

I. HALMAZOK TULAJDONSÁGAI ÉS A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy-egy halmazt?

1. {osztályunk tanulói};
2. {egy tetszőleges osztály tanulói};
3. {osztályunk fiútanulói};
4. {osztályunk magas tanulói};
5. {Magyarország városai ma};
6. {Arany János versei};
7. {a természetes számok};
8. {a természetes számok halmaza};
9. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet};
10. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet valós gyökei};
11. {egy egyenlet gyökei};
12. {az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
13. {az $x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
14. {az elsőfokú egyenletek, osztályunk tanulói};
15. {egy adott egyenlet, melynek 2 az egyik gyöke};
16. {egy olyan egyenlet, melynek egy valós gyöke van};
17. {tetszőleges három egész szám};
18. {a prímszámok};
19. {a legnagyobb prímszám};
20. {néhány prímszám}.

2. Soroljunk fel a következő halmazok elemei közül legalább kettőt:

1. {a 0,5-nél kisebb egész számok};
2. {Petőfi versei};

3. {az 50-nél nagyobb prímszámok};
 4. {a prímszámokból álló halmazok};
 5. {az $x^3 - 4x = 0$ egyenlet valós gyökei};
 6. {az olyan elsőfokú egyenletek, melyeknek a gyöke 100};
 7. {1986 prímosztói};
 8. {192 és 729 közös osztói};
 9. {a szabályos testek};
 10. $\{2^{40}$ értékének különböző számjegyei}.
3. Soroljuk fel a következő halmazok elemeit:
1. {a 100-nál kisebb négyzetszámok};
 2. {a 10-nél kisebb négyzetszámok száma};
 3. {az $\frac{x-1}{x} = 2$ egyenlet pozitív gyökei};
 4. {az $\frac{x-1}{x} = 2$ egyenlet pozitív gyökeinek száma};
 5. {az $x^2 - 2x \leq 0$ egyenlőtlenség egész gyökei};
 6. {az $x^2 + 4x < 0$ egyenlőtlenség egész gyökeinek száma};
 7. {a háromjegyű páros számok száma};
 8. {az olyan kétjegyű számok, melyek számjegyeinek összege 9};
 9. {az olyan háromjegyű számok száma, melyek számjegyeinek összege 9};
 10. {729 pozitív osztói}.
4. Válasszuk ki a következő halmazok közül az egyenlőket:
1. {a legkisebb prímszám};
 2. {egy prímszám pozitív osztóinak száma};
 3. {az $x^3 - 2x^2 = 0$ egyenlet valós gyökei};
 4. {az $x^3 - 2x^2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek a száma};
 5. {a (0; 2) számpár};
 6. {a -1 és 3 közé eső páros számok};
 7. {a $10^{10} + 1$ szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege};
 8. {az $x^{100} = 1$ egyenlet valós gyökei};
 9. {az $x = 0$ és $y = 2$ egyenletű egyenesek metszéspontjának koordinátái};
 10. $\{(-1)^n$ különböző értékei, ahol n tetszőleges pozitív egész szám}.

5. Vizsgáljuk meg, hogy a következő állítások közül melyek igazak:

1. $2 \in \{\text{a prímszámok}\}$.
2. A négyzet eleme a trapézok halmazának.
3. 2^{40} , $2^{40} - 1$ és $2^{40} + 1$ eleme az összetett számok halmazának.
4. Ha $a \in A$ és $b \in B$, akkor $(a + b) \in B$, ahol A a prímszámok halmaza, B az összetett számok halmaza.
5. $A \in A$.
6. $A \in \{A\}$.
7. Az $x^n - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei elemei a pozitív egész számok halmazának, tetszőleges n egész szám esetén.
8. $1, 9 \in \{\text{a 2-hatványok}\}$.
9. Ha $a \in A$ és $A \in B$, akkor $a \in B$.
10. $A = B$ esetén $A \in \{B\}$.

6. Jelölje N, P, Z, Q, I, R rendre a természetes számok, a prímszámok, az egész számok, a racionális számok, az irracionális számok, a valós számok halmazát. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz:

1. Ha $a \in N$ és $b \in N$, akkor $(a + b) \in N$.
2. Ha $a \in P$ és $b \in P$, akkor $(a + b) \in P$.
3. Ha $a \in Z$ és $b \in Z$, akkor $ab \in Z$.
4. Ha $a \in Z$ és $b \in Q$, akkor $ab \in Z$.
5. Van olyan a és b szám, hogy $a \in Z$ és $b \in Q$ esetén $ab \in Z$.
6. Ha $a \in Q$ és $b \in I$, akkor $(a - b) \in I$.
7. Ha $a \in Q$ és $b \in R$, akkor $ab \in I$.
8. Van olyan a és b , hogy $a \in Q$ és $b \in I$ esetén $ab \in N$.
9. $\frac{a}{b} \in R$, ha $a \in R$ és $b \in R$.

10. $a \in Z, b \in Q$ esetén $\frac{a^2}{1+b^2} \in Q$.

7. Legyen $a \in X$ és $b \in X$. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben igazak a következő állítások:

1. $(a + b) \in X$.
2. $(a - b) \in X$.
3. $ab \in X$.
4. $\frac{a}{b} \in X$, ha $b \neq 0$, ahol X helyébe rendre az előző feladatban szereplő

N, P, Z, Q, I, R halmazokat helyettesítjük és a , illetve b az X halmaz tetszőleges eleme lehet.

8. Jelölje az A halmaz elemeinek számát $|A|$. Határozzuk meg $|A|$ értékét a következő esetekben:

1. $A = \{a \text{ 20-nál kisebb prímszámok}\};$
2. $A = \{36 \text{ pozitív osztói}\};$
3. $A = \{a \text{ 100-nál kisebb négyzetszámok}\};$
4. $A = \{az \ x^2 < 100x \text{ egyenlőtlenség egész gyökei}\};$
5. $A = \{az \ x^2 + x + 2 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\};$
6. $A = \{\emptyset, 2\};$
7. $A = \{a \text{ legkisebb egész szám}\};$
8. $A = \{a \text{ legkisebb természetes szám}\};$
9. $A = \{11^4 \text{ különböző számjegyei}\};$
10. $A = \{a \ 10^2 < x^3 < 10^4 \text{ egyenlőtlenségrendszer egész gyökei}\}.$

9. Az a és b egymástól különböző egész eleme az A halmaznak. Tudjuk, hogy A -nak eleme bármely két különböző elemének összege is. Határozzuk meg $|A|$ értékét, ha az A halmaz véges és minden eleme egész szám.

10. Soroljuk fel a következő halmazok közül azokat, melyeknek végtelen sok elemük van:

- $A = \{a \text{ prímszámok}\}; \quad B = \{\text{egy sík fésíkjai}\};$
 $C = \{\text{egy sokszög csúcsai}\}; \quad D = \{a \text{ páros prímszámok}\};$
 $E = \left\{ az \ \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1 \text{ egyenlet valós gyökei} \right\};$
 $F = \left\{ azok \ az \ x \text{ egész számok, amelyekre } \frac{x + 100}{x} \text{ is egész szám} \right\};$
 $G = \{\text{csak az 1 számjegyet tartalmazó számok}\};$
 $H = \{\text{azok a számok, amelyek számjegyeinek összege 2}\};$
 $I = \{a \text{ természetes számok számjegyei}\};$
 $J = \{a \text{ valós számok halmaza}\}.$

11. Az A halmaznak eleme az 1 és -1 . A halmaz bármely két elemének számtani közepe is eleme a halmaznak. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaznak végtelen sok eleme van.

