II. SZÁMELMÉLET ÉS ARITMETIKA

1. Természetes számok

1. Írjuk fel a három darab
a) kettes; *b)* hármas; *c)* ötös
segítségével megalkotható legnagyobb természetes számot.

2. Hány jegyű szám a $10^{10^{10}}$?

3. Legalább hány számjegyből áll a 2^{1000}? (Igyekezzünk minél jobb becslést adni!)

4. Hány számjegy kell az 1–1986-ig terjedő természetes számok leírásához?

5. 1-től a természetes számokat egymás után írjuk a következőképpen: 1234...91011... . Milyen számjegy áll az 1986-odik helyen?

6. Fel lehet-e bontani két egymás után következő természetes szám szorzatára a 12; 1122; 111222; $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ db}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ db}}$; $n \in \mathbf{N}$ számokat?
Ha igen, hogyan.

7. Soroljuk fel az összes olyan számjegyet, amelyre két egymás után következő természetes szám szorzata végződhet.

8. Bizonyítsuk be, hogy
a) $4n^2+1$; *b)* $3n^3+2n^2+n+1$
egyetlen n természetes szám esetén sem lesz két egymást követő természetes szám szorzata.

9. Igaz-e, hogy ha $n>1$ páratlan természetes szám, akkor $\frac{n^2-1}{4}$ két egymás után következő természetes szám szorzataként előállítható?

10. Igaz-e, hogy $\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{4}$ minden n természetes szám esetén két egymást követő természetes szám szorzata?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a két egymást követő természetes szám szorzata, akkor $9a+2$ is két egymást követő természetes szám szorzata.

12. Hány 1000-nél kisebb pozitív egész szám létezik, amelyik osztható 93-mal?

13. Hány olyan legfeljebb 3-jegyű pozitív egész szám van, amelyik nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel?

14. Határozzuk meg 7-nek azt a legmagasabb hatványát, amelylyel az 1-től 1000-ig terjedő természetes számok szorzata osztható.

15. Hány 0-ra végződik az 1000!?

***16.** Tetszőleges, 1000-nél kisebb p prímszám az 1000!-ban hányadik hatványon fordul elő?

17. Adott négy sorozat az általános tagjával:

$$a_n = [n]+1;\ b_n = \left[\frac{n}{2}\right];\ c_n = \left[\frac{n+1}{2}\right];\ d_n = \left[\frac{n-1}{2}\right],\ \text{ahol } n \in \mathbf{N}.$$

Ezek közül melyik a 0; 1; 1; 2; 2; 3; 3; ...; n; n; ... sorozat? (A [ ] egészrészt jelöl.)

18. Milyen valós x számra teljesül, hogy

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right] = x?$$ (A [ ] egészrészt jelöl.)

19. Végezzük el a következő szorzásokat és számítsuk ki a szorzat számjegyeinek összegét:

$12 \cdot 99$;	$132 \cdot 99$;	$1637 \cdot 99$;
$12 \cdot 999$;	$132 \cdot 999$;	$1637 \cdot 999$;
$12 \cdot 9999$;	$132 \cdot 9999$;	$1637 \cdot 9999$;
$12 \cdot 99999$;	$132 \cdot 99999$;	$1637 \cdot 99999$.

Mit figyelhetünk meg?

***20.** Mutassuk meg: bármely a természetes számhoz végtelen sok olyan 0-t nem tartalmazó b természetes szám található, hogy b és ab számjegyeinek összege megegyezik. (a és b tízes számrendszerbeli számok.)

21. Határozzuk meg azt a legkisebb 1-gyel kezdődő természetes számot, amely olyan tulajdonságú, hogy ha az elejéről kitöröljük az

1-est és beírjuk a végére, akkor az így kapott szám az eredetinek háromszorosa lesz.

22. Felírjuk egy papírra az 1; 2; 3; ...; 1986 számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörölünk, és helyettük a különbségüket írjuk fel. Ezt a műveletet addig ismételjük, amíg csak egyetlen 0-tól különböző szám marad. Igaz-e, hogy ez a szám páratlan?

23. Határozzuk meg, milyen számjegyek állnak a pontok helyén a következő szorzásban:

a)

$$\begin{array}{r} \ldots \cdot \ldots \\ \hline .0.. \\ \ldots 5 \\ \hline .1.. \\ \hline \ldots\ldots 8 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} ..5 \cdot 6.. \\ \hline .... \\ \ldots 0 \\ \hline \ldots \\ \hline \ldots 25 \end{array}$$

24. Keressük meg az összes olyan n természetes számot, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek szorzata $n^2-10n-22$.

25. Találomra megadunk 1988 egész számot, amelyek összegének abszolútértéke 1. Kiválaszthatunk-e közülük néhány számot úgy, hogy a kiválasztott számok összege egyenlő legyen a ki nem választott számok összegével?

26. Keressük meg azt a tízes számrendszerben felírt legnagyobb háromjegyű páros számot, amelyik nem változik meg, ha felcseréljük az egyesek és százasok helyén álló számjegyeit.

27. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyik nem változik, ha az egyesek és százasok helyén álló számjegyeket felcseréljük? Van-e közöttük négyzetszám?

28. Egy 16×16-os „sakktábla" lefedhető-e 2×1-es dominóval úgy, hogy a bal alsó és a jobb felső sarok fedetlen maradjon?

29. Hány gyermeke van, és milyen idősek? Ezt kérdezte Péter bácsitól vendége, egy okos matematikus. Három fiam van – mondta Péter bácsi –, életkoruk szorzata 72, összege pedig a házszám. A vendég, aki ismerte a házszámot, kis gondolkodás után azt mondta, hogy ebből még nem tudhatja a választ. Igen, mondta Péter bácsi, remélem, hogy legidősebb fiam majd megnyeri a Kürschák versenyt. Ekkor a matematikus megmondta a gyermekek életkorát. Hogyan találta ki?

30. Két ember születési évét meg tudjuk-e határozni a következő adatokból: tudjuk, hogy mindketten ebben a században születtek, mindkettő évszáma ugyanazokból a számjegyekből áll, a két ember között a korkülönbség 9 év?

31. Egy körvonalon 44 fa helyezkedik el. Mindegyik fán ül egy majom. Adott jelre valamelyik két majom átugrik a szomszéd fára, egyik az óramutató járásával azonos, a másik az óramutató járásával ellentétes irányba. Ilyen ugrásokkal elérhető-e, hogy minden majom ugyanazon a fán legyen?

32. Egy autó rendszáma a következő két kétjegyű számból áll: 90–91. Ha az első kétjegyű számhoz a második számjegyeinek összegét hozzáadjuk, 100-at kapunk, ha a második kétjegyű számhoz az első számjegyeinek összegét adjuk, ugyancsak 100-at kapunk. Hány ilyen kétjegyű számpár van? Határozzuk meg mindegyiket.

33. Egy természetes szám harmadik hatványa olyan hatjegyű természetes szám, melynek első számjegye 2, utolsó 5. Melyik ez a szám?

34. Tudjuk, hogy a 121 teljes négyzet. Igaz-e, hogy 10 201, 1 002 001, 100 020 001 is teljes négyzet? Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

35. Bizonyítsuk be, hogy ha az 1331 szám számjegyei közé mindenütt ugyanannyi nullát írunk, akkor teljes köbszámot kapunk.

36. Lehet-e négyzetszám az az egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában 510 db 1-es és valahány 0 szerepel?

37. Írjuk fel azt a 7-jegyű négyzetszámot, amelynek számjegyei az 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8 számok, valamilyen sorrendben.

38. Van-e olyan négyzetszám, amelynek számjegyei a 0; 2; 3; 5 számok, valamilyen sorrendben?

39. Tudjuk, hogy

$$9^2 = 81;$$
$$99^2 = 9801;$$
$$999^2 = 998001;$$
$$9999^2 = 99980001.$$

Igaz-e, hogy $A = \underbrace{99\ldots9}_{n\text{ db}}\underbrace{8000\ldots01}_{n\text{ db}}$ szám négyzetszám? ($n \in \mathbf{N}^+$)

40. Keressünk olyan *abcde* ötjegyű természetes számot, hogy $\overline{ab}$; $\overline{bc}$; $\overline{cd}$; $\overline{de}$ természetes szám négyzete legyen!

41. Határozzuk meg azt a tízes számrendszerbeli $\overline{xyxyxz}$ alakú négyzetszámot, amely páros, és amelyben x; y; z egymást követő számjegyek ($x < y < z$).

42. A tízes számrendszerben $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű számok között van-e négyzetszám?

43. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely természetes szám négyzete 6-ra végződik, akkor a tízesek helyén páratlan szám áll.

44. Igaz-e, hogy a nem 6-ra végződő természetes számok négyzetében a tízesek helyén páros szám áll? Az állításunkat bizonyítsuk!

45. Bizonyítsuk be, hogy a legalább kétjegyű teljes négyzetek legalább két különböző számjegyet tartalmaznak.

***46.** Egy egész szám négyzete négy egyenlő számjegyre végződik. Melyik lehet ez a számjegy?

47. Adott egy poliéder, amelynek minden lapja háromszög. A poliéder csúcsait négy szín valamelyikére színezzük. Bizonyítsuk be, hogy azon oldallapok száma, amelyeknek csúcsai különböző színűre vannak festve, páros.

48. Milyen számjegyre végződik az $1+2+3+\ldots+n$ szám $n \in \mathbf{N}$, ha az $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ szám 1-re végződik?

49. Határozzuk meg az $N = 7+7^2+7^3+7^4+\ldots+7^{4n}$ szám utolsó két számjegyét (n pozitív egész szám).

50. Mutassuk meg, hogy minden szám ötödik hatványában az utolsó számjegy megegyezik az eredeti szám utolsó számjegyével.

51. Bizonyítsuk be, hogy az a természetes szám és az a^{4n+1} $n \in \mathbf{N}$ utolsó számjegye megegyezik.

52. Mi lesz az utolsó két számjegye a 2^{1990} számnak?

53. Mutassuk meg, hogy 10 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa előállítható két négyzetszám összegeként.

54. Adottak a következő számok:

$A = 1+2^{1987}+3^{1987}+\ldots+n^{1987}$;

$B = 1987+1987^2+1987^3+\ldots+1987^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Az $A+B$ összeg páros vagy páratlan szám?

2. Oszthatóság az egész számok halmazában

55. Döntsük el, hogy a következő számok közül melyik melyiknek osztója:

2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 24; 32; 128; 256; 342; 4032; 5472.

56. Igaz-e, hogy minden páros szám kifejezhető a következő formában:

a) $2k+4$; *b)* $4m+2$; *c)* $8m-1$;
d) $2-2l$; *e)* n^2+4; *f)* $6n+2$,

ahol k, l, m, n egész számok.

57. Igaz-e, hogy minden páratlan szám kifejezhető a következő formában:

a) $2k-1$; *b)* $2l+7$; *c)* $4n+1$;
d) $2k-9$; *e)* $2n^2+2n-1$; *f)* $2l^2+3$,

ahol k, l, m, n egész számok.

58. Legyen a, b pozitív egész szám, akkor a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Ha $a+b$ páros, akkor a és b páros.
B: Ha $a+b$ páros, akkor a vagy b páros.
C: Ha $a+b$ páros, akkor a vagy b páratlan.
D: Ha $a+b$ páratlan, akkor a vagy b páros.
E: Ha $a \cdot b$ páros, akkor a és b páros.
F: Ha $a \cdot b$ páros, akkor a vagy b páros.

59. Legyen a és b pozitív egész szám, akkor a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A: Létezik olyan a szám, hogy bármely b számra $a>b$.
B: Bármely b-hez létezik a úgy, hogy $a>b$.
C: Bármely b-hez létezik $a>1$, $a \neq b$ szám úgy, hogy a osztója b-nek.
D: Létezik olyan a, hogy $\frac{a+2}{a+1}$ természetes szám.

60. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója az a és b számoknak, akkor osztója az összegüknek, különbségüknek is. Igaz-e az állítás megfordítása?

61. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója két egész szám összegének és az egyik számnak, akkor osztója kell legyen a másik számnak is.

62. Mutassuk meg, hogy ha egy c egész szám osztója egy a egész számnak, akkor a minden többszörösének is osztója. Igaz-e az állítás megfordítása?

63. Bizonyítsuk be, hogy ha a páratlan egész szám, akkor a osztója $2b$-ből, a osztója b következik.

64. Bizonyítsuk be, hogy ha egy c páratlan egész szám osztója a és b egész számok összegének és különbségének, akkor c osztója a-nak is és b-nek is.

65. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a+9b$ osztható 17-tel, akkor $33a+89b$ is osztható 17-tel.

66. Négy különböző egész szám összege osztható 4-gyel. Lehet-e, hogy közülük

a) egyik sem osztható 4-gyel;
b) egyik osztható 4-gyel a másik három nem;
c) kettő osztható 4-gyel, kettő nem;
d) három osztható 4-gyel, egy nem;
e) mindegyik osztható 4-gyel?

67. Igaz-e, hogy ha két szám mindegyike 3-mal osztva 1-et ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk 3-mal osztva ugyancsak 1-et ad maradékul?

68. Igaz-e, hogy ha két szám mindegyike 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk is 2-t ad maradékul 3-mal osztva?

69. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b 3-mal nem osztható egész számok, akkor az összegük vagy a különbségük 3-nak többszöröse.

70. Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

71. Bizonyítsuk be, hogy ha a 5-tel nem osztható egész szám, akkor a^2+1 vagy a^2-1 osztható 5-tel.

72. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

73. Valamely természetes szám 7-tel osztva 3-at ad maradékul. Lehet-e ez a szám négyzetszám?

74. Van-e olyan négyzetszám, amely 8-cal osztva 3-at ad maradékul?

75. A 6-tal osztva maradékul 2-t adó számok között van-e négyzetszám?

76. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzetszámok
a) 3-mal; *b)* 4-gyel; *c)* 5-tel
osztva milyen maradékot adnak.

77. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

78. Igaz-e, hogy bármely egész szám négyzetének 12-es maradéka négyzetszám?

79. Melyek azok a kétjegyű A számok, melyekre a következő négy állítás közül kettő igaz, kettő hamis?
1. A osztható 5-tel; 2. A osztható 23-mal;
3. $A+7$ teljes négyzet; 4. $A-10$ teljes négyzet.

Prímszám, összetett szám

80. Állapítsuk meg, hogy a következő számok közül melyek prímszámok, melyek összetett számok:

12; 17; 121; 203; 217: 251; 329; 348; 713; 757; 943; 991.

81. Adott 4 darab 10-nél nagyobb szomszédos természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább kettő összetett szám. Mondhatnánk-e kettő helyett hármat? Igaz-e, hogy legfeljebb három lehet közülük összetett szám?

82. Adott 12 darab 100-nál nagyobb szomszédos egész szám. Bizonyítsuk be, hogy közülük legalább nyolc összetett szám.

83. Hány összetett szám következik egymás után 182-től 190-ig?

84. Keressünk 11 egymás után következő összetett számot.

85. Prímszám-e
a) az idei naptári év;
b) az olvasó születési éve?

86. Az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot úgy, hogy minden számjegyet felhasználjunk, de mindegyiket csak egyszer.

87. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a; $a+4$; $a+14$ számok prímszámok legyenek.

88. Adjuk meg mindazokat a p prímszámokat, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prímszám.

89. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2+1$ is prímszám.

90. Valaki kipróbálta, hogy n^2+n+41, $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$-ra prímszám. Most azt állítja, hogy n^2+n+41 minden természetes számra prímszám. Igaza van-e?

91. Bizonyítsuk be, hogy ha 2^n-1 prímszám, $n \in \mathbf{N}$, akkor n is prímszám. Igaz-e az állítás megfordítása?

92. Legyen a p prímszám, és $p-1$ négyzetmentes (azaz nincsen négyzetszám osztója). Határozzuk meg, hogy a p 4-gyel osztva milyen maradékot ad.

93. Mutassuk meg, hogy egy 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul.

94. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges prímszámot 30-cal osztva a maradék vagy prímszám, vagy 1.

95. Ikerprímszámoknak nevezzük azokat a prímszámokat, amelyek szomszédos páratlan számok. Keressünk ilyen prímszámokat.

96. Bizonyítsuk be, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel.

97. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

98. Lehet-e egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma három olyan egész szám, amelyek közül a két kisebb ikerprímszám?

***99.** Legyen az a és b természetes szám. Mutassuk meg, hogy ha $\frac{a^3+b^3}{2}$ prímszám, akkor $3a^2-6a+4$ és $3b^2-6b+4$ is az.

100. Az 1; 2;...; 100 számok két csoportra oszthatók-e úgy, hogy minden számot valamelyik csoportba teszünk, a két csoportnak nincs közös eleme, és az egy-egy csoportban levő számok szorzata megegyezik?

***101.** Legyen p valamely prímszám, M pedig p darab egymás után következő természetes szám halmaza. Fel lehet-e bontani M-et két M_1 és M_2 halmazra úgy, hogy $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, és az

M_1-ben levő számok szorzata egyenlő legyen az M_2-ben levő számok szorzatával?

102. Határozzuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a^4+4 prímszám.

103. Legyen p és q két ikerprímszám. Mutassuk meg, hogy ha $2a = p+q$, akkor a összetett szám.

104. Igazoljuk, hogy $1999^{2000}+24$ összetett szám.

Összetett számok prímtényezőkre bontása

105. Bontsuk fel prímszámok szorzatára a következő számokat:

a) 6912; *b)* 476; *c)* 348; *d)* 441;
e) 1840; *f)* 2184; *g)* 3400; *h)* 4550;
i) 7875; *j)* 7623; *k)* 8505; *l)* 16865.

106. A páros számok közül tekintsük azokat, amelyek nem írhatók fel két páros szám szorzataként, például 10, 18, 22 stb. Az ilyen számokat „páros prímeknek" nevezzük. Igaz-e, hogy minden páros szám, amelyik nem páros prím, felbontható páros prímek szorzatára? Egyértelmű ez a felbontás?

107. Írjuk fel a 60, 360, 800, 640, 540 számok összes „páros prímtényezős" felbontását.

108. Határozzuk meg a következő számok összes osztóját:

a) 240; *b)* 1024; *c)* 161; *d)* 997; *e)* 1800;
f) 5704; *g)* 10428; *h)* 18612; *i)* 6045; *j)* 6867.

109. Hogyan lehet a prímtényezős felbontásból megállapítani, hogy egy egész szám

a) páros-e vagy páratlan;
b) osztható-e 4-gyel vagy 8-cal;
c) négyzetszám-e?

110. Igaz-e, hogy ha egy szám osztója a^2-nek, akkor osztója a-nak is ($a \in \mathbf{N}$)?

111. Igaz-e, hogy ha egy szám osztója a^n-nek, akkor osztója a-nak is (a; $n \in \mathbf{N}$)?

112. Határozzuk meg azt az *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5 legkisebb egymás után következő pozitív egész számot, amelyek összege teljes négyzet és egyben teljes harmadik hatvány.

113. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív n számot, amelyre $\frac{n}{2}$ teljes négyzet, $\frac{n}{3}$ teljes köb, $\frac{n}{5}$ teljes ötödik hatvány.

114. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{abcd}$ és $\overline{dcba}$ négyjegyű számok összegének négyzete 121 többszöröse.

115. Hány olyan egész szám van 1000 és 2000 között, amely kettőn és ötön kívül más prímszámmal nem osztható?

***116.** A $(n+1)\,(n+2)\ldots 2n$ szorzat prímtényezős felbontásában a kettes hányadik hatványon szerepel?

***117.** Mutassuk meg, hogy az $A = \sqrt{22\underbrace{99\ldots9}_{(k-2)\text{ db}}\underbrace{00\ldots09}_{k\text{ db}}}+3$, ha $k \geqq 2$ számnak a prímtényezői 2; 3; 5.

118. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám osztója két egész szám szorzatának és a szorzat egyik tényezőjéhez relatív prím, akkor a szám osztója a másik tényezőnek.

119. Írjunk fel egy négyjegyű számot a tízes számrendszerben és írjuk mellé ugyanezt a számot. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott 8-jegyű szám osztható 73-mal és 137-tel.

Oszthatósági szabályok

120. Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye páros; akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.

121. Mennyi

a) 2563-nak a 100-zal való osztási maradéka;
b) 13 625-nek az 1000-rel való osztási maradéka;
c) $10a+b$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
d) $100a+10b+c$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
e) $1000a+100b+10c+d$-nek az 1000-rel való osztási maradéka;
f) $100a+10b+c$-nek a 100-zal való osztási maradéka;
g) $1000a+100b+10c+d$-nek a 10-zel való osztási maradéka;
h) $1000a+100b+10c+d$-nek a 100-zal való osztási maradéka (ahol a, b, c számjegyek)?

122. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a tízes számrendszerben a 4-gyel, 25-tel, 8-cal, 125-tel való oszthatóság szabályát.

123. Határozzuk meg a következő számok 9-cel való osztási maradékát:

234; 512; 106; 113; 240; 4132; 9503; 3426.

Adjuk össze a számok számjegyeit, és azok 9-cel való osztási maradékát is állapítsuk meg. Mit figyelhetünk meg? Hogyan általánosíthatunk? Állapítsuk meg és bizonyítsuk be egy tízes számrendszerbeli szám 9-cel való oszthatóságának szabályát.

124. Válaszoljunk a következő kérdésekre:

a) Ha egy szám 9-nek többszöröse, többszöröse-e 3-nak?

b) Ha egy szám 9-cel osztható, osztható-e 3-mal?

c) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 0, osztható-e 3-mal?

d) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 0, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

e) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 1, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

f) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 2, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

g) Ha egy szám 9-cel való osztási maradéka 3, mennyi a 3-mal való osztási maradéka?

h) Mennyi a következő számok 9-cel és 3-mal való osztási maradéka:

279; 280; 281; 282; 283; 284; 285; 286; 287; 288?

i) Ha egy szám 3-mal való osztási maradéka 0, mennyi a 9-cel való osztási maradéka? Fogalmazzuk meg a 3-mal való oszthatóság szabályát a tízes számrendszerben.

125. Melyik az a 3-mal osztható 3-jegyű páros szám, amelynek középső számjegye 0, az első számjegye pedig az utolsónál 1-gyel kisebb?

126. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal. Mondjuk ki az állítás megfordítását és igazoljuk.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szám osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel. Igaz-e az állítás megfordítása?

***128.** Keressünk a tízes számrendszerben a 11-gyel való oszthatóságra szabályt.

129. Mikor osztható egy tízes számrendszerbeli szám 37-tel?

130. Bizonyítsuk be, hogy a $37^{37}-23^{23}$ szám osztható 10-zel.

131. Hány 8-cal osztható tízes számrendszerbeli $\overline{3xyz136}$ alakú szám van?

132. Keressük meg az összes $\overline{2yz}$ alakú tízes számrendszerbeli 6-tal osztható háromjegyű számot.

133. Osztható-e az a szám 9-cel, amelyről tudjuk, hogy számjegyeinek összege nem változik, ha a számot 5-tel megszorozzuk?

134. Lehet-e a 9-cel való oszthatóság szabálya az, hogy 9-cel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha számjegyeinek összege nem változik meg, amikor 5-tel megszorozzuk a számot?

135. Mutassuk meg, hogy ha az $\overline{abc}$ háromjegyű természetes szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ háromjegyű számok is oszthatók 37-tel.

136. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész szám esetén $A = 10^n+98$ szám osztható 18-cal.

137. Igazoljuk, hogy ha két egész szám összege osztható 10-zel, akkor a számok négyzetei ugyanarra a számjegyre végződnek.

138. Melyik az a tízes számrendszerbeli legkisebb négyzetszám, amelyik 14-re végződik?

139. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{10^{4n-1}+2}{3}+\dfrac{10^{3n-3}+2^3}{9}$ egész szám.

Oszthatósági feladatok

140. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal.

141. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata osztható 24-gyel.

142. Melyik az a legnagyobb szám, amellyel bármely öt egymás után következő természetes szám szorzata osztható?

143. Bizonyítsuk be, hogy két egymás utáni páros szám szorzata osztható 8-cal.

144. Melyik az a legnagyobb szám, amellyel bármely három egymást követő páros szám szorzata osztható?

145. Hány egymást követő természetes számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat biztosan osztható legyen 567-tel?

146. Bizonyítsuk be, hogy

a) 15 osztója $2^{16}-1$-nek;

b) 17 osztója $2^{16}-1$-nek;

c) 6 osztója 17^n-11^n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

d) 9 osztója 100^n-1-nek, $n \in \mathbf{N}$;

e) 11 osztója 100^n-1-nek, $n \in \mathbf{N}$;

f) 15 osztója $2^{4n}-1$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

g) 5 osztója $4 \cdot 6^n+5^n-4$-nek, ha $n \geqq 1$, $n \in \mathbf{N}$;

h) 8 osztója $3^{2n}+7$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

i) 2 osztója n^2-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

j) 2 osztója a^n+a-nak, ahol $a; n \in \mathbf{N}^+$;

k) 24 osztója n^3+23n-nek, ha n 8-cal osztható természetes szám;

l) 4 osztója $n^4-2n^3+n^2$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

m) 3 osztója n^3+2n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

n) 5 osztója n^5-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

o) 30 osztója n^5-n-nek, $n \in \mathbf{N}$;

p) 57 osztója $7^{n+2}+7^{n+1}+7^n$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

r) 1986 osztója $1985^{1985}+1988-1987^{1987}$-nek;

s) $100\ldots01$ (1984 darab 0) osztható 100001-gyel;

t) 7 osztója $3^{2n+1}+2^{n+2}$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

u) 3 osztója $2 \cdot 7^n+1$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

v) 99 osztója $3^{n+3} \cdot 2^{2n+2}-108$-nak, $n \in \mathbf{N}$;

w) 360 osztója $n^6-5n^4+4n^2$-nek, $n \in \mathbf{N}$;

x) 37 osztója $1+2^{19}+3^{19}+\ldots+36^{19}$-nek;

y) $2a+1$ osztója $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+\ldots+(2a)^{2n+1}$-nek, $a; n \in \mathbf{N}$;

z) 27 osztója $10^n+18n-1$-nek, $n \in \mathbf{N}$.

