal nem. Minél több tulajdonsággal rendelkezik, annál kreatívabb, amiben gyengébb, abban pedig a fejleszthető. A matematika versenyeken való sikeres szerepléshez mindenképpen jó, ha minél több kreatív személyiségtulajdonsággal rendelkezik a tanuló, de természetesen a stabil matematikatudás is fontos tényező. Végül tekintsünk át röviden néhány használható stratégiát a felkészítéshez:

- szembesítés kétértelműségekkel, bizonytalanságokkal;
- ismert jelenségek „idegenszerűvé” tétele analógiával;
- ugyanannak a dolognak több szempontból való vizsgálata;
- produktív kérdések, amelyek az információk más oldalról való megközelítését jelentik;
- hiányzó elemek felkutatása, a meglévő adatok kiegészítése;
- rendszerezési lehetőségek keresése,
- látszólag különböző elemek kapcsolatba hozása;
- titkoszatosságok, rejtélyek, matematikai furcsaságok felkutatása, vizsgálata.

12. Feladatok

1.

Állítson össze 4 problémából ál feladatlapot, amely alkalmas a tanulók kreativitásának, sokoldalúságának fejlesztésére csoportmunkában!

2.

Térképezze fel egy kiválasztott középiskolai osztályban a legkreatívabb tanulókat egy alkalmasan választott probléma felvetésének segítségével!

Irodalomjegyzék

- [1] Ambrus András: Bevezetés a matematik-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest 2004.
- [2] dr. Czeglédy István - dr. Orosz Gyuláné - dr. Szalontai Tibor - Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I-II., főiskolai jegyzet, Bessenyei György Könyvkiadó, 2005.
- [3] Herskovits Mária: A tehetségfejlesztés útjai és tapasztalatai külföldön (in: Fejezetek a pedagógiai pszichológia köréből, <http://mek.oszk.hu>)
- [4] Renzulli, J.S. (1978): What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. Phi Delta Kappan, 60(3), 180-184, 261.
- [5] Szénássy Barna: A magyarországi matematika története, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
- [6] <http://www.komal.hu>
- [7] <https://ad.bolyai.hu/ad>
- [8] <http://www.bolyai.hu>
- [9] <http://www.titteleki.hu>
- [10] <http://www.mategye.hu>
- [11] <http://www.zalamat.hu>
- [12] <http://berzsenyi.tvnet.hu/~nemecs/nmmv>
- [13] <http://www.oh.gov.hu/versenyek>
- [14] <http://www.hetvezer-szfv.sulinet.hu>
- [15] <http://home.fazekas.hu/~dobos/olimpia/cimlap.htm>
- [16] <http://www.microprof.hu>
- [17] <http://versenyvizsga.hu/external/vvszuro/vvszuro.php>
- [18] <http://www.ide.sk/index.php?aktdir=matek>