12. Egy véges számhalmaz bármely elemének a reciproka is eleme

a halmaznak, az adott elem -1 -szeresével együtt. Igazoljuk, hogy a halmaz elemszáma páros.

13. Az A számhalmaz elemeinek száma 2. A halmaz bármely két elemének szorzata is az A halmaz eleme. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz elemei között szerepel a 0, vagy az 1.

14. Tekintsük alaphalmaznak a valós számok halmazát (R). Határozzuk meg a következő halmazok komplementerét:

1. $Q = \{a \text{ racionális számok}\};$
2. $I = \{a \text{ irracionális számok}\};$
3. $\{a \text{ pozitív valós számok}\};$
4. $R;$
5. $\emptyset.$

15. Mivel egyezik meg egy adott halmaz komplementerének komplementere, illetve a kapott halmaz komplementere?

*16. Lehet-e egy véges halmaz komplementere is véges halmaz?

17. Adjuk meg az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz kételemű részhalmazait.

18. a) Hány háromelemű részhalmaza van egy hat elemet tartalmazó halmaznak?

b) Hány valódi részhalmaza van egy egyelemű halmaznak?

19. Bizonyítsuk be, hogy az $A = \{1; 3; 5; 7\}$ halmaznak összesen 2^4 számú részhalmaza van. Írjuk fel külön-külön a 0; 1; 2; 3; 4 elemű részhalmazokat.

20. Legyen T a téglalapok, R a rombuszok, N a négyzetek, P a paralelogrammák halmaza. Melyik halmaz melyiknek részhalmaza T, R, N, P közül?

*21. A 6. feladat jelöléseit használva döntsük el, hogy melyik igaz a következő állítások közül:

- | | |
|--|--|
| 1. $P \subset Q.$ | 2. $Z \subset I.$ |
| 3. $P \subset Z \subset Q.$ | 4. $N \subset Q \subset R.$ |
| 5. $N \subset I.$ | 6. $N \subset P \subset R.$ |
| 7. $P \subset N \subset Z \subset Q \subset R.$ | 8. $\bar{Z} \subset Q$, ahol R az alaphalmaz. |
| 9. $\bar{Q} \subset R$, ahol R az alaphalmaz. | |
| 10. $\bar{R} \subset \bar{Q} \subset \bar{Z}$, ha az alaphalmaz R . | |

22. Igaz-e, hogy $a \in A$ esetén $\{a\} \subseteq A$?

23. Bizonyítsuk be, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ esetén $A = B$.

*24. Határozzuk meg az A halmazt, ha $A \subset \bar{A}$.

25. Bizonyítsuk be, hogy a részhalmazképzés tranzitív művelet, azaz $A \subset B$ és $B \subset C$ esetén $A \subset C$.

26. Milyen feltétel mellett igaz, hogy $A \subset B$ esetén $|A| < |B|$?

27. Bizonyítsuk be, hogy n elemű halmaz összes részhalmazának száma 2^n .

*28. Igazoljuk, hogy $A \subset B$ esetén $\bar{B} \subset \bar{A}$.

2. Műveletek halmazokkal

29. Legyenek az A halmaz elemei 16 pozitív osztói, a B halmaz elemei 24 pozitív osztói, a C halmaz elemei 12 pozitív osztói. Határozzuk meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ halmazokat. Lesz-e a kapott halmazok között két egyenlő halmaz?

30. Írjunk fel olyan negyedfokú egyenletet, melynek gyökei az A és B halmaz uniójának elemei, ahol $A = \{x \mid x^3 = x \text{ egyenlet valós gyökei}\}$, B pedig az $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza.

31. Az A halmaz legyen a $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 1)$ koordinátpárok által adott négyszöglap pontjainak halmaza; a B halmaz legyen a $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(0; 2)$ koordinátájú csúcsok által meghatározott háromszöglap pontjainak halmaza; a C halmaz pedig legyen a $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ csúcspontokkal adott háromszöglap pontjainak halmaza. Milyen alakzatokat határoznak meg az $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ és $(A \cup B) \cup C$ halmazok?

32. Jelölje A és B az S sík két különböző félsíkját. Milyen esetben lehet $A \cup B = S$?

*33. Jelölje A , B és C az S sík három páronként különböző félsíkját. Adjunk példát olyan esetre, amikor $A \cup B \cup C \neq S$.

Lehet-e az $\overline{A \cup B \cup C}$ halmaz az S sík korlátos tartománya?

34. Bizonyítsuk be, hogy $A \subset B$ esetén $A \cup B = B$.

35. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B véges halmaz, akkor

$$|A| + |B| \geq |A \cup B|.$$

36. Ha A és B véges halmaz, akkor $|A| + |B| = |A \cup B|$ esetén hány közös eleme van az A és B halmaznak?

*37. Legyen A és B az S sík két olyan korlátos tartományának pontjaiból álló nem üres halmaz, melyekre $A \cup B = B$. Igazak-e a következő állítások:

$$1. A \cup \bar{B} = S. \quad 2. A \cup \bar{A} = S. \quad 3. B \cup \bar{A} = S. \quad 4. \bar{A} \cup \bar{B} = S.$$

$$5. \overline{A \cup B} \cup A = S. \quad 6. \overline{A \cup B} \cup B = S.$$

Ahol az S sík pontjainak halmaza az alaphalmaz.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B halmaz véges halmaz, akkor $|A \cup B| = |A|$ esetén $A \supseteq B$.

39. Mondjunk példát olyan A és B halmazra, hogy $|A \cup B| = |A|$ esetén ne teljesüljön az $A \supseteq B$ összefüggés.

40. Legyen A a 2-vel osztható kétjegyű számok halmaza, B a 3-mal osztható 100-nál kisebb pozitív számok halmaza, C pedig a 30-cal osztható egész számok halmaza. Határozzuk meg az A és B , B és C , C és A halmaz közös részét.

41. Adjunk példát olyan A , B és C halmazra, hogy teljesüljenek a következő feltételek: $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A| = |B| = |C| = 2$ és $A \neq B$, valamint $B \neq C$.

42. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B = B$ esetén $B \subset A$.

43. Jelöljük $(x; y)$ -nal a koordinátasík tetszőleges pontjának koordinátáit. Legyen A , B és C rendre az olyan $(x; y)$ koordinátákkal rendelkező pontok halmaza, melyekre $|x + y| \leq 1$, $|x - y| \leq 1$,

illetve $|y| \leq \frac{1}{2}$. A sík milyen tartományait határozzák meg az $A \cap B$ és $(A \cap B) \cap C$ halmazok?

44. Legyen $D = \left\{ (x; y) \in S \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \leq \frac{1}{2} \right\}$. A 43. feladat feltételeit használva határozzuk meg az $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ halmazt.

45. Bizonyítsuk be, hogy $A \cup B = A \cap B$ esetén $A = B$.

46. Igazoljuk, hogy ha A és B véges halmazok, akkor

$$|A \cap B| \leq \frac{|A| + |B|}{2}.$$

47. Legyen A és B a sík két tetszőleges téglalaptartománya pont-

jainak halmaza. Legfeljebb hány részre osztja a síkot az A és B „halmaz”?