147. Lehet-e 46 darab egymást követő természetes szám összege 46-tal osztható?

148. Milyen n esetén lesz n darab egymást követő természetes szám összege osztható n-nel?

149. 11 darab, egyenként 1; 2; 3; 4; ...; 11 kg súlyú csomagot lehet-e három egyenlő súlyú részre bontani?

***150.** Általánosítsuk az előző feladatot. Adott n darab tárgy, melyek súlya 1; 2; ...; n egység. Milyen n esetében tudjuk három egyenlő súlyú részre bontani ezeket?

151. Milyen n természetes szám esetén lesz

a) 9 osztója 11^n+7^n-nek;

b) 16 osztója 17^n+n-nek;

c) 120 osztója $n^6+2n^5-n^2-2n$-nek;

d) $\dfrac{64^n+16 \cdot 8^n+63}{8^{n+1}+56}$ egész szám;

e) 3 osztója $2n^3+2n^2+1$-nek;

f) 6 osztója $1^n+2^n+3^n$-nek;

g) 48 osztója n^3+3n^2-n-3-nak;

h) 121 osztója n^2+3n+5-nek?

***152.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges páratlan n természetes szám esetén $1+2+3+\ldots+a$ osztója $1^n+2^n+3^n+\ldots+a^n$-nek.

153. Van-e olyan n és $k \in \mathbf{N}^+$, hogy 5^k-1 osztója 5^n+1-nek?

***154.** Ha $A = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ nem osztható 5-tel, akkor mennyi a $B = 1+2+\ldots+n$ szám 5-tel való osztási maradéka?

155. Bizonyítsuk be, hogy

a) $5^{20}-1$ osztható 24-gyel;

b) $3^{105}+4^{105}$ osztható 181-gyel;

c) $2^{60}+7^{30}$ osztható 13-mal.

156. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqq 1$ természetes számra

a) 6 osztója n^3+5n-nek;

b) 6 osztója n^3+11n-nek;

c) 9 osztója 7^n+3n-1-nek;

d) 81 osztója $10^n \cdot (9n-1)+1$-nek;

e) 64 osztója $3^{2n+2}-8n-9$-nek;

f) 21 osztója $5^{2n+1}+4^{n+2}$-nek;

g) 13 osztója $4^{2n+1}+3^{n+2}$-nek;

h) 11 osztója $3^{2n+2}+2^{6n+1}$-nek;

i) 19 osztója $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1}+3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$-nek.

157. Milyen n egész számra lesz

a) $\dfrac{3n-9}{n+3}$ egész szám?

b) $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$ egész szám?

158. Milyen n természetes szám esetén lesz $\frac{n^2+14n+40}{n^2+10n+24}$ természetes szám?

159. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges páros n természetes számra

a) 48 osztója n^3+20n-nek;

b) 323 osztója $20^n+16^n-3^n-1$-nek.

160. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a természetes szám esetén a^7-a osztható 42-vel.

161. Mutassuk meg, hogy

a) 2-nek; *b)* 3-nak; *c)* 4-nek; *d)* 5-nek; *e)* 1986-nak van olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll.

***162.** Igaz-e, hogy bármely n természetes számnak van olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll?

***163.** Van-e olyan 1986-ra végződő egész szám, amelyik osztható 67-tel?

***164.** Az 1; 2; 3; ...; 300 számok közül válasszunk ki tetszőlegesen 151 darabot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig található kettő, melyek között az egyik osztója a másiknak.

165. Igazoljuk, hogy bármely 200-jegyű számhoz található olyan 1986-tal osztható szám, amelynek első 200 számjegye az eredeti szám.

***166.** Mutassuk meg, hogy bármely a páratlan természetes számhoz található olyan b természetes szám, hogy 2^b-1 osztható a-val.

***167.** Mutassuk meg, hogy bármely n; a; b természetes számhoz, ahol $(a; b) = 1$, találhatók olyan x; y egész számok, hogy $n = ax+by$ fennáll.

168. Valaki azt állítja, hogy bárhogy is adunk meg nyolc darab háromjegyű számot, mindig kiválasztható közülük kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott hatjegyű szám 7-tel osztható. Igaza van?

169. Mutassuk meg, hogy ha n és $k>1$ pozitív egész számok, akkor $3^{n^k}+1$ nem osztható 5-tel.

170. Mutassuk meg, hogy különböző a; b; c számjegyekkel felírható összes háromjegyű szám összege osztható $a+b+c$-vel. (Minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel.)

171. Keressünk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy n darab páratlan egész szám négyzetének összege 8-cal osztható legyen.

***172.** Bizonyítsuk be, hogy különböző prímszámok reciprokainak összege nem lehet egész szám, sem egy egész szám reciproka.

173. Írjunk fel olyan egész együtthatós $p(x)$ polinomot, melyre $p(7) = 17$ és $p(11) = 19$.

174. Van-e olyan nem egész együtthatós polinom, amely minden egész helyen egész értéket vesz fel?

175. Mutassuk meg, hogy ha a $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, ahol a, b, c, d, e egész számok, minden egész x-re osztható 5-tel, akkor 5 osztója az a, b, c, d, e együtthatók mindegyikének. Igaz-e hasonló ötödfokú polinomra?

176. Legyen $p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, ahol a, b, c, d egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $p(x)$ minden egész x-re osztható 3-mal, ha létezik három egymás után következő egész szám úgy, hogy ezekre $p(x)$ osztható 3-mal. Kihasználtuk-e azt, hogy $p(x)$ negyedfokú polinom? Igaz-e az állítás tetszőleges $n \geqq 2$ fokú polinomra?

177. Gabi felírt egy lapra egy egész együtthatós polinomot és azt mondta: ma van a húgom születésnapja. Ha életkorát a-t beírjuk x helyébe, a-t kapunk, vagyis $p(a) = a$. Tudjuk, hogy $p(0) = p$, ahol $p>a$ prímszám. Hány éves Gabi húga?

***178.** Két tanuló, Gabi és Zsuzsi, a következő játékot találta ki: Gabi felírt egy egész együtthatós polinomot és azt mondta: Éveim száma (egész) a polinom gyöke. Hány éves vagyok, találd ki.

Zsuzsi: Nem lehet nehéz. Próbálkozzunk $x=7$. Ez nem jó, mert $p(7) = 77$.

Gabi: Ilyen kicsinek látszom?

Zsuzsi: Nézzünk valami nagyobbat, A-t. Ez nem jó, mert $p(A) = 85$.

Gabi: (Belenézve a számolásba) Oh, de én még A-nál is idősebb vagyok!

Zsuzsi ebből megmondta, hogy Gabi hány éves. Hogyan találta ki?

179. A $0<n\leqq 100$ egész számok halmazának minden eleméhez rendeljük hozzá a szám pozitív osztóinak számát. Függvényt kapunk-e így? Miért?

180. Legyen a d függvény a pozitív egész számok halmazán értelmezve úgy, hogy $d(n)$ jelentse az n pozitív osztóinak számát. Határozzuk meg a $d(1)$; $d(2)$; $d(5)$; $d(12)$; $d(16)$; $d(28)$; $d(30)$; $d(64)$; $d(70)$ függvényértékeket.

181. Hány pozitív osztója van:
a) $2^3 \cdot 3$; *b)* $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$; *c)* $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
számoknak?

182. Igazoljuk, hogy
a) $d(2^3 \cdot 3^2) = d(2^3)\, d(3^2)$;
b) $d(2^a)\, d(3^b) = d(2^a \cdot 3^b)$,
ahol d a **180.** feladatban szereplő függvényt jelenti.

183. Bizonyítsuk be, hogy az $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (ahol $a_1; \dots; a_k$ pozitív egész számok, $p_1; \dots; p_k$ prímszámok), szám pozitív osztóinak száma $d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$.

184. Határozzuk meg
a) 81; *b)* 256; *c)* 400; *d)* 576; *e)* 625; *f)* 10 000
pozitív osztóinak számát.

185. 24 fős zenekar a sportpályán téglalap alakú alakzatban menetel.
(pl. 1×24; 24×1; 2×12; 3×8 stb.)
a) Hány ilyen különböző téglalap alakú alakzat lehetséges?
b) Legalább hány ember szükséges ahhoz, hogy

4-féle; 5-féle; 10-féle

téglalap alakú alakzatban meneteljenek?

186. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek pontosan
a) 7; *b)* 8; *c)* 9; *d)* 10; *e)* 11; *f)* 12; *g)* 20
pozitív osztója van.

187. Adjunk meg néhány olyan pozitív egész számot, amelyek pozitív osztóinak száma két páratlan szám szorzata.

188. Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy egész szám osztóinak száma
a) páratlan legyen;
b) páros legyen.

189. Határozzuk meg, hogy

a) 48-nak hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 6-tal.
b) 120-nak hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 4-gyel.
c) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$-nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 15-tel.
d) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$-nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 21-gyel?

190. Bizonyítsuk be, hogy egy szám pozitív osztóinak száma nem nagyobb, mint a szám négyzetgyökének kétszerese.

191. Hány x; y egész megoldása van az
a) $x^2 - y^2 = 15$ egyenletnek;
b) $x^2 - y^2 = 12$ egyenletnek;
c) $x^2 - y^2 = 21$ egyenletnek;
d) $x^2 - y^2 = 19$ egyenletnek;
e) $x^2 - y^2 = a$ egyenletnek, ahol a páratlan egész szám?

192. Keressük meg, hogy hány osztópárja van ($k_1; k_2 \in \mathbf{N}^+$ osztópárjai n-nek, ha $n = k_1 k_2$ és $k_1 \leqq k_2$):
a) 18; *b)* 36; *c)* 96; *d)* 121; *e)* 200; *f)* 576;
g) 1024; *h)* 10 000; *i)* $n \in \mathbf{N}^+$-nak ha n nem négyszetszám;
j) $n \in \mathbf{N}^+$-nak, ha n négyzetszám.

193. Határozzuk meg
a) 72; *b)* 16; *c)* 180; *d)* 525; *e)* 289; *f)* 625;
g) n tetszőleges pozitív egész
pozitív osztóinak a szorzatát.

194. Határozzuk meg azt a pozitív egész számot, amelynek 6 osztója van, és pozitív osztóinak szorzata 91 125.

195. A $0 < n \leqq 20$ egész számok halmazának minden eleméhez rendeljük hozzá n pozitív osztóinak összegét. Függvényt kapunk-e így? Miért?

196. Legyen S a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény, amely a halmaz minden eleméhez hozzárendeli az elem pozitív osztóinak összegét. Határozzuk meg:
a) $S(2)$; *b)* $S(4)$; *c)* $S(6)$; *d)* $S(8)$; *e)* $S(9)$;
f) $S(12)$; *g)* $S(16)$; *h)* $S(18)$; *i)* $S(19)$
függvényértékeket.

197. Határozzuk meg
a) 81; *b)* 256; *c)* 196; *d)* 243; *e)* 540; *f)* 1000
pozitív osztóinak összegét.

198. Mennyi a következő számok pozitív osztóinak összege:
a) 2^7; *b)* 5^3; *c)* 3^4; *d)* $2^3 \cdot 3^2$; *e)* $5^4 \cdot 7$; *f)* $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$?

199. Igazoljuk, hogy pozitív egész számokhoz pozitív osztói összegét rendelő S függvényre fennáll, hogy
a) $S(2^3 \cdot 3^2) = S(2^3)\,S(3^2)$; *b)* $S(2^a \cdot 3^b) = S(2^a)\,S(3^b)$,
ahol a és $b > 0$ egész számok.

***200.** *a)* Általánosítsuk az előző feladatot a következő módon: ha $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$, akkor $S(n) = S(p_1^{a_1}) \cdot S(p_2^{a_2})$,
ahol $p_1; p_2 > 0$ prímszámok, $a_1; a_2 > 0$ egész számok.
b) Hogyan lehetne kimondani további általánosítást? (Bizonyítás nélkül.)

201. Határozzuk meg a következő számok pozitív osztóinak összegét: *a)* 240; *b)* 2025; *c)* $2^8 \cdot 3^5$; *d)* 1988.

202. Határozzuk meg
a) $S(2^8)$; *b)* $S(3^{15})$; *c)* $S(2^{31})$; *d)* $S(p^4)$; *e)* $S(p^{11})$;
f) $S(p^{16})$; *g)* $S(p^{21})$; *h)* $S(p^k)$
(ahol $p > 0$ prímszám, $k > 0$ egész szám, S a **199.** feladatban szereplő függvény).
Keressünk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy $S(n)$ páratlan szám legyen.

203. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy szám páratlan osztóinak összege nagyobb legyen a páros osztói összegénél?

204. Az n pozitív egész számot tökéletes számnak nevezzük, ha pozitív osztóinak összege a szám kétszeresével egyenlő. Például 6 tökéletes szám, mert $S(6) = 1+2+3+6 = 12$. Keressünk további tökéletes számokat.

205. Állapítsuk meg, hogy prímszám lehet-e tökéletes szám.

206. Bizonyítsuk be, hogy nincsen $4k+3$ alakú tökéletes szám ($k \in \mathbf{N}$).

207. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a $A = 2^{p-1}(2^p - 1)$, ahol p és $2^p - 1$ prímszám, tökéletes szám.
b) Fogalmazzuk meg az előbbi állítás megfordítását.

