$l)$ $\dfrac{1,438^2}{\sqrt{2,96}} + \sqrt[3]{31,87}$; $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{71,42}{5,86} - \dfrac{0,731^2}{\sqrt{317}}}$.

Vegyes feladatok

252. A változó milyen értékénél állnak fenn a következő egyenlőtlenségek?

$a)$ $\lg x > \frac{1}{2} \lg x$; $\qquad b)$ $\lg \frac{x}{2} < \lg x$;

$c)$ $\lg \frac{x}{2} > \frac{1}{2} \lg x$; $\qquad d)$ $\lg \frac{x+1}{2} \geqq \frac{1}{2} \lg x$.

253. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>0$, $b>0$ és $a \neq b$, akkor

$$\frac{\lg a + \lg b}{2} < \lg \frac{a+b}{2}.$$

254. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül?

$a)$ 90^{10} vagy $[5(1-\lg 0,1)]^{20}$;

$b)$ $100^{2 \lg 2}$ vagy $\sqrt{10^{2+0,5 \lg 16}}$.

255. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3^n]{\sqrt[3^{n-1}]{\dots \sqrt[9]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}}} =$$

256. Számítsuk ki logaritmustábla nélkül lg 2, lg 3 és lg 5 értékét, ha adott $\lg 12 = 1,0792$ és $\lg 18 = 1,2553$.

257. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor fennáll a következő egyenlőség:
$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \log_{c-b} a$, ha $b+c \neq 1$, és $c-b \neq 1$.

258. Bizonyítsuk be, hogy $a>0$, $c>0$, $a \neq 1$, $ac \neq 1$, és b az a és c mértani közepe, akkor minden n $(n \neq 1)$ pozitív számra igaz, hogy

$$\frac{\log_a n}{\log_c n} = \frac{\log_a n - \log_b n}{\log_b n - \log_c n}.$$

259. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 = 7ab$, akkor

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \qquad a>0,\ b>0.$$

IV. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyváltozós egyenletek

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

1. $a)$ $-3x = 0$; $\qquad b)$ $4\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$.

2. $a)$ $5x - 1 = 0$; $\qquad b)$ $-3x + 2 = 0$.

3. $a)$ $2x + 5 = 2x - 1$; $\qquad b)$ $2x - 2 = 1 - x$.

4. $a)$ $\frac{x}{6} = 0$; $\qquad b)$ $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$.

5. $a)$ $2x - \frac{3}{5}x = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{2}{5}x\right)$;

$b)$ $\left(\frac{7}{3}x - \frac{7}{2}x\right) + 1 = \left(x - \frac{16}{3}x\right) + \frac{16}{5}x$.

6. $a)$ $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{7}{12}x - \frac{3}{10}\right) = \frac{29}{5}$;

$b)$ $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(2x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6}$.

Egyenértékűek-e a következő egyenletek a racionális számok halmazán?

7. $4x + 16 = 10$ és $2x + 8 = 5$.

8. $x - 5 = 5 - x$ és $x - 5 + 3x = 10 - x + 2x$.

9. $\frac{x-2}{6} + \frac{3x+2}{2} + 6 = 0$ és $2x - 8 = 0$.

Egyenértékűek-e a következő egyenletek a valós számok halmazán?

10. $2x+1=3$ és $2x=2$.

11. $x-2=4-x$ és $x-2+\dfrac{5}{x-3}=4-x+\dfrac{5}{x-3}$.

12. $x-2=0$ és $(x-2)(x+3)=0$.

13. $3x+1=7$ és $(3x+1)(x-1)=7(x-1)$.

***14.** Egyenértékű-e a következő két egyenlet:

$$\frac{7x+5}{2}=9{,}5 \quad \text{és az} \quad x(x-1)=2$$

a) a természetes számok halmazán;
b) a valós számok halmazán?

***15.** Egyenértékűek-e a következő egyenletek:

$$x-1=0 \quad \text{és} \quad (x-1)(x^2-3)=0$$

a) a természetes számok halmazán;
b) a valós számok halmazán?

Mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenletek?