48. Tekintsük a koordinátasík tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapokat. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n téglalap, ha $n = 1, 2, 3, 4$?

49. Az előző feladat $n = 3$ esetében határozzuk meg az $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \bar{C}$, $A \cap \bar{B} \cap C$, $\bar{A} \cap B \cap C$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$, $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$, $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ halmazokat, ahol A, B, C olyan téglalaptartományok pontjaiból álló halmazok, melyek a síkot a lehető legtöbb részre bontják.

*50. Bizonyítsuk be, hogy n olyan téglalap, melynek megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, a síkot legfeljebb $2n^2 - 2n + 2$ tartományra osztja.

51. Tekintsünk két olyan körlapot, melyek a síkot négy részre osztják. A két körlap pontjaiból álló halmaz legyen az A és B halmaz. Bizonyítsuk be, hogy a négy tartomány pontjai a következő ponthalmazok: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

*52. Adjunk meg négy olyan A, B, C, D ponthalmazt a síkon, hogy az egyes halmazok határvonala zárt görbe legyen és a halmazok a síkot 16 részre osszák úgy, hogy a 16 tartomány mindegyike $X \cap Y \cap Z \cap V$ alakban legyen felírható, ahol X, Y, Z és V rendre A vagy $\bar{A}$, B vagy $\bar{B}$, C vagy $\bar{C}$, D vagy $\bar{D}$ halmazzal egyenlő. (Az ilyen típusú diagramokat nevezik Venn-diagramoknak.)

*53. Legyen a természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$) az alaphalmaz és legyen A, B , illetve C a 2-vel, 3-mal, illetve 6-tal osztható számok halmaza. Adjuk meg az A, B, C halmazok által meghatározott atomokat, ha atomnak nevezzük az olyan $X \cap Y \cap Z$ alakban felírható halmazokat, ahol X, Y és Z helyébe rendre A vagy $\bar{A}$, B vagy $\bar{B}$, C vagy $\bar{C}$ kerülhet és egyik halmaz sem üres.

54. Két különböző sugarú koncentrikus körlap pontjainak halmazát jelöljük A -val, illetve B -vel. Határozzuk meg az $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat, ha az A halmaz „sugara” a nagyobb.

55. Jelöljük rendre A -, B -, C -, D -, E -vel a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 6-tal osztható pozitív egész számok halmazát. Határozzuk meg a következő halmazokat:

1. $A \setminus B$; 2. $B \setminus A$; 3. $A \setminus C$; 4. $C \setminus A$; 5. $(C \setminus A) \setminus B$; 6. $D \setminus C$;
7. $D \setminus A$; 8. $(D \setminus C) \setminus B$; 9. $(E \setminus D) \setminus A$; 10. $(E \setminus D) \setminus (C \setminus B)$.

56. Legyen az S koordinátasík pontjaiból álló halmaz az alaphalmaz. Jelölje A, B és C rendre a $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ középpontú egységnyi sugarú zárt körlapok pontjainak halmazát. Szemléltessük a következő halmazokat:

1. $\bar{A} \setminus B$; 2. $\bar{A} \setminus \bar{C}$; 3. $(B \cap C) \setminus A$;
4. $(A \setminus C) \setminus B$; 5. $A \setminus (C \setminus B)$; 6. $\bar{A} \setminus \bar{B}$;
7. $(\bar{A} \setminus \bar{B}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{C}) \cup (\bar{C} \setminus \bar{A})$; 8. $(A \setminus \bar{B}) \cap (B \setminus \bar{C}) \cap (C \setminus \bar{A})$.

57. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A \subseteq B$.

58. Milyen feltétel teljesülése esetén lesz az A, B és C halmazra igaz, hogy $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = \emptyset$?

59. Legyen $A = B = \{0; 1; 2\}$. Határozzuk meg az $A \times B$ halmazt.

60. Hány elemből áll az $(A \times A) \times A$ halmaz, ha $A = \{0; 1; 2; 3\}$?

61. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \leq 1\}$. Milyen ponthalmazt határoznak meg azon $(x; y)$ koordinátapárok, amelyek elemei az $A \times B$ halmaznak?

62. Hány közös eleme van az $A \times B$ és $B \times A$ halmaznak, ha $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 4\}$?

63. Határozzuk meg az $(A \times B) \cap (B \times A)$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$ halmazt, ha $A = B$.

64. Bizonyítsuk be, hogy $A \times B = B \times A$ esetén $A = B$.

65. Igazoljuk, hogy $\emptyset \subset A \subset B$ esetén $A \times B \subset B \times B$.

66. Legyen $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát:

1. $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$; 2. $(A \cup B) \times (A \cap B)$;
3. $(A \setminus B) \times (A \cap B)$; 4. $(B \setminus A) \times (B \cup A)$.

*67. A és B olyan halmazok, melyekre teljesül, hogy $|A \times B| = 100$. Határozzuk meg $|A \cup B|$ és $|A \cap B|$ minimumát, illetve maximumát.

*68. Legyen $x \in A \subset \mathbb{N}$, $y \in B \subset \mathbb{N}$, ahol $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát jelöli. Ha az x és y számokra teljesül, hogy $y^2 - x^2 = 80$, akkor $x \in A$ és $y \in B$. Határozzuk meg az A és B halmazt, ha az összetartozó értékpárokra $x < y$ teljesül.

69. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A \setminus B = \{2; 4; 6\}$, $A \cap B = \{1; 3\}$. Határozzuk meg az A és B halmazt.

70. Bizonyítsuk be, hogy az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazok ismeretében egyértelműen meghatározható az A és B halmaz.

71. Az A , B és C halmazokról tudjuk, hogy $A \setminus B = \{4; 6; 8\}$, $B \setminus C = \{2; 5; 9; 10\}$, $C \setminus A = \{3; 7; 11\}$, $A \cap B \cap C = \{1\}$,
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11\}$,
 $C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11\}$.

Határozzuk meg az A , B , C halmazokat, ha $|C| = 5$.

72. Adjunk meg három olyan kételemű halmazt, melyeknek páronként vett metszete nem üres halmaz, de mindhárom halmaznak nincs közös eleme.

73. Adjunk meg öt olyan halmazt, amelyekre teljesül, hogy bármely négy halmaz metszete nem üres halmaz, de az öt halmaznak nincs közös eleme.

74. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$.

75. Az A , B , C pontthalmazok az S síkot nyolc tartományra bontják szét. Írjuk fel a nyolc tartományt az unióképzés és különbségképzés segítségével.

76. Írjunk fel hat olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek van közös eleme, de semelyik háromnak nincs.

*77. Bizonyítsuk be, hogy A , B , C tetszőleges halmazok esetén az

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) = \\ = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

78. Legyen $f(x) = x(x-1)(x+2)$ és $g(x) = x(x+1)(x+2)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

a) Írjuk fel f és g zérushelyeinek halmazát.

b) Határozzuk meg az $x \mapsto fg$, illetve az $x \mapsto \frac{f}{g}$ függvény zérushelyeinek halmazát.

c) Lássuk be, hogy f és g zérushelyei halmazának uniója az fg függvény zérushelyeinek halmaza, illetve azt, hogy az első két halmaz különbsége az $\frac{f}{g}$ függvény zérushelyeinek halmaza.