208. Bizonyítsuk be, hogy minden páros tökéletes szám 6-ra vagy 8-ra végződik.

***209.** Mutassuk meg, hogy minden 6-nál nagyobb páros tökéletes szám 9-cel osztva 1-et ad maradékul.

***210.** Igazoljuk, hogy egy tökéletes szám osztói reciprokának összege kettő.

211. Figyeljük meg a következő összeadásokat:

a) $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; *b)* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$;

c) $1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; *d)* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}$;

e) $1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$; *f)* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$.

Milyen általános tételt lehetne leolvasni ebből?

***212.** Legyen n egy pozitív egész szám, osztói pedig $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_k}=\frac{S(n)}{n},$$

ahol $S(n)$ az $n > 0$ egész szám pozitív osztóinak összegét jelenti.

213. Határozzuk meg a 220 és 284 pozitív osztóinak összegét. Milyen érdekességet tapasztalunk? Keressünk további ilyen számpárokat.

214. Határozzuk meg, hogy a 0; 1; 2; ...; 11 számok közül a 12-höz hány relatív prímszám van.

215. Állapítsuk meg, hogy a 0; 1; 2; ...; 24 számok közül a 25-höz hány relatív prímszám van.

216. A pozitív egész számok halmazán értelmezzük azt a φ függvényt, amely bármely $n > 0$ egész számhoz a 0; 1; 2; ...; $n-1$ sorozatból az n-hez relatív prímszámok számát rendeli.
Határozzuk meg mennyi:
a) $\varphi(1)$; *b)* $\varphi(2)$; *c)* $\varphi(18)$; *d)* $\varphi(2^5)$; *e)* $\varphi(3^7)$;
f) $\varphi(7^9)$; *g)* $\varphi(p^{10})$;
h) $\varphi(p^k)$, ahol $p > 0$ prímszám, $k > 0$ egész szám;
i) $\varphi(2^5 \cdot 3^4)$; *j)* $\varphi(3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$.

217. Az előző feladatban értelmezett φ függvényre igaz-e, hogy *a)* $\varphi(2^5 \cdot 3^4) = \varphi(2^5)\varphi(3^4)$; *b)* $\varphi(p_1^{a_1}p_2^{a_2}) = \varphi(p_1^{a_1})\varphi(p_2^{a_2})$? A *b)* feladat állítását hogyan lehetne általánosítani?

218. Számítsuk ki, hogy mennyi *a)* $\varphi(450)$; *b)* $\varphi(650)$; *c)* $\varphi(1986)$ (ahol φ a **216.** feladatban szereplő függvény).

219. Vizsgáljuk meg, hogy milyen $n>0$ egész számokra lesz páros, illetve páratlan a φ függvény értéke.

220. Milyen pozitív egész x számra teljesül, hogy $\varphi(2^x)=128$?

221. Mutassuk meg, hogy ha $n=2^k$, ahol $k>0$ egész szám, akkor $\varphi(n) = \frac{n}{2}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

***222.** Milyen $p, q > 0$ különböző prímszámokra teljesül, hogy $\varphi(p^2q^2) = 2200$?

3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

223. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

a) 36; 96, *b)* 128; 512, *c)* 101; 211, *d)* 567; 1053,
e) 629; 799, *f)* 754; 221, *g)* 840; 1560, *h)* 875; 2625.

224. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis: Két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója

1. kisebb mindkét számnál;
2. kisebb a nagyobbik számnál;
3. osztója a két szám összegének;
4. osztója a két szám különbségének.

225. Tudjuk, hogy b osztója a-nak. Mivel egyenlő *a)* $(a; a+b)$; *b)* $(b; a+b)$; *c)* $(a; a-b)$; *d)* $(b; a-b)$. $a; b \in \mathbf{N}^+$.

226. Határozzuk meg *a)* $(a; a+1)$; *b)* $(a; a+2)$ értékét.

227. Határozzuk meg 5627 és 1986 legnagyobb közös osztóját. Euklidesz a következő algoritmussal számolta ezt ki:

$$5627 = 1986 \cdot 2 + 1655,$$
$$1986 = 1655 \cdot 1 + 331,$$
$$1655 = 331 \cdot 5 + 0.$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nem 0 maradék, azaz 331. Igazoljuk az eljárás helyességét. Igaz-e, hogy

$$(1986; 1655) = (5627; 1986) = (1655; 331)?$$

228. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>b>0$ egész számok, akkor

$$(a; b) = (b; a-b);$$
$$(a; b) = (b; a-2b);$$
$$(a; b) = (b; a-qb);$$
$$(a; b) = (b; r),$$

ahol $a = qb+r$ $q>0$ egész szám, $0 \leqq r < b$, r egész szám.

229. A **228.** feladat alapján igazoljuk az Euklideszi algoritmust.

230. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

a) 438; 126, *b)* 598; 1599, *c)* 1985; 4764,
d) 4096; 4608, *e)* 1512; 1080, *f)* 9713; 737.

231. A **227.** feladatban azt kaptuk, hogy $(5627; 1986) = 331$. A leírt eljárásból adódott, hogy $1986 = 1 \cdot 1655 + 331$. Ebből

$$1655 =$$

$= 1986 - 331$ és ezt az első egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy $331 = 3 \cdot 1986 - 5627$. A két szám legnagyobb közös osztóját előállítottuk úgy, hogy az adott számokat egy-egy alkalmas egész számmal szorozva összeadtuk. Állítsuk elő ilyen módon a **230.** feladatban kiszámított legnagyobb közös osztókat.

***232.** Bizonyítsuk be, hogy ha $d = (a; b)$, ahol $a, b > 0$ egész számok, akkor $d = ax+by$, ahol x, y egész számok. Azaz bizonyítsuk be, hogy d előállítható az a és b lineáris kombinációjaként.

233. Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\frac{840}{1800}$; *b)* $\frac{535}{1819}$; *c)* $\frac{3857}{6061}$; *d)* $\frac{7395}{9860}$.

234. Két egész számról a következőt tudjuk: legnagyobb közös

osztójuk 15; a legnagyobb közös osztó megkeresésekor az euklideszi algoritmusban 3 osztást végeztünk, ahol hányadosként három egymást követő páros számot kaptunk, amelyeknek az összege 12. Hogyan határozható meg ebből a két szám?

235. Két természetes szám összege 1323, legnagyobb közös osztója 147. Melyek ezek a számok?

236. Keressük meg az $A = 11111111$, $B = \underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ darab 1-es}}$ számok legnagyobb közös osztóját.

237. Legyen a; b két egész szám, melyre $(a; b) = 1$. Határozzuk meg $(a+b; a-b)$-t.

238. Igazoljuk, hogy ha a, b páratlan egész számok, akkor

$$(a; b) = \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}\right).$$

239. Adott a $\frac{3n+2}{4n+1}$ tört, ahol n természetes szám. Határozzuk meg az n értékét úgy, hogy a tört egyszerűsíthető legyen.

240. Van-e olyan $n \in \mathbf{N}$ szám, amelyre a $\frac{2n-5}{3n-7}$ tört egyszerűsíthető?

241. A következő számok közül keressük ki a relatív prímpárokat:

3; 4; 6; 10; 15; 21; 28; 35; 42; 63.

242. Bizonyítsuk be, hogy bármely két egymást követő egész szám relatív prím.

243. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív egész szám, akkor

$$(2^a+1; 2^a-1) = 1.$$

***244.** Mutassuk meg, hogy ha $a, b > 0$ egész szám és a páratlan, akkor

$$(2^a-1; 2^b+1) = 1.$$

245. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív egész szám, akkor

$$(2^{2a}+1; 2^a+1) = 1.$$

246. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a; 4) = 2$ és $(b; 4) = 2$, akkor

$$(a+b; 4) = 4.$$

247. Igazoljuk, hogy nincsen olyan a és b egész szám, amelyekre

$$(a; b) = 7 \quad \text{és} \quad a+b = 100.$$

248. Hány olyan a; b egész számpár létezik, amelyikre

$$(a; b) = 4 \quad \text{és} \quad a+b = 100?$$

249. Határozzuk meg:

a) (12; 24; 40); *b)* (49; 77; 133); *c)* (30; 75; 630);
d) (17; 34; 263); *e)* (187; 323; 391).

250. Írjunk fel három olyan számot, amelyek relatív prímek, de páronként nem relatív prímek.

251. Mutassuk meg, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor $11a+2b$ és $18a+5b$ legnagyobb közös osztója 19 vagy 1.

252. Két természetes szám négyzetének különbsége 2023. Legnagyobb közös osztjójuk 17. Melyik ez a két szám?

253. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek legnagyobb közös osztója 10 és szorzatuk 2400.

254. Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:

a) 16; 28, *b)* 45; 150, *c)* 105; 180,
d) 348; 476 *e)* 475; 570, *f)* 1840; 3400.

255. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:
Két pozitív szám legkisebb közös többszöröse

1. mindkét számnál kisebb;
2. mindkét számnál nagyobb;
3. a nagyobb számnál kisebb;
4. a kisebb számnál nagyobb;
5. a két szám szorzatánál kisebb;
6. a két szám szorzatánál nagyobb.

256. Határozzuk meg a következő számpárok

1. szorzatát;
2. legnagyobb közös osztóját;
3. legkisebb közös többszörösét;

4. legnagyobb közös osztójának és a legkisebb közös többszörösének szorzatát:
a) 9; 12, *b)* 15; 20, *c)* 11; 19, *d)* 128; 1024, *e)* 187; 323, *f)* 1988; 2000. Milyen érdekességet figyelhetünk meg?

257. Egy kikötőben 1988. január 2-án együtt van négy hajó. Tudjuk, hogy az első hajó négyhetenként, a második nyolchetenként, a harmadik 12 hetenként, a negyedik 16 hetenként tér vissza a kikötőbe. Találkoznak-e még 1988-ban mind a négyen ebben a kikötőben?

258. Egy kerékpár nagyobbik fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék újra a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza? (A pedál a nagyobbik fogaskerék tengelyén van.)

259. Egy versenypályán egy irányba egyszerre indul három futó. Az első 1 min 2 s alatt, a második 1 min 3 s, a harmadik 1 min 6 s alatt tesz meg egy kört. Voltak-e az indulás helyén egyszerre, ha a győztes futó 44 min 6 s idővel nyerte a versenyt? (Tételezzük fel, hogy a futók sebessége állandó!)

260. Egy országút egyik oldalát fasor szegélyezi. A fák 12 méterenként állnak. Az út másik oldalán távíróoszlopok sorakoznak, 75 méteres közökben. Egy bizonyos helyen az út két oldalán egymással szemben áll egy oszlop és egy fa. Milyen távolságonként ismétlődik meg ez a találkozás?

261. Egy autóbuszmegállóban 8 óra 20 perckor egyszerre áll egy 17-es és egy 71-es busz. A 17-es 12 percenként, a 71-es 20 percenként közlekedik. Hány órakor lesz ismét egyszerre a megállóban egy 17-es és egy 71-es autóbusz?

262. Két relatív prímszám legkisebb közös többszöröse:
a) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; *b)* $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; *c)* 180; *d)* 256; *e)* 2600.
Mi lehet a két szám?

263. Hány olyan háromjegyű tízes számrendszerbeli természetes szám van, amelyet ha sorban 111-gyel, 222-vel, 333-mal osztunk, ugyanazt a maradékot kapjuk?

264. Bizonyítsuk be, hogy az a, $b>0$ egész számok legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata a két szám szorzatával egyenlő.

265. Milyen x-ekre teljesülnek a következő egyenlőségek?
a) $[123; 126] = x$; *b)* $(899; 1147) = x$;
c) $(945; 1386; 1701) = x$; *d)* $[1188; 1368] = x$;
e) $(x;8) = 80$; *f)* $[x; 16] = 48$;
g) $(x; 60) = 15$; *h)* $(x; 20) = 1$.

266. Mutassuk meg, hogy az a és b egész számok legkisebb közös többszöröse kifejezhető az a és b számok lineáris kombinációjaként, azaz $ax+by$ alakban, ahol x, y egész számok.

267. Keressünk olyan a, b pozitív egész számokat, amelyeknek legkisebb közös többszöröse az összegükkel egyenlő.

***268.** Határozzuk meg az a és b természetes számokat és a p prímszámot úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$[a; b]+(a; b) = a+b+p.$$

269. Milyen $a, b \in \mathbf{N}$-re teljesül, hogy
a) $(a; b) = 13$ és $[a; b] = 1989$;
b) $a+b = 36$ $(a; b)$ és $[a; b] = 3850$;
c) $(a; b) = 26$ és $[a; b] = 4784$;
d) $a+b = 370$ és $[a; b] = 270 \cdot (a; b)$;
e) $a+b = 98$ és $[a; b] = 720$;
f) $a+b = 667$ és $\dfrac{[a; b]}{(a; b)} = 120$.

270. Határozzuk meg azokat az a, b, $c>0$ egész számokat, amelyekre

$$(a; b; c) = 4 \text{ és } [a; b; c] = 240.$$

271. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, $c>0$ egész számok, akkor

$$\frac{[a; b]+(b; c)}{b} + \frac{[b; c]+(c; a)}{c} + \frac{[c; a]+(a; b)}{a} \geqq 6.$$

272. Melyik az a háromjegyű szám, amelyből ha elveszünk 6-ot, akkor 7-tel osztható számot kapunk, ha 7-et veszünk el belőle, akkor 8-cal osztható, ha pedig 8-at veszünk el belőle, akkor 9-cel osztható számot kapunk?