16. $(2x-7)+(8+3x)=26$.
17. $8x-(5-4x)=6-(4x+9)$.
18. $(6x+3)-(3x-4)=(x-4)-(x+1)$.
19. $(0{,}4x-1{,}8)-(1{,}5x+1)-(-4x-0{,}8)=3{,}8$.
20. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$.
21. $3x(x+1)-x(3x-1)=x-7$.
22. $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)+8]=-1$.
23. $(3x-1)(2x+5)-3(2x-1)(x+2)=24$.
24. $(x-3)(x-4)-(1-x)(2-x)=0$.
25. $2[3(4-x)-2(3+2x)-2]=44$.
26. $-\{-x-[-x-(-x)]\}=1$.
27. $2[3(x+4)-7]+1=8x-11$.
28. $2[4-5(3x-5)]=60-15x$.
29. $2[3(x-2)-1]+1=(2x+1)3+7$.
30. $3[4-2(x-1)x]-2x(1-3x)=2-3(x-1)$.

31. $1-2[5(3x-1)-5(1+2x)]=3(7-3x)-x$.
32. $3\{3[4-x-2(3+2x)]-1\}=69$.
33. $15\{1-2[x-(3-x)]\}=72$.
34. $\frac{3}{2}\left\{x-\left[3\left(x+\frac{7}{3}\right)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=3(x-48)$.
35. $2x-\{-2x-[-2x-(-2x)-2x]-2x\}-2x=\frac{11}{3}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

36. $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$.
37. $6(x+1)^2+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)^3=32$.
38. $5x(x-3)^2-5(x-1)^3+15(x+2)(x-2)=5$.
39. $(x+2)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)=42$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

40. *a)* $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{9}=44$; *b)* $\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{x-1}{4}=0$;
c) $2x-\left(\dfrac{5}{7}x-\dfrac{3}{4}x\right)=57$; *d)* $2x-10=1\dfrac{2}{3}(x-3)$;
e) $\dfrac{3x}{8}-\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{1-x}{6}\right)=\dfrac{7}{8}$.

41. $6-\dfrac{6x-4}{5}=2x+\dfrac{2-5x}{3}$.

42. $3x-\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{3x-2}{2}=1-\dfrac{x-1}{3}$.

43. *a)* $1-\dfrac{6-2x}{3}=x-\dfrac{x+3}{2}$; *b)* $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{5x-1}{6}=2$.

44. $x-\dfrac{6-2x}{3}=2x-4-\dfrac{x+3}{2}$.

45. $x+\dfrac{x+1}{4}=2x+\dfrac{5-3x}{2}-\dfrac{x-3}{8}$.

46. $2\frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{3x}{2}\right)=\frac{7}{20}.$

47. $0{,}7\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{4}{5}(0{,}9x-3)=\frac{7}{15}.$

48. $14\frac{1}{2}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{3x}{2}-\frac{2(x-7)}{3}.$

49. $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{7}(5x-6)=\frac{22x-63}{105}-\frac{1}{5}(3x-4).$

50. $\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}.$

51. $\frac{2(2-3x)}{0{,}01}-2{,}5=\frac{0{,}02-2x}{0{,}02}-7{,}5.$

Van-e a következő egyenleteknek megoldása a természetes számok halmazában?

52. *a)* $\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}$; *b)* $\frac{x}{x-4}=\frac{8}{x-4}.$

53. *a)* $\frac{2}{x}+\frac{5}{x}=1$; *b)* $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-2}=\frac{1}{3}.$

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

54. $\frac{x+3}{4x}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{12x}+\frac{1}{12}.$

55. $\frac{12x-9}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=2.$

56. $2x+\frac{x^2-4}{x+2}=1.$

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

57. $\frac{x^2+4x+4}{x+2}=2x+6.$

58. $\frac{9-x}{x-4}=\frac{5}{x-4}+3.$

Van-e a következő egyenleteknek megoldása a racionális számok halmazán?

59. $\frac{x-1}{2x}-\frac{2x}{x-1}=-\frac{3}{2}.$

60. $2-\frac{3x}{3x-2}=\frac{2x-9}{2x-5}.$

61. $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{2x+3}{5}.$

Milyen valós számokra teljesülnek a következő egyenletek?