Jelöljük az f és g polinomfüggvények zérushelyeinek halmazát F -fel, illetve G -vel. Bizonyítsuk be, hogy igazak a következő állítások:

d) Az fg függvény zérushelyeinek halmaza az $F \cup G$ halmaz.

e) $\frac{f}{g}$ zérushelyeinek halmaza az $F \setminus G$ halmaz.

f) Az $f^2(x) + g^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza az $F \cap G$ halmaz.

g) Az $f(x) \pm g(x) = 0$ egyenlet gyökei halmazának részhalmaza az $F \cap G$ halmaz, ha az alaphalmaz mindegyik esetben a valós számok halmaza.

79. Az a , b , c polinomfüggvények zérushelyeinek halmaza legyen rendre az $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{0; 2; 4\}$ halmaz.

Határozzuk meg a következő egyenletek gyökeinek halmazát;

$$a) a(x)b(x)c(x) = 0; \quad b) \frac{a(x)b(x)}{c(x)} = 0;$$

$$c) \frac{a(x)}{b(x)c(x)} = 0; \quad d) a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0.$$

Az f , g , h polinomfüggvények valós zérushelyeinek halmazát rendre F -, G -, H -val jelöljük. Adjuk meg a következő egyenletek valós gyökeinek halmazát:

$$e) f(x)g(x)h(x) = 0; \quad f) \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0;$$

$$g) \frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0; \quad h) f^2(x) + g^2(x) + h^2(x) = 0.$$

80. Legyen az $a(x)=0$ és $b(x)=0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza A és B . Igaz-e, hogy az $a(x)b(x) = 0$, illetve $\frac{a(x)}{b(x)} = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $A \cup B$, illetve $A \setminus B$?

*81. Az $a(x)=0$, $b(x)=0$, $c(x)=0$ egyenletek valós gyökeinek halmazát rendre A , B , C -vel jelöljük. Mondjunk példát olyan $a(x)=0$, $b(x)=0$, $c(x)=0$ egyenletekre, amelyek valós gyökeire teljesül, hogy az $a(x)b(x)c(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza nem egyezik meg az $A \cup B \cup C$ halmazzal. Igaz-e, hogy az $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) = 0$ egyenlet gyökeinek halmaza $A \cap B \cap C$?

*82. Bizonyítsuk be, hogy az $a(x)=0$ és $b(x)=0$ egyenletből képzett $a(x)b(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza lehet az üres

halmaz is, függetlenül attól, hogy hány gyöke van az eredeti egyenleteknek.

83. a) Tekintsük az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1}$ függvényt ($x \neq 1$) és az $x \mapsto \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvényt ($x \neq 0$ és $x \neq -2$). Határozzuk meg az $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x^2+2x}$ függvény értelmezési tartományát úgy, hogy az a lehető legbővebb halmaz legyen.

b) Legyen az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya az A , illetve B halmaz. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto f(x)g(x)$ függvény értelmezési tartománya az $A \cap B$ halmaz.

84. Tekintsük a lehető legbővebb halmazon értelmezett $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvényeket, ahol $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$, illetve $g(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

a) Határozzuk meg az $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmezési tartományát.

b) Adjuk meg az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmazát.

c) Mi lesz az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet zérushelyeinek halmaza?

d) Az $x \mapsto f(x)$ és $x \mapsto g(x)$ függvény értelmezési tartománya legyen az A , illetve B halmaz. Legyen továbbá az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletek valós gyökeinek halmaza F , illetve G . Mutassuk meg, hogy az $f(x)g(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek halmaza $(A \cap G) \cup (B \cap F)$.

85. Tekintsük a számegegyenes következő zárt intervallumaiból álló ponthalmazokat: $I_1 = [0; 2]$, $I_2 = [1; 3]$, $I_3 = [2; 4]$, $I_4 = [0; 3]$. Határozzuk meg az $I_1 \cap I_2 \cap I_3$; $I_1 \cap I_2 \cap I_4$; $I_1 \cap I_3 \cap I_4$; $I_2 \cap I_3 \cap I_4$ halmazokat.

86. Mi a 85. feladatban szereplő négy halmaz közös része, illetve uniója?

87. Határozzuk meg az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$ intervallumsorozat egy közös pontját.

88. Bizonyítsuk be, hogy a $\left[0; \frac{1}{n}\right] = I_n$ intervallumsorozat tagjainak egy közös pontja van.

89. Bizonyítsuk be, hogy ha a számegegyenes négy intervallumából álló négy ponthalmaz közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor a négy halmaz metszete nem lehet üres.

90. Igazoljuk, hogy a számegegyenes tetszőleges számú zárt intervallumának pontjaiból álló halmazokra teljesül a következő állítás:

Ha a halmazok közül bármelyik kettőnek van közös eleme, akkor mindegyik halmaznak van.

91. Mondjunk példát olyan esetre, hogy a 90. feladat állítása ne legyen igaz akkor, ha zárt intervallumok helyett nyílt intervallumokat veszünk.

3. Halmaz elemeinek száma

92. Legyen az A halmaz a 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, a B halmaz pedig a 200-nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg $|A \setminus B|$, $|B \setminus A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$ értékét.

93. Jelöljük A -val 72 pozitív osztóinak, B -vel 120 pozitív osztóinak halmazát. Adjuk meg $|A \setminus B|$; $|B \setminus A|$; $|A \cap B|$ értékét.

94. Legyen A , illetve B a koordinátasík azon egész koordinátájú pontjainak halmaza, melyekre $A = \{P(x; y) | 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6\}$, illetve $B = \{P(x; y) | -2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\}$. Határozzuk meg a következő számokat:

1. $|A|$; 2. $|B|$; 3. $|A \setminus B|$; 4. $|B \setminus A|$; 5. $|A \cap B|$; 6. $|A \cup B|$.

95. Jelöljön A és B két olyan halmazt, melyekre $|A| = 2$, $|B| = 4$. Határozzuk meg a következő mennyiségek minimumát, illetve maximumát:

1. $|A \setminus B|$; 2. $|B \setminus A|$; 3. $|A \cap B|$; 4. $|A \cup B|$.

96. Az A és B halmazról tudjuk, hogy $|A| = 5$, $|B| = 8$, $|A \setminus B| = 3$. Határozzuk meg $|A \cap B|$ és $|A \cup B|$ értékét.

97. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges véges halmaz, akkor $|A| - |A \setminus B| = |A \cap B|$.

98. Legyen $A = \{\text{a 100-nál kisebb négyzetszámok}\}$, $B = \{\text{a 9-cel osztható legfeljebb kétjegyű pozitív egészek}\}$. Határozzuk meg az $|A|$; $|B|$; $|A \setminus B|$; $|B \setminus A|$; $|A \cap B|$; $|A \cup B|$ értékeket.

99. Egy osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{5}$ része közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztály létszáma 30?

100. A 99. feladatban szereplő osztálynak mi a tanulmányi átlaga, ha a közepesnél jobb tanulók tanulmányi eredményének átlaga 4, a közepesnél gyengébbeké pedig 2,5?

101. Legyenek A , B és C tetszőleges véges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
2. $|B \cup C| = |B \setminus C| + |C \setminus B| + |B \cap C|$;
3. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$;
4. $|A \cup B \cup C| = |A \setminus (B \cup C)| + |B \setminus (C \cup A)| + |C \setminus (A \cup B)| + |(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)|$.