273. Gábor elfelejtette barátjának hatjegyű telefonszámát. Csak arra emlékezett, hogy 7...2., továbbá hogy a telefonszám páratlan,

és 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel, 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezekből az adatokból meg tudja-e határozni a telefonszámot?

274. Határozzuk meg annak a két legkisebb pozitív számnak a különbségét, amelyiket ha bármelyik $2 \leqq k \leqq 11$ természetes számmal osztunk, 1 maradékot kapunk.

4. Diofantoszi problémák

275. Két természetes szám összege 10. Melyek lehetnek ezek a számok?

276. Határozzuk meg azokat a nemnegatív 3-mal osztható egész számokat, amelyek 7-tel osztva 2 maradékot adnak.

277. Keressük meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek 3-mal osztva 2-t, 5-tel osztva pedig 3-at adnak maradékul.

278. Van-e olyan x, y pozitív egész szám, amelyre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$?

279. A 24 és 36 legnagyobb közös osztóját fejezzük ki ezek lineáris kombinációjaként, azaz $24x+36y$ alakban, ahol x, y egész számok.

280. Az $x^3+y^3+z^3=u^3$ egyenletnek létezik-e olyan megoldása, ahol $x<y<z<u$ egymást követő egész számok?

281. Adjuk meg azokat az x és y egész számokat, amelyekre $x>y>0$ és $x^3+7y=y^3+7x$.

282. Van-e olyan x, y egész szám, amelyre $x^3+6x^2+5x=27y^3+9y^2+9y+1$ egyenlőség teljesül?

283. Van-e olyan x, y egész szám, amelyre
a) $x^2-2xy=1998$; *b)* $x^3=2+3y^2$?

284. Mutassuk meg, hogy nincsen olyan x, y egész szám, amelyre $x^2+y^2=1998$ teljesül.

285. Lehet-e egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának mértékszáma páratlan természetes szám?

286. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynél két oldal mértékszáma páros természetes szám és a harmadik oldal páratlan természetes szám?

287. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög két befogójának mértékszáma nem lehet egyidejűleg páratlan egész szám, ha az átfogó is egész szám.

288. Keressünk olyan egész számokból álló számhármasokat, amelyek derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai lehetnek.

289. Bizonyítsuk be, hogy minden pitagoraszi számhármas valamelyik tagja osztható 5-tel.

290. Bizonyítsuk be, hogy ha $x=2mn$; $y=m^2-n^2$, $z=m^2+n^2$, ahol m; $n>0$ egész számok, akkor $x^2+y^2=z^2$.

291. Határozzuk meg az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet összes pozitív egész megoldását, ahol $(x; y; z)=1$. Az egyenlet megoldásait pitagoraszi számhármasoknak nevezzük.

292. Határozzuk meg mindazokat a pitagoraszi számhármasokat, amelyeknél a legnagyobb szám nem nagyobb 100-nál.

293. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma egész szám, akkor befogóinak szorzata osztható 12-vel.

294. Vannak-e olyan pitagoraszi számhármasok, amelyek
a) számtani sorozatot; *b)* mértani sorozatot
alkotnak?

295. Bizonyítsuk be, hogy ha 3 egész számra fennáll, hogy $a^2+b^2=c^2$, akkor az abc szorzat osztható 60-nal.

296. Tudjuk, hogy $3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$; $7^2+24^2=25^2$; $9^2+40^2=41^2$. Milyen sejtést olvashatunk ki ezekből a példákból? Keressünk ilyen tulajdonsággal rendelkező további számhármasokat.

297. Határozzuk meg a 84 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok relatív prím számok.

298. Határozzuk meg a 120 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok egész számok.

299. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok, és területe 78 egység?

300. Határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy egész számok és a háromszög kerülete 80 egység.

301. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok és kerülete 88 egység?

302. Bizonyítsuk be, hogy nincsen olyan derékszögű háromszög, amely oldalainak mértékszáma egész szám, és területének mértékszáma megegyezik az átfogó mértékszámával.

303. Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma egész szám. A háromszög kerületének és területének mértékszáma megegyezik. Határozzuk meg az oldalak mértékszámát.

304. $3^2+4^2 = 5^2$; $20^2+21^2 = 29^2$; $119^2+120^2 = 169^2$. Mutassuk meg, hogy ha valamely a és c egész szám eleget tesz az $a^2+(a+1)^2 = c^2$ egyenlőségnek, akkor $(3a+2c+1)^2+(3a+2c+2)^2 = (4a+3c+2)^2$. Így az első három példa alapján további pitagoraszi számhármasokat nyerünk. Keressünk néhányat.

305. Tudjuk, hogy $10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2$. Van-e még más olyan számötös, ahol a számok egymást követő egész számok, és 3 szám négyzetének összege megegyezik két szám négyzetének összegével?

306. Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan x, y egész számok, amelyekre $15x^2-7y^2 = 9$ teljesül.

307. Határozzuk meg azokat az x; y; $z>0$ egész számokat, amelyek kielégítik az $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$ egyenlőséget.

308. Értelmezzük az f függvényt a pozitív egész számokból alkotott számpárok halmazán a következőképpen: ha a, $b>0$ egész számok, akkor

$$f(a;b) = \begin{cases} [a;b], & \text{ha } a;b \text{ mindkettő páratlan,} \\ & [\ ] \text{ a legkisebb közös többszörös,} \\ (a;b), & \text{ha } a;b \text{ mindkettő páros,} \\ & (\ ) \text{ a legnagyobb közös osztó,} \\ ab, & \text{ha } a;b \text{ különböző paritású.} \end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy az f függvény a 0 kivételével minden természetesszám-értéket felvesz.

b) Keressük meg az összes olyan a, b számpárt, amelyre $f(a;b) = -2a+6b$.

5. Számrendszerek

309. *A* és *B* a következő játékot játssza:
A hat cédulára 1 és 63 közötti egész számokat ír úgy, hogy az elsőre azok a számok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában az egyesek helyén 1 áll. A másodikra azok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában a kettesek helyén 1 áll. A harmadikra azok kerülnek, amelyek 2-es számrendszerbeli alakjában a négyesek helyén 1 áll és így tovább. (Ugyanaz a szám több cédulán is szerepelhet.) Ezután átadja a cédulákat *B*-nek, és felszólítja, hogy válasszon ki egy számot és adja vissza azokat a cédulákat, amelyeken a kiválasztott szám rajta van. *A* rápillantva a visszaadott cédulákra, azonnal megmondja a választott számot.
Hogyan találta ki? Hány cédulára volna szükség, ha 1–500-ig terjedő egész számok közül szeretnénk választani? Játszhatnánk-e ezt más alapú számrendszerben is?

310. Hány jegyű lesz a tízes számrendszerben felírt 3251 a kettes számrendszerben? Négyes számrendszerben? Nyolcas számrendszerben? Írjuk fel.

311. A következő tízes számrendszerbeli számokat írjuk át 2-es, 4-es, 5-ös és 12-es alapú számrendszerbe:
a) 12; *b)* 154; *c)* 236; *d)* 361; *e)* 981;
f) 984; *g)* 425; *h)* 1000; *i)* 675; *j)* 1024.

312. Egy tanuló a 7352 tízes számrendszerbeli számot a következőképpen írta át 6-os alapú számrendszerbe:
7352-t elosztotta 6-tal és feljegyezte a maradékot, majd a hányadost osztotta 6-tal és feljegyezte a maradékot és így tovább, míg 0 hányadost kapott.
A maradékokat fordított sorrendben egymás mellé írta, és ez lett a 7352-nek a 6-os számrendszerbeli alakja.
Helyes volt ez az eljárás? Indokoljuk.

313. Úgy akarjuk megtudni a barátunk telefonszámát, hogy olyan kérdéseket teszünk fel, melyekre ő *igen*nel vagy *nem*mel válaszol. Keressünk módszert arra, hogy a lehető legkevesebb kérdéssel tudjuk meg a telefonszámot. Legfeljebb hány kérdés szükséges ahhoz, hogy a hatjegyű telefonszámot kitaláljuk?

314. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 0$ természetes szám előállítható a 2 különböző nemnegatív egész kitevőjű hatványának összegeként.

315. *a)* Az 1241_5 szám milyen alapú számrendszerben írható 304_x alakban?

b) 41_8 milyen alapú számrendszerben írható 201_x alakban?

c) $57\,896_{10}$ milyen alapú számrendszerben írható $3\,323\,041_x$ alakban?

d) $10\,110\,001_2$ milyen alapú számrendszerben írható 342_x alakban?

316. Írjuk át tízes számrendszerbe a következő, más számrendszerben felírt számokat:

a) 111_3; 1000_3; 1020_3; *b)* 30_{12}; 211_{12}; 1039_{12}; *c)* 123_4; 100_4; 303_4; *d)* 130_{13}; 1112_{13}; 210_{13}.

317. Melyik szám nagyobb: $213\,230_4$ vagy $11\,027_8$?

318. Egy szám hármas számrendszerben 12 112 211 122 211 112 222 alakú. Mennyi ennek a számnak a kilences számrendszerbeli alakjában balról az első számjegy?

319. *a)* Egy számrendszerben $4^2 = 20$. Mennyi ebben a számrendszerben 5^2?

b) Milyen alapú számrendszerben lesz 13_x és 31_x kettőnek egymás után következő hatványa?

320. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $23\,334_6 + 33\,020_6 + 444_6 + 12\,341_6$;

b) $43(10)(11)5_{12} + 3(10)6_{12} + 4(11)25_{12}$ (ahol például $(10)(11)3_{12} = 10 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 3$);

c) $234\,134_7 \cdot 123_7$;

d) $471\,222_8 : 27_8$.

321. Milyen alapú számrendszerben igazak a következő egyenlőségek:

a) $12_x + 13_x = 30_x$; $17_x + 38_x = 54_x$; $89_x + 69_x = 103_x$;

b) $100_x - 1_x = 11_x$;

c) $12_x \cdot 7_x = 80_x$; $6_x \cdot 6_x = 51_x$; $13_x \cdot 22_x = 1012_x$;

d) $55_x : 13_x = 4_x$; $1520_x : 12_x = 123_x$.

322. Hányszorosára nő egy hetes számrendszerben felírt szám értéke, ha a végére egy 0-t írunk; ha két 0-t írunk a végére?

323. Végezzük el a következő osztásokat:

a) $98\,765\,432_{10} : 8_{10}$; *b)* $8\,765\,432_9 : 7_9$; *c)* $5432_6 : 4_6$;

d) $(g-1)(g-2)(g-3)\ldots432_g : (g-2)_g$, ahol $(g-1)(g-2)(g-3)\ldots$ $\ldots432$ g alapú számrendszerben felírt számot jelent.

324. Bizonyítsuk be, hogy 144_g tetszőleges 4-nél nagyobb g alapú számrendszerben teljes négyzet.

325. Igaz-e, hogy 1331_n tetszőleges $n > 3$ alapú számrendszerben teljes köb?

326. Milyen alapú számrendszerben igaz az, hogy ha 4616-ot elosztjuk 66-tal a hányados 55 és a maradék 20?

327. Igaz-e, hogy minden számrendszerben az alapot megelőző szám kétszeresét és négyzetét ugyanazon számjegyekkel, de fordított sorrendben írjuk? Észrevesszük, hogy $2 \cdot 9 = 18$ és $9^2 = 81$ a tízes számrendszerben.

328. Milyen alapú számrendszerben érvényes a következő szorzás? A * helyén álló számjegyeket határozzuk meg!

$$\begin{array}{r} **2 \cdot *2 \\ \hline **0* \\ ***1 \\ \hline ****1 \end{array}$$

329. A 8-as alapú számrendszerben egy szám négyzetét írtuk fel. (Különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.)

$$\begin{array}{r} ABC \cdot ABC \\ \hline B*D \\ E**C \\ A**D \\ \hline ***** \end{array}$$

Melyik ez a szám?

330. Írjuk fel tízes számrendszerben az

a) kettes számrendszerbeli 0,101; 0,1101101; 11,11; 1011,001 kettedestörteket;

b) hármas számrendszerbeli 2,21; 11,11; 101,201; 22,01 harmadostörteket.

331. Melyik az a legkisebb g alapú számrendszer, amelyben véges „g-edes"-törtekben írható fel $\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{36}; \frac{1}{25}$?

332. Írjuk fel két egész szám hányadosaként

a) a kettes számrendszerben írt $0,\dot{1}$; $0,0\dot{1}$; $0,10\dot{1}$; $0,110\dot{1}$ végtelen kettedestörteket;

b) a hármas számrendszerben felírt $0,\dot{2}$; $0,0\dot{2}$; $0,1\dot{2}$; $0,12\dot{1}$ végtelen harmadostörteket.

333. $A = 0,101\,001\,000\,1\ldots$ kettes számrendszerbeli nem szakaszos kettedestört. Lehet-e a tízes számrendszerbeli felírása szakaszos?

