Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

<u>FELADATOK</u>

1. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák és mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?

2. Legyen C az AB szakasz belső pontja. Az AB szakasz azonos oldalára emeljük az AB, AC és CB átmérőjű félköröket. A C ponton át az AB-re emelt merőleges egyenes az AB-re emelt félkörívet a D pontban metszi. Az AD szakasz és az AC-re emelt félkörív metszéspontja E, a BD szakasz és a CB-re emelt félkörív metszéspontja F. Igazoljuk, hogy az EF egyenes az AC-re illetve CB-re emelt félkörívek közös érintője lesz.

3. Legyen $a_1 = 1$, a sorozat további elemeit a következő összefüggés határozza meg:

$$a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1), \quad n \text{ pozitív egész}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat első 2025 darab tagjának szorzata nagyobb, mint 2^{2014}.

4. Az ABC háromszög kerülete 12 cm, területe 6 cm^2. Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. A P pontnak a BC, CA és AB oldalak egyeneseire vonatkozó merőleges vetületei legyenek rendre D, E és F. Tekintsük az alábbi összeget

$$S = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

(a) Határozzuk meg S minimális értékét.
(b) A háromszög mely P belső pontjára lesz S értéke minimális?

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2, \quad \sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.