102. Az A , B , C , D halmazokról a következőket tudjuk: $|A| = |B| = |C| = |D| = 8$, bármely három halmaznak egy közös eleme van, bármely két halmaznak három közös eleme van és $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. Határozzuk meg az $|A \cup B \cup C \cup D|$ értéket. Adjunk példát a fenti tulajdonságú halmazokra.

103. Bizonyítsuk be, hogy ha az A , B , C , D véges halmazokra teljesülnek az előző feladat feltételei az $|A| = |B| = |C| = |D| = 8$ feltételtől eltekintve, akkor mindegyik halmaznak legalább 6 darab eleme van.

104. Legyenek A , B , C tetszőleges véges halmazok. Bizonyítsuk be, hogy $|A \cap B \cap C| \leq \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C|)$.

105. Igazoljuk a 104. feladat általánosítását, azaz ha $A_1, A_2, \dots, A_k$ tetszőleges véges halmazok, akkor mutassuk meg, hogy

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| \leq \frac{1}{k}(|A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_k|).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

*106. Az A , B , C véges halmazok közül semelyik nem tartalmazza

a másik két halmaz bármelyikét. A három halmazra teljesül, hogy

$$|A \cap B \cap C| + 1 = \frac{1}{3}(|A| + |B| + |C|).$$

1. Hány elemű az $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$ halmaz?

2. Bizonyítsuk be, hogy $|A| = |B| = |C|$.

3. $|A \cup B \cup C| = 10$ esetén mekkora az $|A \cap B \cap C|$ értéke?

107. Legyen A a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 200-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza. Hány eleme van az $(A \times B) \setminus (B \times A)$ és a $(B \times A) \setminus (A \times B)$ halmaznak?

108. Mutassuk meg, hogy ha A és B véges, nem üres halmazok, akkor

$$|(A \times B) \setminus (B \times A)| = |(B \times A) \setminus (A \times B)|.$$

109. Ha az A és B halmaz elemszáma 3, illetve 4, akkor legfeljebb hány eleme lehet az $(A \times B) \cap (B \times A)$ halmaznak?

110. Bizonyítsuk be, hogy ha a véges A és B halmaznak két közös eleme van, akkor $|(A \times B) \cap (B \times A)| = 4$.

111. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A , B véges és nem üres halmazokra igaz az $|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2$ összefüggés.

112. Adjunk meg négy olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek egy közös eleme van, bármely három halmaz metszete üres, továbbá a halmazok elemszáma megegyezik.

*113. Bizonyítsuk be, hogy ha az A , B , C , D , E halmazokra teljesül, hogy bármely kettőnek egy közös eleme van, de bármely háromnak már nincs közös eleme, akkor bármelyik halmaz elemszáma nem lehet 4-nél kisebb.

114. Legalább hány eleme van hat olyan véges halmaz uniójának, amelyek közül bármely kettőnek egy közös eleme van és bármely háromnak nincs közös eleme.

115. Legyenek az $A_1, A_2, \dots, A_k$ véges halmazok olyanok, amelyekre teljesül, hogy bármely kettőnek egy közös eleme van, de bármely három halmaz metszete üres. Bizonyítsuk be, hogy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| \geq \frac{k(k-1)}{2}.$$

116. Az A , B és C halmazok elemszáma 3. Legalább hány eleme van az $A \cup B \cup C$ halmaznak, ha $|A \cap B \cap C| = 1$?

***117.** Az A , B és C halmazokra teljesül, hogy

$$|A| = |B| = |C| = 2k + 1 \text{ és } |A \cap B \cap C| = 1.$$

Határozzuk meg $|A \cup B \cup C|$ minimális és maximális értékét.

118. Három véges halmaz közös része 4 elemet tartalmaz. Lehet-e mindegyik halmaz elemszáma 8?

***119.** Bizonyítsuk be, hogy ha az A , B és C halmazok végesek és $|A| = |B| = |C| = k + n$, továbbá $|A \cap B \cap C| = k$, akkor $|A \cup B \cup C| \geq \frac{3n + 2k}{2}$.

120. Öt halmaz közül bármelyik kettőnek van közös eleme, de az öt halmaz metszete üres. Adjunk meg a feltételeknek megfelelő négyelemű halmazokat.

121. Mutassuk meg, hogy öt darab, páronként különböző, négyelemű halmaz uniójának legalább 5 eleme van, ha a halmazok közül bármely kettőnek van közös eleme, de az öt halmaz metszete üres.

***122.** Bizonyítsuk be, hogy n darab, páronként különböző, $n - 1$ elemű halmaz uniójának elemszáma legalább n , ha $n \geq 3$ és a halmazok közül bármely kettőnek van közös eleme, de az n darab halmaz metszete az üres halmaz.

***123.** n számú $n - 1$ elemű halmaz közül bármelyik $n - 1$ darab halmaznak van közös eleme, de az n halmaz közös része az üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha a halmazok különbözők, akkor a halmazok uniójának pontosan n darab eleme van.

***124.** Adjunk meg az előző feladat feltételeinek megfelelő n darab halmazt.

125. Az A , B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 7$, $|B| = 8$, $|C| = 9$, továbbá $|A \cap B \cap C| = 3$. Határozzuk meg $|A \cup B \cup C|$ lehetséges értékeit. Adjunk olyan példát, amikor $|A \cup B \cup C| = 15$.

4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok

126. Igaz-e, hogy $A \cup B \subseteq C$, $A \cap B \subseteq C$, $A \setminus B \subseteq C$, ha az A és B halmaz a C halmaz két tetszőleges részhalmaza?

127. Bizonyítsuk be, hogy $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, ahol A és B két tetszőleges halmaz.

128. Mutassuk meg, hogy az A és B tetszőleges halmazokra igaz az $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ egyenlőség.

129. Milyen esetekben igazak a következő egyenlőségek:

1. $A \cup B = A \cap B$; 2. $A \setminus B = B \setminus A$; 3. $A = A \cup B$;

4. $B = A \cap B$; 5. $A \cap B = A \setminus B$; 6. $A \times B = A \times C$.

130. Mondjunk példát olyan A , B és C halmazokra, melyekre

$$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C.$$

131. Bizonyítsuk be, hogy az $A \setminus B \setminus C$ művelet sor nem zárójellezhető tetszőlegesen, azaz nem minden esetben teljesül, hogy

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

132. Bizonyítsuk be, hogy az $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ egyenlőség azonosság.

133. Igazoljuk, hogy az $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$ halmaz a B halmazzal egyezik meg.

134. Adjunk meg olyan A , B és C nem üres halmazokat, melyekre

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

135. Legyen N a négyzetek halmaza, T a téglalapok, P pedig a paralelogrammák halmaza. Igaz-e, hogy

$$P \setminus (T \cup N) = P \setminus N, \text{ illetve } P \setminus T = P \setminus (T \cup N)?$$

136. Milyen feltételek teljesülése esetén igaz az A , B , C halmazra,

$$\text{hogy } A \setminus (B \cup C) = A \setminus B?$$

137. Legyen az alaphalmaz a valós számok halmaza $(\mathbf{R})$, és A , valamint B két olyan tetszőleges számhalmaz, melyek közös része nem üres. Fejezzük ki az $\overline{A \cap B}$ halmazt a különbség- és komplementképzés segítségével.