334. Pontosan hány 0-val kezdődik az $\frac{1}{a}$ racionális szám ($a = 1, 2, 3\ldots$) kettedestörtjének törtrésze?

335. Válasszuk ki a következő törtek közül melyiknek lesz véges, melyiknek végtelen szakaszos

1. kettedes-;
2. harmadostört alakja:

a) $\frac{3}{8}; \frac{7}{16}; 1\frac{5}{8}; 7\frac{3}{4}; \frac{15}{32}; \frac{2}{9}; \frac{5}{27}; \frac{4}{81}; 6\frac{2}{9}; 19\frac{5}{27};$

b) $\frac{1}{6}; \frac{2}{15}; \frac{3}{10}; \frac{7}{18}; 2\frac{5}{8}; 3\frac{1}{6}; \frac{6}{35}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; 5\frac{1}{14}.$

Lesz-e közöttük végtelen nem szakaszos, kettedes- vagy harmadostört?

336. Határozzuk meg a $\overline{0,abcd}$ 6-os számrendszerbeli törtet, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $\frac{8993}{31\,671}$.

337. Keressük meg a következő feladatokban a g, f számrendszer-alapszámokat úgy, hogy az egyenlőségek teljesüljenek:

a) $1,3_g = 1,6_f$; *b)* $10,11_g = 2,3_f$; *c)* $101,01_g = 11,1_f$.

***338.** Írjuk fel tizedestört alakban $\frac{1}{9^2}$-t, nyolcadostört alakban $\frac{1}{7^2}$-t, hetedestört alakban $\frac{1}{6^2}$-t. Milyen érdekességet figyelhetünk meg? Bizonyítsuk a sejtésünket.

339. Milyen alapú számrendszerben lesznek a következő számok prímszámok:

a) $10\,201_g$; *b)* $10\,101_g$; *c)* 111_g; *d)* $11\,312_g$?

340. Bizonyítsuk be, hogy $g > 1$ természetes szám esetén $N = 10\,101_g$ szám páratlan összetett szám. Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

341. Bizonyítsuk be, hogy a 6-os alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha utolsó jegye 0, 2 vagy 4; akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha utolsó jegye 0 vagy 3. A tízes alapú számrendszerben milyen számokkal való oszthatósági szabály felel meg ennek? Hogyan lehetne általánosítani a szabályt tetszőleges g alapú számrendszerre?

342. Bizonyítsuk be, hogy a 13-as alapú számrendszerben *azok és csak azok* a számok oszthatók 12-vel, amelyeknél a számjegyek összege osztható 12-vel.

343. Bizonyítsuk be, hogy a 13-as alapú számrendszerben *azok és csak azok* a számok oszthatók 3-mal, illetve 4-gyel, amelyeknél a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 4-gyel.

344. Keressük meg azokat a számrendszereket, amelyekben tetszőleges egész szám a-val való oszthatóságának feltétele a számjegyek összegének a-val való oszthatósága ($a > 1$ egész szám).

345. Mekkora a maradék, ha a 15-ös számrendszerben felírt

$$123456789(10)\,(11)\,(12)\,(13)\,(14)$$

(lásd **320.** *b)* feladatot) számot 7-tel osztjuk?

346. A 9-es alapú számrendszerben felírt $N = 34\,780\,160_g$ szám osztható-e 27-tel? Hogyan lehetne megfogalmazni a 9-es számrendszerben a 27-tel való oszthatóság szabályát?

347. Milyen g alapú számrendszerben érvényes a következő oszthatósági szabály: egy szám akkor és csak akkor osztható a-val, ha a szám utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható a-val?

348. Határozzuk meg azt a legkisebb alapú számrendszert, amelyben a következő oszthatósági szabályok egyszerre teljesülnek:

1. Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 5-tel, akkor a szám is osztható 5-tel.

2. Ha egy szám utolsó két jegyéből képzett kétjegyű szám osztható 7-tel, akkor a szám maga is osztható 7-tel.

349. A következő (különböző alapú számrendszerben felírt) számok hiányzó jegyeit pótoljuk úgy, hogy

a) $2465._8$ osztható 7-tel és 4-gyel;
b) $1827._9$ osztható 8-cal és 3-mal;
c) $24.3._6$ osztható 5-tel és 2-vel;
d) $25.6._8$ osztható 7-tel és 4-gyel;
e) $392.._{12}$ osztható 11-gyel és 3-mal;
f) $45.31._6$ osztható 15-tel;
g) $35.2._6$ osztható 10-zel;
h) $47.3._8$ osztható 14-gyel;
i) $5.34._9$ osztható 12-vel;
j) $1..3._5$ osztható 20-szal.

350. Van-e olyan g alapú számrendszer, amelyben 45_g és 55_g egymást követő egész számok?

351. A nyolcas számrendszerben egy teljes négyzet $\overline{ab3c}$ alakú, ahol $a \neq 0$. Határozzuk meg, hogy milyen szám lehet a c?

352. Bizonyítsuk be, hogy bármely $g > 3$ természetes szám esetén az $N = 1320_g$ szám osztható 6-tal.

353. Határozzuk meg a számrendszer g alapszámát, ha $A = 1111_g$ szám osztható 5-tel.

354. Határozzuk meg azt az $\overline{acb}$ 9-es alapú számrendszerben felírt háromjegyű számot, amely a 7-es számrendszerben felírva $\overline{bca}$ alakú.

355. *a)* Igaz-e, hogy az $A = 231\,504_7$ szám osztható 24-gyel?
b) Milyen g alapú számrendszerben lesz 111_g osztója $10\,101_g$-nek?

356. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan alapú számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan jegyet tartalmaz.

357. Egy szám a tízes alapú számrendszerben $\overline{aaaa}$ alakú. Egy más alapú számrendszerben $\overline{a(3a)(4a)(2a)a}$ alakú. Melyik ez a szám?

358. Határozzuk meg x, a, b értékét úgy, hogy fennálljon a

$$234_x + 456_{x-1} = \overline{4ab}_{10}$$

egyenlőség (x a számrendszer alapszáma, a és b tízes számrendszerbeli számjegyek).

***359.** Egy számrendszer alapszáma kétjegyű szám. Melyik az a tízes számrendszerbeli szám, amely a szóban forgó számrendszerben 1234 alakban írható, ha tudjuk, hogy a keresett szám osztható 35-tel?

360. Egy ötjegyű, tízes számrendszerben felírt páratlan négyzetszámban a páros, valamint a páratlan helyen álló számjegyek összege külön-külön 9. A négyzetszám alapja a nyolcas számrendszerben olyan háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 14. Melyik ez a négyzetszám?

***361.** Milyen alapú számrendszerben lehet egyenlő egy háromjegyű szám a számjegyek fordított sorrendbe írásával keletkező szám kétszeresével?

362. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzetszámok

a) 2-es; *b)* 3-as; *c)* 4-es;
d) 5-ös; *e)* 8-as; *f)* 12-es; *g)* 16-os

alapú számrendszerben milyen számjegyre végződnek.

***363.** Bizonyítsuk be, hogy csak a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 8-as, 12-es és 16-os alapú számrendszerek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az ezekben felírt négyzetszámok utolsó számjegye szintén négyzetszám.

***364.** Adottak a következő 6-os számrendszerben felírt végtelen szakaszos hatodostörtek:

$$A_1 = 0{,}0\dot{2}_6;$$
$$A_2 = 0{,}0\dot{0}\dot{2}_6;$$
$$A_3 = 0{,}0\dot{0}\dot{0}\dot{2}_6;$$
$$A_n = 0{,}\underbrace{0\dot{0}\ldots\dot{0}}_{(n-1)\text{ darab }0}\dot{2}_6.$$

Bizonyítsuk be, hogy a tízes számrendszerben írt

$B = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \ldots + \frac{1}{A_n}$ szám osztható 5-tel.

6. Racionális számok

365. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-7$;

b) $7\frac{5}{8}+4\frac{7}{12}+5\frac{5}{21}+\frac{3}{7}+\frac{5}{12}+1\frac{3}{8}$;

c) $6\frac{4}{9}+7\frac{8}{25}+1\frac{11}{36}+3\frac{3}{100}$;

d) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{14}{25}\cdot\frac{12}{49}\cdot 12\frac{1}{2}$;

e) $\frac{8}{21}+1\frac{1}{3}\cdot\left(29\frac{11}{48}-25\frac{19}{42}\right)$;

f) $49:\left(1\frac{2}{7}+1\frac{1}{21}\right)$;

g) $\left(6\frac{1}{3}-7{,}5\right):1{,}4$;

h) $16{,}92:\left(3\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)$;

i) $\left(2\frac{3}{7}-3\frac{1}{3}\right)-1\frac{1}{3}\cdot 2$;

j) $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{16}}$;

k) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$;

l) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$.

366. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{5}{72\cdot 77}$;

b) $\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 17}+\ldots+\frac{4}{81\cdot 85}$.

367. Hogyan változik az 1-nél nagyobb tört értéke, ha a számlálójához és a nevezőjéhez ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk?

368. Hogyan változik az 1-nél kisebb tört értéke, ha a számlálójához és a nevezőjéhez ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk?

369. Igaz-e, hogy ha egy 1-nél kisebb tört nem egyszerűsíthető, akkor azt a törtet sem lehet egyszerűsíteni, amelyet úgy kapunk, hogy ezt a törtet 1-ből kivonjuk?

370. Legyen $n>2$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ páros számú nem egyszerűsíthető törtet tartalmaz.

371. Állapítsuk meg az a, b számjegyeket úgy, hogy $\frac{\overline{9a7b}}{24}$ tört egyszerűsíthető legyen. Hány ilyen törtet kapunk?

372. Írjuk fel normálalakban a következő számokat:

a) a Föld tömege; *b)* a Nap tömege; *c)* 345628,398;
d) 0,0000023907; *e)* az elektron töltése *f)* 456,92606;
g) 0,00065000067; *h)* 23478,234; *i)* 56,43
j) 8,00061.

373. A következő racionális számok közül melyik nagyobb:

a) 17,586631 vagy 17,586817; *b)* −2,37561 vagy −2,37571;
c) −0,786 vagy 0,687; *d)* 0,244444444 vagy 0,244.

374. Tudjuk, hogy a $\frac{381}{\overline{5x}}$ és $\frac{565}{\overline{8y}}$ (ahol $\overline{5x}$ és $\overline{8y}$ tízes számrendszerben felírt kétjegyű számok) törtek egyszerűsíthetők és nem nagyobbak 7-nél. Melyik nagyobb a két tört közül?

375. Rendezzük nagyság szerinti sorrendbe a következő racionális számokat:

a) $\frac{7}{3}; \frac{23}{30}; -\frac{3}{7}; -\frac{29}{11}$;
b) $\frac{17}{4}; -\frac{5}{3}; -\frac{7}{5}; 0; \frac{36}{11}; \frac{29}{15}$.

376. A számegyenesen ábrázoljuk a következő számokat:

a) $-2{,}5; -\frac{4}{3}; -1; 0; \frac{4}{3}; 2{,}5$;
b) $\frac{5}{7}; \frac{71}{21}; -\frac{41}{21}; 2; -1{,}5; \frac{7}{2}$.

Van-e közöttük két olyan, amelyiknek távolsága 5; 3,5; $2\frac{2}{3}$?

377. Melyek azok az a racionális számok, amelyeknek a számegyenesen

a) -1-től való távolsága 3,5-nél kisebb;

b) a 2-től való távolsága nagyobb, mint $\frac{1}{100}$;

c) a 15-től való távolsága kisebb, mint $\frac{1}{10}$?

Ábrázoljunk néhányat a számegyenesen.

378. Milyen n pozitív egész szám esetén lesz az $\frac{1}{n}$ számnak a 0-tól való eltérése $\frac{1}{100}$-nál kisebb?

379. Határozzuk meg az $n>0$ egész számot úgy, hogy a $\frac{2n-1}{n}$ számnak a 2-től való eltérése $\frac{1}{100}$-nál kevesebb legyen.

380. Adjunk meg néhány olyan racionális számot, amelyik

a) -1 és 1; *b)* $-\frac{1}{3}$ és $2\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{1}{2}$ és 1; *d)* $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$;

e) $\frac{1}{8}$ és $\frac{1}{4}$; *f)* $\frac{1}{100}$ és $\frac{1}{10}$

közé esik.

381. Lehet-e a $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ közé 10 darab racionális számot írni? Lehet-e 10-nél több racionális számot közéjük írni? Keressünk eljárást, amelynek segítségével akárhány racionális számot közéjük tudunk írni.

382. Van-e a számegyenesen olyan szakasz, amelynek minden pontja racionális számot szemléltet?

383. Jelöljünk meg a számegyenesen egy

a) a egész számot

b) $\frac{a}{b}$ törtszámot (a, b egész számok).

Van-e a számegyenesen a után következő első racionális szám? És $\frac{a}{b}$ után következő első racionális szám?

384. Van-e legkisebb pozitív racionális szám? Van-e legkisebb nemnegatív racionális szám? Van-e legnagyobb racionális szám?

385. Bővítsük a következő törteket úgy, hogy nevezőjük 10 hatvány legyen:

a) $\frac{1}{5}$; *b)* $\frac{4}{30}$; *c)* $\frac{7}{20}$; *d)* $\frac{9}{25}$; *e)* $\frac{3}{8}$;

f) $\frac{11}{125}$; *g)* $\frac{5}{128}$; *h)* $\frac{7}{30}$; *i)* $\frac{8}{15}$; *j)* $\frac{6}{7}$.