*138. Mutassuk meg, hogy az $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$ halmazok megadhatók az $\mathbf{R}$ alaphalmazzal és az A , illetve B halmazokkal végzett metszet- és komplementerképzés segítségével.

139. Az S síkot két egymást metsző kör lap négy tartományra osztja. A kör lapok pontjainak halmazát jelöljük A -val, illetve B -vel. Adjuk meg A , B és S segítségével a négy tartományt a komplementer- és unióképzést használva.

140. Bizonyítsuk be halmazelméleti megfontolásokkal az

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ és } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

úgynevezett de Morgan-féle azonosságokat.

141. Bizonyítsuk be az unió- és metszetképzés egymásra vonatkozó disztributív tulajdonságát, azaz mutassuk meg, hogy tetszőleges A , B , C halmazok esetén

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ és } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

142. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ esetén az $A \cap B$ és $A \cap C$ halmazok mindegyike az üres halmaz.

143. Győződjünk meg grafikus úton az

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ és az } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

azonosságok helyességéről.

*144. Mivel egyenlők az A és B halmazra vonatkozó alábbi kifejezések:

1. $A \setminus A$; 2. $A \setminus \emptyset$; 3. $\emptyset \setminus A$; 4. $A \cup \bar{A}$; 5. $A \cap \bar{A}$;
6. $(A \setminus B) \cap B$; 7. $A \cap \bar{B}$; 8. $(A \cup B) \cap \bar{A}$; 9. $(\bar{B} \setminus \bar{A}) \cup (A \cap B)$;
10. $(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$.

145. Igazoljuk a következő egyenlőségek helyességét:

1. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

146. Mutassuk meg, hogy az $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ halmaz az üres halmazzal egyezik meg.

147. Bizonyítsuk be, hogy egy adott halmaz összes részhalmazán értelmezett valamennyi halmazművelet korlátlanul és egyértelműen elvégezhető, ha alaphalmaznak az adott halmazt tekintjük.

5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel

148. Döntsük el, hogy a következő kijelentések igazak-e;

1. A prímszámok között van páros szám.
2. Ha egy pozitív egész számnak két pozitív osztója van, akkor az prímszám.
3. Ha a és b prímszám, akkor összegük is az.
4. Van olyan a és b prímszám, hogy $a + b$ is prímszám.
5. Minden pozitív egész számnak van prímosztója.
6. Ha egy pozitív egész számnak van prímosztója, akkor az összetett szám.
7. Ha egy pozitív egész számnak csak egy prímosztója van, akkor a szám prímszám.
8. Minden prímszámnak csak egy prímosztója van.
9. Nincs olyan összetett szám, melynek csak két pozitív osztója van.
10. Minden pozitív egész számnak legalább két prímosztója van.

149. Határozzuk meg a következő nyitott mondatok igazságalmazának három-három elemét, ha az alaphalmaz a természetes számok halmaza:

- a) $5x + 3 < 20$; b) $5x + 1$ páros szám;
- c) $5x + 1$ prímszám; d) $5x + 1$ négyzetszám;
- e) $5x + 1$ 4-gyel osztva 1 maradékot ad;
- f) $5x + 1$ -nek négy pozitív osztója van;
- g) $5x > x^2$; h) $x < 2$, vagy $x > 5$;
- i) x négyzetszám és x -nek három osztója van;
- j) az x szám páros szám, vagy négyzetszám, és az x szám nem osztható 4-gyel.

150. Tekintsük a következő ítéleteket:

- A: Az n szám hattal osztható; B: az n szám páros szám.
- C: Az n szám 12-re végződik; D: az n szám prímszám.
- E: Az n szám 4-gyel osztható; F: az n szám nem osztható 9-cel.
- G: Az n szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Írjuk le az előző ítéletekből a következő műveletekkel megfogalmazott új ítéleteket:

1. $A \rightarrow C$;
2. $\neg B \rightarrow D$;
3. $(B \wedge D) \rightarrow F$;
4. $(B \vee A) \rightarrow (A \wedge G)$;
5. $\neg D \leftrightarrow F$;
6. $(\neg G \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A$;
7. $(D \vee \neg D) \leftrightarrow (\neg A \wedge F)$;
8. $(E \wedge B) \rightarrow \neg D$.

151. Tegyük fel, hogy a **150.** feladatban szereplő A, B, C, D, E, F, G ítéletek logikai értéke mind megegyezik.

Határozzuk meg az 1., ..., 8. ítéletek logikai értékét mindkét esetben.

152. Függ-e az $A \wedge \neg A$; $A \vee \neg A$; $A \rightarrow \neg A$; $\neg A \rightarrow A$; $A \rightarrow A$; $A \leftrightarrow A$; $A \leftrightarrow \neg A$ ítéletek logikai értéke az A ítélet logikai értékétől?

153. Legyen p, q és r logikai változó. Jelöljük i -vel, illetve h -val az igaz, illetve hamis logikai értéket. Oldjuk meg p, q, r -re a következő egyenleteket:

1. $p \wedge q \wedge \neg r = i$;
2. $p \wedge \neg q \wedge \neg r = h$;
3. $(\neg p \vee q) \wedge \neg r = i$;
4. $(p \wedge q) \rightarrow r = h$;
5. $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r = h$;
6. $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q) = h$;
7. $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg r) = i$;
8. $[(p \wedge i) \vee (\neg p \wedge h)] \leftrightarrow (q \wedge r) = h$.

154. A konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia műveletek közül:

a) melyik nem kommutatív; b) melyik nem asszociatív?

155. Írjunk a $(p \ q) \ p$ logikai változókat jelölő betűk közé két olyan műveleti jelet, hogy az eredmény értéktáblázata a következő legyen:

p	q	$(p \ q) \ p$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	h

156. Fejezzük ki két logikai változó konjunkcióját a változókra alkalmazott negáció és diszjunkció segítségével.

157. Mutassuk meg, hogy a $p \rightarrow q = \neg(p \wedge q)$ egyenlőség azonos-ság.

158. Következik-e a $p \wedge q = i$ formulából, hogy $\neg p \vee q = i$?

159. Igaz-e, hogy $(p \rightarrow q) = h$ esetén $(p \wedge \neg q) = h$?

***160.** Mi mondható $p \rightarrow q = p \leftrightarrow q$ esetén a $q \rightarrow p$ művelet eredményéről?

161. Igazoljuk értéktáblázat segítségével az úgynevezett de Morgan-féle azonosságokat:

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q, \quad \text{valamint}$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

***162.** Legyen x tetszőleges természetes szám, $P(x)$; $Q(x)$; $R(x)$; $T(x)$ pedig rendre a P, Q, R, T ítéletekhez tartozó nyitott mondat: $2|x, 3|x, 4|x, 6|x$. Határozzuk meg $x=3, 4, 5, 6, 12, 24$ esetén a következő műveletek eredményét:

- a) $(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$;
- b) $(Q(x) \vee T(x)) \leftrightarrow (P(x) \vee R(x))$;
- c) $(Q(x) \wedge R(x)) \leftrightarrow (P(x) \wedge T(x))$;
- d) $(P(x) \vee R(x) \vee T(x)) \rightarrow Q(x)$.

163. A következő logikai egyenletek közül melyek azonosságok:

- a) $p \vee q = \neg p \wedge q$;
- b) $p \wedge i = p$;
- c) $p \vee q \vee i = i$;
- d) $p \wedge \neg q = \neg p \wedge q$;
- e) $\neg p \vee q = p \rightarrow q$;
- f) $\neg p \wedge q = p \leftrightarrow q$.

164. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok:

- a) $\neg p \wedge \neg q = \neg(p \rightarrow q)$;
- b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \leftrightarrow q$;
- c) $p \wedge \neg q = \neg(p \rightarrow q)$.

***165.** Jelölje $A(x)$ és $B(x)$ az A , illetve B ítéletekhez tartozó nyitott mondatokat, ahol x egy adott H alaphalmaz eleme. Legyen továbbá C_1 és C_2 az $A(x)$, illetve $B(x)$ nyitott mondat igazsághalmazai ($C_1, C_2 \subset H$). Ábrázoljuk Venn-diagrammal a következő nyitott mondatok igazsághalmazát:

- a) $A(x) \wedge B(x)$;
- b) $A(x) \vee B(x)$;
- c) $A(x) \rightarrow B(x)$;
- d) $A(x) \leftrightarrow B(x)$.

***166.** A **165.** feladat jelöléseit használva szemléltessük Venn-diagrammal, hogy az implikáció nem kommutatív művelet, azaz

$$A(x) \rightarrow B(x) \neq B(x) \rightarrow A(x)$$

x lehetséges értékeire.

167. Szemléltessük az $A(x)$ és $B(x)$ nyitott mondatok segítségével

képzett $\neg(A(x) \wedge B(x)) \wedge (\neg A(x) \wedge \neg B(x))$ nyitott mondat igazsághalmazát, ha $A(x)$ és $B(x)$ igazsághalmaza a C_1 , illetve C_2 halmaz.

*168. Mutassuk meg Venn-diagram segítségével a megfelelő nyitott mondatok igazsághalmazának ábrázolása útján, hogy $(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow C(x) \neq A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x))$, ha x az alaphalmaz tetszőleges eleme és az A, B, C ítéleteknek megfelelő nyitott mondatok igazsághalmaza D_1, D_2, D_3 .

169. Igazoljuk ábrázolás nélkül, hogy az $(A(x) \wedge \neg A(x)) \rightarrow (A(x) \wedge B(x))$ nyitott mondat igazsághalmaza az egész alaphalmaz.

170. $A(x), B(x), C(x), D(x)$ jelölje rendre a következő nyitott mondatokat: $2|x, 3|x, 4|x, 6|x$, ahol x az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 24\}$ alaphalmaz tetszőleges eleme lehet.

Határozzuk meg az $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x); B(x) \wedge C(x) \wedge D(x); C(x) \wedge D(x) \wedge A(x)$, illetve az $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$ nyitott mondatokhoz tartozó igazsághalmazokat.

*171. A 170. feladatban szereplő $A(x), B(x), C(x), D(x)$ nyitott mondatokból képzett újabb nyitott mondatok legyenek a következők:

a) $(A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)));$ b) $(\neg A(x) \vee C(x)) \wedge B(x);$
c) $(B(x) \wedge C(x)) \leftrightarrow (A(x) \wedge D(x));$ d) $(A(x) \vee C(x)) \rightarrow (B(x) \vee D(x)).$

Határozzuk meg az egyes esetekben a felírt nyitott mondatok igazsághalmazának elemszámát.

172. Legyen x a valós számhalmaz ($\mathbf{R}$) tetszőleges eleme. Jelölje $A(x), B(x)$ és $C(x)$ rendre a következő nyitott mondatokat: $x \leq 0; -2 \leq x \leq 4; x > 3$. Határozzuk meg az

$$(A(x) \wedge B(x)) \vee (B(x) \wedge C(x))$$

nyitott mondat igazsághalmazát.

6. Logikai függvények

173. Jelöljük A -val a következő ítéletet: Egy adott szám pozitív. Tekintsük az $A(x) : x > 0, x \in \mathbf{R}$ nyitott mondatot és képezzük az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{ha } A(x) \text{ hamis} \end{cases}$$

függvényt.

Rajzoljuk meg az $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonját.

174. Az $A(x), B(x), C(x), D(x)$ nyitott mondatok legyenek rendre a következők: $|x| \leq 1, 2x - 6 > 0, \sin x \leq 0, x^2 + x - 6 < 0$. Legyen mindegyik esetben $\mathbf{R}$ az alaphalmaz.

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{ha } A(x) \text{ hamis;} \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{ha } B(x) \text{ hamis;} \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } C(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{ha } C(x) \text{ hamis;} \end{cases} \quad d) l(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } D(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{ha } D(x) \text{ hamis.} \end{cases}$$

175. Legyen $A(x)$ és $B(x)$ a következő két nyitott mondat: $0 \leq x \leq 4$, illetve $-1 \leq x \leq 2$. Ábrázoljuk a következő logikai függvényeket:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \wedge B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \vee B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \rightarrow B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$d) l(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \leftrightarrow B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

(ahol az alaphalmaz minden esetben $\mathbf{R}$).

176. Az x szám racionális, legyen az $A(x)$ nyitott mondat és legyen $B(x) = \neg A(x)$. Ábrázoljuk a következő függvényeket.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \wedge B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \vee B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \leftrightarrow B \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Igaz-e, hogy $x \in \mathbf{R}$ esetén vannak a függvények között egyenlők?

177. Az $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ nyitott mondatok legyenek rendre a következők: $2|x$; $3|x$; $4|x$; $6|x$, ahol $x \in H$ és a H alaphalmaz azon pozitív egész számokból áll, melyekre $1 < x < 16$. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A(x) \wedge B(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } B(x) \wedge C(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } C(x) \wedge D(x) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (A(x) \vee D(x)) \wedge (C(x) \vee D(x)) \text{ igaz,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvényeket. Az egyes függvények zérushelyeiből álló halmazokat jelöljük rendre F , G , H , L -lel. Határozzuk meg a következő értékeket:

1. $|F \cap G \cap H|$; 2. $|G \cap H \cap L|$; 3. $|H \cap L \cap F|$;
4. $|L \cap F \cap G|$; 5. $|F \cap G \cap H \cap L|$; 6. $|F \cup G \cup H \cup L|$.

***178.** Tudjuk, hogy egy adott logikai függvény értéke konstans. Lehet-e az $\mathbf{R}$ alaphalmazon értelmezett adott függvény értékeit meghatározó nyitott mondat a következő:

- a) $x^2 \geq 0$; b) az x szám racionális;
- c) $x^2 - 2 < 0$; d) $x^2 + 1 \leq 0$;
- e) $x^2 - 5x + 6 = 0$; f) $x^2 - 3x + 5 \geq 0$;
- g) az $x \sin x$ kifejezés értéke nem 0;
- h) $\sin x \leq x$; i) $|\sin x| \leq |x|$;
- j) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} \in \mathbf{R}$; k) x racionális vagy irracionális;
- l) x nullánál nagyobb vagy kisebb;
- m) x egész szám vagy nem az; n) $x < 3$ és $x > 5$;
- o) ha $x = 2$, akkor $x^2 \geq 0$;
- p) x^2 akkor és csak akkor negatív, ha $x^2 + 2 < 0$;

- r) ha $|x - 1| < 0$, akkor $|x + 1| > 0$;
- s) $x < 3$ és $x > 5$, ugyanakkor $|x| \geq 0$;
- t) x vagy 2-nél kisebb, vagy 3-nál nagyobb, vagy 5-nél kisebb;
- u) ha x nem nagyobb 2-nél és prímszám, akkor $2 = x$.