386. Válasszuk ki a következő racionális számok közül amelyek véges, amelyek tiszta szakaszos vagy vegyes szakaszos tizedestört alakúak:

a) $\frac{5}{18}$; *b)* $\frac{7}{20}$; *c)* $\frac{5841}{3200}$ *d)* $\frac{428}{625}$ *e)* $\frac{9}{200}$;

f) $\frac{89}{1024}$; *g)* $\frac{1}{12}$; *h)* $\frac{1}{7}$; *i)* $\frac{210}{729}$; *j)* $\frac{71}{294}$.

387. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

Az $\frac{a}{b}$ ($a; b \in \mathbf{Z}$, $(a; b) = 1$) véges tizedestört.

1. Akkor és csak akkor, ha b-nek csak 2-es prímtényezője van.
2. Csak akkor, ha b 2-n kívül más prímszámmal nem osztható.
3. Ha b 2-n kívül más prímszámmal nem osztható.
4. Akkor és csak akkor, ha 3 nem osztója b-nek.
5. Ha 3 nem osztója b-nek.
6. Csak akkor, ha 3 nem osztója b-nek.
7. Akkor és csak akkor, ha b-nek 2-n *vagy* 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.
8. Ha b-nek 2-n és 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.
9. Csak ha b-nek 2-n és 5-ön kívül más prímtényezője nincsen.

Az állításunkat indokoljuk.

388. Meseországban a táblás csokoládét úgy árulják, hogy a csokoládé mellé egy szelvényt is csomagolnak, és 10 összegyűjtött

szelvény egy újabb tábla csokoládét ér. Teljes csomagolásban menynyit ér valójában egy ilyen tábla csokoládé?

389. Írjuk fel a következő szakaszos tizedestörteket végtelen mértani sor alakban:

a) $0,\dot{3}$; *b)* $0,\dot{6}$; *c)* $0,\dot{9}$; *d)* $0,\dot{3}\dot{5}$; *e)* $0,\dot{1}\dot{3}\dot{4}$; *f)* $9,62\dot{4}$.

390. Írjuk fel két egész szám hányadosaként;

a) 0,12; *b)* 0,00298; *c)* 0,035; *d)* 0,1263; *e)* $1,\dot{2}\dot{4}$

f) $15,13\dot{8}$.

391. Igazoljuk, hogy a $0,\dot{a}_1\ldots\dot{a}_k$ tiszta szakaszos tizedestört (a szakasz k jegyből áll) a következő alakú: $\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k-1}$. $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ k-jegyű számot jelent.

392. Igazoljuk, hogy a $0, b_1\ldots b_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_k$ vegyes szakaszos tizedestört $\frac{b\cdot 10^k+a-b}{10^n(10^k-1)}$ alakú, ahol $b = \overline{b_1\ldots b_n}$ n-jegyű tízes számrendszerbeli szám, $a = \overline{a_1\ldots a_k}$ k-jegyű tízes számrendszerbeli szám.

393. Írjuk fel az összes $\frac{a}{b}$ számot $((a; b) = 1)$ amelynek tizedestört alakja *a)* $0, \dot{x}\ldots$; *b)* $0, x\dot{y}\ldots$ alakú. (x; y számjegyek.)

394. Mutassuk meg, hogy ha x, y racionális számok és $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 1$, akkor $\sqrt[3]{x}$ és $\sqrt[3]{y}$ is racionális számok.

395. Egy derékszögű háromszög területének mérőszáma racionális szám. A következő állítások közül lehet-e mindegyik igaz?

1. Mind a három oldal mérőszáma racionális.
2. Két oldal mérőszáma racionális.
3. Egy oldal mérőszáma racionális.
4. Nincsen olyan oldal, amelynek mérőszáma racionális.

396. Mutassuk meg, hogy ha $\cos\alpha = \frac{p}{q}$ ahol $p; q \neq 0$ egész számok, akkor $q^n \cos n\alpha$ (n pozitív egész szám) egész szám.

***397.** Ha a és b egész számok, akkor $\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$ csak véges sok pozitív egész n-re lehet egész szám. Bizonyítsuk be.

398. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Miért?

1. Ha az a, b racionális számok összege egész szám, akkor a is és b is egész szám.
2. Ha az a, b racionális számok szorzata egész szám, akkor a is és b is egész szám.
3. Ha az a, b racionális számok $a-b$ különbsége egész szám, akkor a is és b is egész szám.
4. Ha az a racionális szám négyzete egész szám, akkor a is egész.
5. Ha a b racionális szám, akkor b^2 is racionális szám.

*6. Ha az a és b racionális számok összege és szorzata egész szám, akkor a is és b is egész.

399. Bizonyítsuk be, hogy 3-nak nincsen olyan racionális kitevőjű hatványa, amely egyenlő lenne 5-tel.

400. Legyen $p, q > 0$ egész szám olyan, hogy egyszerre teljesüljön a következő két feltétel:

$$90 < p+q < 100; \qquad 0,9 < \frac{p}{q} < 0,91.$$

Határozzuk meg a p, q számokat. Hány megoldást kaptunk?

401. Bizonyítsuk be, hogy az a szám akkor és csak akkor racionális, ha létezik olyan pozitív k egész szám, hogy $[ka] = ka$. (A [ ] egészrészt jelent.)

402. Mutassuk meg, hogy az $\frac{n+2}{2}$; $\frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2}$; $\frac{n+1}{n}$ (ahol $n>0$ egész szám) törtek szorzata természetes szám.

403. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2n^2-1}$, ahol $n>0$ egész szám, nem írható fel véges tizedestört alakban.

***404.** Legyenek a és c pozitív egész számok és b egy számjegy a tízes számrendszerben. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c számhármast, amelyre egyszerre teljesülnek a következő feltételek: $(\overline{a, bbb\ldots})^2 = \overline{c, 7}\ldots$ ($\overline{a, \dot{b}\ldots}$ és $\overline{c, 7}$ végtelen tizedestörtek) és $\frac{c+a}{c-a}$ egész szám.

405. Az összes természetes szám egymás után írásával keletkező szám (0,123456789101112...) lehet-e szakaszos tizedestört?

7. Irracionális számok

406. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{17}$; *d)* $\sqrt{101}$; *e)* $\sqrt{120}$; *f)* $\sqrt{a}$, ahol $a>0$ egész és nem négyzetszám, irracionális számok.

407. Mutassuk meg, hogy

a) $\sqrt[3]{72}$; *b)* $\sqrt[5]{4}$; *c)* $\sqrt[6]{2}$; *d)* $\sqrt[4]{32}$; *e)* $\sqrt[10]{10}$ irracionális számok.

408. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\sqrt[k]{a}$ szám nem k-adik hatványa egy természetes számnak, akkor a irracionális szám.

***409.** Igaz-e, hogy $\sqrt{a^2+1}$ irracionális szám, bármely $a>0$ egész szám esetén?

410. Mutassuk meg, hogy

a) $\log_2 3$; *b)* $\log_5 10$; *c)* $\log_8 32$; *d)* $\lg 12$ irracionális szám.

411. Mutassuk meg, hogy $\lg(2^k5^k)$ nem irracionális ($k\geqq 0$ egész).

412. Mutassuk meg, hogy ha k és l két különböző nemnegatív egész szám, akkor $\lg(2^k5^l)$ irracionális szám.

413. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ irracionális szám.

***414.** Igaz-e, hogy $\sin 10°$ nem racionális szám?

***415.** Bizonyítsuk be, hogy $\cos 20°$ irracionális szám.

416. Igazoljuk, hogy ha $\sin 3\alpha$ irracionális szám, akkor $\sin\alpha$ is irracionális szám.

417. Igaz-e, hogy

a) ha $\cos\alpha$ racionális szám, akkor $\cos 3\alpha$ is racionális szám;

b) ha $\cos 3\alpha$ irracionális szám, akkor $\cos\alpha$ is irracionális szám?

418. Bizonyítsuk be, hogy a $\cos\frac{\pi}{2^n}$, $(n\geqq 2)$ irracionális szám.

419. Négyzetes pontrácson tudunk-e olyan egyenest rajzolni, amely egyetlen rácsponton megy át?

420. Melyik a legkisebb pozitív szám a következő számok közül:

a) $10-3\sqrt{11}$; *b)* $3\sqrt{11}-10$; *c)* $18-5\sqrt{13}$;

d) $51-10\sqrt{26}$; *e)* $10\sqrt{26}-51$.

421. Állapítsuk meg, hogy a következő számok közül melyek irracionálisak, melyek racionálisak:

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-5)}{2}}$;

d) $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$;

e) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$;

f) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

422. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. Két irracionális szám összege irracionális szám.
2. Két irracionális szám különbsége irracionális szám.
3. Két irracionális szám szorzata irracionális szám.
4. Van olyan irracionális és racionális szám, melyek összege racionális.
5. Van olyan irracionális és racionális szám, amelyek szorzata racionális.
6. Egy irracionális és egy nem 0 racionális szám hányadosa irracionális.
7. Van olyan irracionális és racionális szám, amelyek különbsége irracionális.

423. Mutassuk meg, hogy ha u és v két olyan irracionális szám, amelyre $u+v$ racionális szám, akkor $u-v$ és $u+2v$ irracionális.

424. Van-e a számegyenesnek olyan szakasza, amelynek minden pontja irracionális számot szemléltet?

425. Állapítsuk meg, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. Bármely két irracionális szám között van racionális szám.
2. Bármely két irracionális szám között van irracionális szám.
3. Van 10 után következő első irracionális szám.
4. Van legkisebb pozitív irracionális szám.
5. Van legnagyobb irracionális szám.

426. Szerkesszük meg a számegyenesen a $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ helyét.

427. Hány olyan egész szám van, amelynek a

a) $\sqrt{3}$-tól; *b)* $\sqrt{10}$-től; *c)* $\sqrt{26}$-tól; *d)* $\sqrt{125}$-től; *e)* $-\sqrt{330}$-tól

való eltérése abszolútértékben $\frac{1}{2}$-nél kisebb? Határozzuk meg mindegyik esetben az egész számot.

428. Igaz-e, hogy bármely v irracionális számhoz egyetlen olyan k egész szám található, amelyre $|v-k| < \frac{1}{2}$?

429. Írjunk fel olyan racionális számokat, amelyeknek a $\sqrt{2}$-től való eltérése

a) $\frac{1}{10}$-nél; *b)* $\frac{1}{100}$-nál; *c)* $\frac{1}{10^5}$-nél;

d) $\frac{1}{20}$-nál; *e)* $\frac{1}{200}$-nál; *f)* $\frac{1}{2\cdot 10^5}$-nél

kevesebb.

430. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ (p, q egész számok) alakú racionális számokat, amelyeknek a $\sqrt{2}$-től való eltérése $\frac{1}{2q}$-nál kisebb. Legyen $q=1; 5; 6; 7; 8$.

***431.** Bizonyítsuk be, hogy az u irracionális számhoz található olyan $\frac{p}{q}$ racionális szám, hogy $\left|u-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$.

432. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ racionális számot, amelynek

a) $\sqrt{3}$-tól; *b)* $\pi=3{,}1415928$-tól

való eltérése $\frac{1}{2q}$-nál kisebb, ahol $q=1; 5; 6; 9; 10$.

433. Keressünk olyan $\frac{p}{q}$ racionális számot, amelynek

a) $\sqrt{2}$-től; *b)* $\sqrt{3}$-tól; *c)* π-től

való eltérése $\frac{1}{q}$-nál kisebb. $q=15; 25; 75$.

434. Bizonyítsuk be, hogy az u irracionális számhoz található olyan $\frac{p}{q}$ racionális szám, amelyre

$$\left|u-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}.$$

***435.** Mutassuk meg, hogy a $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; \ldots; 10\sqrt{3}$ számok között van legalább egy olyan, amely valamelyik egész számtól $\frac{1}{10}$-nél kevesebbel különbözik.

***436.** Mutassuk meg, hogy az e; $2e$; $3e$; …; $1000e$ számok között van legalább egy olyan, amely valamelyik egész számtól $\frac{1}{100}$-nál kevesebbel tér el ($e=2{,}71\ldots$ irracionális szám). Milyen számot írhatnánk még az e helyébe?

437. Ábrázoljuk gondolatban a számegyenesen azokat a racionális számokat, amelyek a $\sqrt{2}$-t alulról és felülről

$$\frac{1}{10}\text{-nél}; \quad \frac{1}{100}\text{-nál}; \quad \frac{1}{1000}\text{-nél}$$

kisebb hibával közelítik meg. Milyen intervallumokat kaptunk? Ha tovább folytatnánk a közelítő racionális számok felírását, mit mondhatnánk az intervallumokról és azok hosszáról?

438. Ábrázoljuk a számegyenesen az

$$A_n = \frac{2n-1}{n}; \quad B_n = \frac{2n+1}{n} \text{ (ahol } n \geqq 1 \text{ egész szám)}$$

számok közül néhányat. Igaz-e, hogy az $[A_i; B_i] \subset [A_k; B_k]$-nak? Tetszőlegesen megadva egy pozitív számot, van-e ennél kisebb hosszúságú $[A_m; B_m]$ intervallum? Van-e olyan szám, és hány, amelyik mindegyik $[A_k; B_k]$ intervallumban benne van?

439. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{és} \quad B_n = A_n + \frac{1}{n}$$

számok a számegyenes egymásba skatulyázott intervallumainak végpontjai és az intervallumok hossza 0-hoz tart. Melyik valós számot határozhatjuk meg így?

***440.** Mutassuk meg, hogy

$$[2;4];\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2;\left(\frac{3}{2}\right)^3\right];\ldots;\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right] \qquad n=1,2,3\ldots$$

intervallumsorozat a számegyenesen egyetlen valós számot határoz meg.

441. Három tizedesjegy pontossággal $\lg 2=0{,}301$ és $\lg 3=0{,}477$. Ennek alapján határozzuk meg, hogy

a) $\frac{8}{7}$; *b)* $\frac{9}{7}$; *c)* $\frac{10}{7}$; *d)* $\frac{11}{7}$; *e)* $\frac{12}{7}$

számok közül melyik közelíti meg legjobban $\log_5 10$ értékét.

442. Melyik az a legkisebb pozitív n egész szám, amelyre $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01$?

443. Bizonyítsuk be, hogy $[(\sqrt{2}+1)^n]$, ahol $n\in\mathbf{N}$ szám, felváltva páros vagy páratlan ([ ] a szám egészrészét jelöli).

444. Mutassuk meg, hogy a $(7+\sqrt{50})^3$ szám tizedestört alakjában a tizedesvessző után három 0 áll.

***445.** Milyen számjegy áll az

$$A=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$$

szám tízes számrendszerbeli alakjában az egyesek helyén?

446. Bizonyítsuk be, hogy n darab valós számból kiválasztható néhány úgy, hogy a kiválasztottak összege valamely egész számtól $\frac{1}{n+1}$-nél kevesebbel tér el.

8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány feladat

447. A valós számok halmazában legyen a szokásos két művelet az összeadás és szorzás, továbbá definiáljuk a $*$ műveletet a következőképpen: $a*b=ab-2(a+b)+6$.

a) Mutassuk meg, hogy a $*$ művelet kommutatív, asszociatív és létezik olyan α, illetve $e\in\mathbf{R}$, hogy bármely valós a szám esetén $a*\alpha=\alpha*a=\alpha$ továbbá $a*e=a$.

b) Az a valós számhoz határozzunk meg olyan p elemet, amelyre $a*p=e$.

448. A valós számok halmazában legyen a szokásos négy alapművelet, továbbá definiáljuk az alábbi műveleteket. Vizsgáljuk meg, hogy a definiált műveletek kommutatívok, asszociatívok-e?

a) $a\circ b=2a-b+ab$; *b)* $a*b=ab-2a-2b+5$;

c) $a\circledcirc b=|b-a|$; *d)* $a\otimes b=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$;

e) $a\boxdot b=\frac{a}{b}+1$; $b\neq 0$.

449. Definiáljuk a valós számok halmazában a következő műveletet $a\circ b=(a+1)(b+1)-1$. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

1. $a\circ b=b\circ a$ minden valós a, b-re.
2. $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)+(a\circ c)$ minden valós a, b, c-re.
3. $(a-1)\circ(a+1)=(a\circ a)-1$ minden valós a-ra.
4. $a\circ 0=a$ minden valós a-ra.
5. $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ minden valós a, b, c-re.

450. A valós számok halmazában értelmezhető-e olyan $*$ művelet, melyre igaz a következő két tulajdonság:

1. Bármely valós a számra és 0-ra $a*0=a^2$.
2. Bármely valós a, b, c esetén $(a+c)*(b+c)=a*b$, ahol a „+” jelenti a valós számok halmazában az összeadást.

451. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x\circ y=a(x+y)-xy$ művelet

kommutatív, asszociatív legyen, továbbá legyen olyan e szám, hogy $x \circ e = x$ teljesüljön.

452. A pozitív valós számok halmazán értelmezzük a $*$ -gal jelölt műveletet a következőképpen: $a * b = \frac{a^2+b}{a+b^2}$ ahol „+" az összeadást, a törtvonal az osztást jelenti. Kommutatív, asszociatív-e ez a művelet? Keressük meg az $a * x = b * b$; $b * x = a * a$ egyenletek x_1, x_2, illetve x_3, x_4 gyökeit. Igazoljuk, hogy fennáll ezekre a gyökökre az $x_1 * x_2 = x_3 * x_4 = 1$.

453. Legyen d pozitív valós szám, és tekintsük a d-nél kisebb nemnegatív valós számok L halmazát. Az L halmazban definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen: bármely $x, y \in L$-re $x * y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{d^2}}$. Vizsgáljuk meg, hogy

a) $x * y$ eleme-e L-nek;

b) asszociatív-e a művelet;

c) igaz-e, hogy $x * y_1 = x * y_2$-ből $y_1 = y_2$ és $x_1 * y = x_2 * y$-ból $x_1 = x_2$ következik?

454. Legyen a, b tetszőleges racionális szám. Tekintsük az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok M halmazát.

a) Mutassuk meg, hogy bármely két M-beli szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa is eleme M-nek.

b) Jelöljük K-val azon számok halmazát, amelyek $u + v\sqrt{3}$ alakúak, ahol $u, v \in M$-nek. Igaz-e, hogy a K-beli elemek összege, különbsége, szorzata, hányadosa szintén eleme K-nak?

c) A K halmaz bővebb-e, mint az M halmaz?

d) A következő számok benne vannak-e M-ben: 18; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{2}$?

9. Komplex számok

A komplex szám fogalma, ábrázolása

455. Végezzük el a következő négyzetgyökvonásokat:

a) $\sqrt{-25}$; *b)* $\sqrt{-9}$; *c)* $\sqrt{-\frac{16}{49}}$; *d)* $\sqrt{-5\frac{1}{16}}$.

456. Az x milyen értékeire képzetesek a következő kifejezések?

a) $\sqrt{5-x}$; *b)* $\sqrt{2x+8}$; *c)* $\sqrt{1-\frac{x}{3}}$; *d)* $\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{x}{2}}$.

457. Határozzuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$$

egyenlőség fennálljon.

458. A komplex számok egyenlőségének feltétele alapján határozzuk meg az x és y valós számokat, ha

a) $2+ix-3iy = 14i+3x-5y$;

b) $\frac{8i}{x}+iy-2 = 7i-\frac{10}{x}+y$;

c) $aix+biy-a = i-a^2x-b^2y$, ha $a \neq b$, és $a \neq 0$.

459. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő komplex számokat:

a) i; *b)* $-i$; *c)* $1+i$; *d)* $1-i$; *e)* $2-i$;

f) $1+2i$; *g)* $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; *h)* $\frac{3}{4}-2i$; *i)* $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

460. Határozzuk meg a c, d valós számokat úgy, hogy teljesüljön:

a) $c+di = 10-3i$; *b)* $2c+di = 3-2i$; *c)* $\frac{1}{2}c+3di = 1$;

d) $\frac{1}{3}c-5di = 2i$; *e)* $2+(5c-3d)i = 3c-5d+14i$.

461. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő másodfokú egyenleteket, és ábrázoljuk a gyököket a komplex számsíkon.

a) $x^2-2x+10=0$; *b)* $x^2-4x+29=0$;
c) $x^2-6x+25=0$; *d)* $x^2+121=0$.

462. Egy téglalap középpontja az origó, oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak, és egyik csúcsa $-5+3i$. Írjuk fel a téglalap többi csúcsát.

Műveletek komplex számokkal

463. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $3i+4i$; *b)* $5i-\sqrt{-36}$; *c)* $\frac{1}{2}i+\sqrt{-\frac{1}{4}}$;

d) $4i\cdot 3i$; *e)* $(-3i)(-6i)$; *f)* $(a+b)i\cdot(a-b)i$;

g) $\frac{-14i}{2i}$; *h)* $\frac{7i}{-28i}$; *i)* $\frac{\frac{3}{4}i}{-\frac{9}{2}i}$.

464. Számítsuk ki és ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő műveletek eredményeit:

a) $(5+5i)+(10+4i)+(6-5i)$; *b)* $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)$;
c) $(5+3i)-(2-i)$; *d)* $2(3+5i)-5(4-2i)$;
e) $i(1+6i)-i(-4+5i)$; *f)* $(1+i)(1-i)$;
g) $(1+5i)(2-5i)$; *h)* $\frac{5i}{2+3i}$; *i)* $\frac{3-5i}{4+7i}$.

465. Végezzük el a következő műveleteket:
a) $(2+i)-(1-i)+(3-6i)$;
b) $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$;
c) $(2+3i)(4-i)+(2+5i)$;
**d)* $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

466. Határozzuk meg az x, y valós számokat úgy, hogy
a) $(4+5i)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
b) $(2-i)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
c) $(3+8i)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;
d) $(6-7i)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;

e) $(a+bi)+(x+yi)$ összeg valós szám legyen;
f) $(a+bi)+(x+yi)$ összeg képzetes szám legyen;
g) $(2+i)(x+yi)$ szorzat valós szám legyen;
h) $(a+bi)(x+yi)$ szorzat valós szám legyen;
i) $(a+bi)(x+yi)$ szorzat képzetes szám legyen;
j) $(a+bi)$ és $(x+yi)$ komplex számok összege és szorzata is valós szám legyen.
Az egyes feltételeknek adjunk geometriai jelentést is.

467. Mi a feltétele annak, hogy két komplex szám összege valós szám legyen?

468. Adjunk meg két olyan komplex számot, amelynek az *a)* összege; *b)* szorzata; *c)* összege és szorzata valós szám.

469. Mutassuk meg, hogy az

$$x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$$

komplex együtthatós másodfokú egyenlet gyökei a $2+i$ és $1-3i$ komplex számok.

470. Igazoljuk, hogy az

$$x^3-9x^2+18x+28=0$$

harmadfokú egyenlet gyökei a -1; $5+i\sqrt{3}$; $5-i\sqrt{3}$ komplex számok.

471. Mutassuk meg, hogy az

$$x^4-30x^2+289=0$$

negyedfokú egyenlet gyökei a $4+i$; $4-i$; $-4+i$; $-4-i$ komplex számok.

472. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6;\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

b) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i;\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i.\end{cases}$

A komplex szám konjugáltja és abszolútértéke

473. Írjuk fel a következő számok konjugáltját, és ábrázoljuk a komplex számsíkon:

a) 5; *b)* $2i$; *c)* $-5i$;
d) $1+i$; *e)* $-2+3i$; *f)* $8-7i$.

474. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolútértékét:

a) $3i$; *b)* $-2i$; *c)* $2-i$;
d) $5+2i$; *e)* $6-3i$; *f)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$.

475. Számítsuk ki a következő komplex számok konjugáltjának abszolútértékét. Ábrázoljuk a komplex számot és a konjugáltját is a komplex számsíkon:

a) $3-2i$; *b)* $2+7i$; *c)* $-5-3i$;
d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i$; *f)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$.

476. Milyen hosszúak az

$$1-i\sqrt{3};\quad 2i;\quad -1-i\sqrt{3}$$

csúcspontú háromszög oldalai?

477. Bontsuk fel komplex tényezők szorzatára a következő kifejezéseket:

a) a^2+b^2; *b)* a^2+4; *c)* a^2+2.

478. Igazoljuk, hogy két komplex szám összegének konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak összegével, a szorzatuk konjugáltja egyenlő a tényezők konjugáltjainak szorzatával.
Mit mondhatunk két komplex szám hányadosának konjugáltjáról?

479. Adjuk meg azokat a számokat, amelyeknek konjugáltja az eredeti szám

a) négyzete; *b)* köbe.

480. Igazoljuk, hogy ha $z = a+bi$, akkor

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leqq |z| \leqq |a|+|b|.$$

481. Bizonyítsuk be, hogy ha z_1 és z_2 komplex számok, akkor igazak a következő állítások:

a) $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$; *b)* $|z_1-z_2| \geqq ||z_1|-|z_2||$;
c) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$; *d)* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

482. Igazoljuk, hogy egy komplex szám valós számszorosának vektora egyenlő a komplex szám vektorának valós számszorosával.

484. Igazoljuk, hogy egy komplex szám i-szeresét úgy ábrázolhatjuk, hogy a komplex szám vektorát $+90°$-kal elforgatjuk.

485. Igazoljuk, hogy

a) két komplex szám szorzatához rendelt vektor hossza egyenlő a komplex számok vektorai hosszának szorzatával.
b) két komplex szám szorzatához rendelt vektor irányszöge egyenlő a komplex számok vektorai irányszögének összegével.

A komplex számok trigonometrikus alakja

486. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

a) 1; *b)* -1; *c)* i;
d) $-i$; *e)* $2i$; *f)* $1+i$;
g) $-1+i$; *h)* $1-i$; *i)* $1+i\sqrt{3}$;
j) $\sqrt{3}-i$; *k)* $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; *l)* $3+i$.

487. Számítsuk ki a $z_1 z_2$ szorzatot és a $\frac{z_1}{z_2}$ hányadost, ha

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

488. Írjuk fel algebrai alakban a következő komplex számokat:

a) $6(\cos 0°+i\sin 0°)$; *b)* $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
c) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; *d)* $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

489. Igazoljuk, hogy

a) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.
b) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$.
c) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha+i\sin n\alpha$, ha $n \in \mathbf{N}^+$.