7. Következtetések

E fejezetben belül a következő szóhasználatot élünk: a feltételeket premisszáknak, a következményt konklúzióknak nevezzük.

179. Tekintsük a következő két kijelentést:

1. Ha esik az eső, ernyőt viszek magammal.
2. Ma ernyőt vittem magammal.

Logikai következménye-e 1. és 2.-nak a következő állítás: Ma esett az eső.

180. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi következtetés nem helyes: premisszák: 1. Ha egy háromszög szabályos, akkor van 60° -os szöge.

2. Az ABC háromszögnek van 60° -os szöge,

konklúzió: Az ABC háromszög szabályos.

181. Ellenőrizzük értéktáblázattal, hogy helyes-e a következtetés: premisszák: 1. Ha egy szám páratlan, akkor prímszám.

2. Az n szám nem prímszám,

konklúzió: Az n szám nem páratlan szám.

***182.** Mutassuk meg általánosan, hogy ha a p és q ítéletekkel képzett premisszák $p \rightarrow q$, illetve $\neg q$, akkor e premisszák következménye a $\neg p$ konklúzió.

***183.** Igazoljuk, hogy a $p \rightarrow q$, illetve q premisszákból nem következik p .

184. Tudjuk, hogy ha Péter moziba megy, akkor másnap nem megy iskolába. Péter ma nem volt iskolában (holott tanuló). Péter azt híreszteli magáról, hogy ő egyáltalán nem jár moziba. Hihető-e Péter állítása?

185. Tetszőleges sokszögről tudjuk, hogy ha szabályos, akkor

van beírt köre. Az A sokszög szabályos. Igaz-e, hogy A szükségképpen érintősokszög?

***186.** Bizonyítsuk be általánosan, hogy q logikai következménye a $p \rightarrow q$ és p premisszáknak.

***187.** Tudjuk, hogy ha egy pozitív egésznek nem két darab osztója van, akkor nem prímszám. Az a pozitív egész prímszám. Helyes-e logikailag az a következtetés, hogy az a számnak két osztója van?

188. Igazoljuk, hogy helyes az alábbi következtetés:

Ha a b pozitív egész szám nem osztható kettővel, akkor prímszám. A b szám nem prímszám – ezt tudjuk.

Ezekből következik, hogy $2|b$.

189. Igazoljuk általánosan is a **188.** feladatban alkalmazott következtetési séma helyességét, azaz mutassuk meg, hogy $\frac{(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q}{p}$. Szavakban: a $(\neg p \rightarrow q)$ és $\neg q$ premisszák logikai

következménye p .

190. Tudjuk, hogy Panni szőke vagy barna, továbbá azt is, hogy Panni kékszemű. Ha valaki kékszemű, akkor a haja színe nem lehet sem barna, sem fekete. Igaz-e, hogy Panni szőke hajú?

***191.** Jelöljük a **190.** feladatban szereplő nyelvi formákat a következő módon;

a : valaki szőke, b : valaki barna, c : valaki fekete,

d : valaki kékszemű, e : Panni valaki.

Írjuk fel az előző feladat következtetési sémáját az a, b, c, d, e betűk és a megfelelő logikai jelek segítségével.

***192.** Döntsük el, hogy helyes-e az alábbi következtetésforma:

$$\frac{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge s)}{p \wedge q}$$

193. Az alábbi következtetésformák közül melyek helyesek:

1. $\frac{(p \vee q) \wedge \neg p}{q}$; 2. $\frac{p \wedge q}{p \vee q}$; 3. $\frac{p}{p \vee q}$; 4. $\frac{p \wedge \neg q}{\neg p \vee q}$;
5. $\frac{(p \leftrightarrow q) \wedge p}{q}$; 6. $\frac{(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q}{p \vee q}$; 7. $\frac{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}{p \rightarrow q}$;
8. $\frac{(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)}{p}$.

194. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{p \rightarrow q}{\neg(p \wedge \neg q)}$ következtetésforma meg-

fordítható, azaz helyes a $\frac{\neg(p \wedge \neg q)}{p \rightarrow q}$ következtetésforma is.

***195.** Milyen konklúzióra juthatunk a következő premisszákból:

a) p és $p \wedge q$; b) $\neg p \vee q$ és $p \vee \neg q$;

c) $\neg p$ és $p \rightarrow q$; d) $p \wedge q$ és $p \vee \neg q$?

196. Vizsgáljuk meg, hogy helyes-e az alábbi következtetés: Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor vannak egyenlő szögei. Az ABC háromszögnek azonban nincsenek egyenlő szögei.

Tehát ez a háromszög nem egyenlő szárú.

197. Formalizáljuk a **196.** feladat következtetését és írjuk fel a következtetésforma megfordítását. Helyes következtetéshez jutunk-e így?

***198.** Antal, Béla és Csaba is az iskolából hazaérve otthon azt mesélte, hogy ma ötöst kapott. Béla még azt is mondta, hogy Antallal együtt kapta az ötöst. Az „ügyről” a következőket tudjuk biztosan: van olyan tanuló, aki igazat mondott, és ha Antal ötöst kapott, akkor Béla nem; ha Béla kapott ötöst, akkor Csaba nem kapott, és ha Csaba kapott ötöst, akkor Antal nem kapott.

a) Hány tanuló kapott ötöst?

b) Melyik tanuló nem mondott biztosan igazat?

c) Hány tanuló mondott igazat egyáltalán?

II. SZÁMELMÉLET ÉS ARITMETIKA

II.

1. Természetes számok

1. Írjuk fel a három darab

a) kettes; b) hármas; c) ötös
segítségével megalkotható legnagyobb természetes számot.

2. Hány jegyű szám a $10^{10^{10}}$?

3. Legalább hány számjegyből áll a 2^{1000} ? (Igyekezzünk minél jobb becslést adni!)

4. Hány számjegy kell az 1–1986-ig terjedő természetes számok leírásához?

5. 1-től a természetes számokat egymás után írjuk a következőképpen: 1234...91011... Milyen számjegy áll az 1986-odik helyen?

6. Fel lehet-e bontani két egymás után következő természetes szám szorzatára a 12; 1122; 111222; $\underbrace{11\dots122\dots2}_{n \text{ db } n \text{ db}}$; $n \in \mathbb{N}$ számokat?

Ha igen, hogyan.

7. Soroljuk fel az összes olyan számjegyet, amelyre két egymás után következő természetes szám szorzata végződhet.

8. Bizonyítsuk be, hogy

a) $4n^2 + 1$; b) $3n^3 + 2n^2 + n + 1$

egyetlen n természetes szám esetén sem lesz két egymást követő természetes szám szorzata.

9. Igaz-e, hogy ha $n > 1$ páratlan természetes szám, akkor $\frac{n^2 - 1}{4}$

két egymás után következő természetes szám szorzataként előállítható?

10. Igaz-e, hogy $\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4}$ minden n természetes szám

esetén két egymást követő természetes szám szorzata?