62. $\frac{7-x}{x-6}-5=\frac{1}{x-6}.$

63. $\frac{1}{x-4}=\frac{x-2}{2x-8}.$

64. $\frac{10-x}{x-7}-4=\frac{15+2x}{x-7}.$

65. $\frac{4x-6}{5x-7}=9-\frac{3x-19}{5x-7}.$

66. $\frac{3}{x(2x-1)}+\frac{5}{x}=\frac{1}{2x-1}.$

67. $\frac{7}{2(x-1)}+\frac{5}{x-1}=3.$

68. $\frac{7}{5x+5}-\frac{3}{10x+10}=\frac{11}{120}.$

69. $\frac{2x+7}{x}-2=\frac{7}{9x+2}.$

70. $\frac{8x-3}{6x-3}\cdot\frac{3x-4}{4x-5}=1.$

71. $\dfrac{x-1}{5}\cdot\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{2x+3}{x}+\dfrac{x}{5}.$

72. $\dfrac{4x+3}{x-2}\cdot\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{2}{3}x+7.$

73. $\dfrac{2x+1}{3x+1}:\dfrac{4}{x}=\dfrac{x+1}{6}.$

74. $\dfrac{10(x-5)}{x-2}:\dfrac{3x-2}{x-2}=2.$

75. $\dfrac{x+1}{x+7}:\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x+1}{x+7}\right)=-4.$

76. $\dfrac{18x+2}{x-4}-\dfrac{15x+1}{x+5}=3.$

77. $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{7}{2}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{5}{2-2x}.$

78. $\dfrac{2x+1}{x-3}-6=\dfrac{4x-5}{3-x}.$

79. $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{3(3x-1)}{x^2-9}.$

80. $\dfrac{2-6x}{3-x}=3+\dfrac{3x+4}{x-3}.$

81. $\dfrac{x-4}{x+4}-\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{16x}{x^2-16}=0.$

82. $\dfrac{x^2}{4-x^2}-\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{6}{x+2}.$

83. $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0.$

84. $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-2x}-\dfrac{4}{x^2+2x}=0.$

85. $\dfrac{5x-3}{x^2+3x}-\dfrac{x+1}{3x^2+9x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{2}{x+3}.$

86. $\dfrac{x+1}{2-2x^2}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{1}{2-2x}=0.$

87. $\dfrac{3}{1-x^2}=\dfrac{2}{1+2x+x^2}-\dfrac{5}{1-2x+x^2}.$

88. $\dfrac{3}{4x^2+20x+25}+\dfrac{4}{4x^2+4x+1}=\dfrac{7}{4x^2+12x+5}.$

89. $\dfrac{2x-7}{2x^2-4x+2}+\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{3-3x}=\dfrac{2}{x-1}.$

Elsőfokú egyenletre vezető szöveges feladatok

90. Egy Zöldért-raktárban kétszer annyi burgonyát tároltak, mint egy másikban. Miután az első raktárból 75 tonna burgonyát elszállítottak és a másikba 35 tonnányit hoztak, a burgonya mennyisége a két raktárban egyenlő lett. Hány tonna burgonya volt eredetileg az egyes raktárakban?

91. Két TÜZÉP-telep közül az egyiken kétszer annyi szén van, mint a másikon. Ha az első telepre még 8 tonna szenet hoznak, a másikra pedig még 14,5 tonnát, akkor mindkét telepen egyenlő mennyiségű szén lesz. Hány tonna szén van az egyes telepeken?

92. Egy tízforintost felváltunk 10 és 20 filléresekre. Hány darabot kapunk mindegyikből, ha összesen 90 pénzdarabot kapunk vissza?

93. 525 Ft-ot egyenlő számú 5 Ft-os és 10 Ft-os pénzérmékkel fizettünk ki. Hány 5 Ft-ossal és 10 Ft-ossal fizettünk?

94. Egy osztálykirándulásra mindenkinek 50 Ft-ot kellett eredetileg hoznia, viszont 3 tanuló költségét a többiek adták össze, így fejenként 5 Ft-tal többet fizettek be. Hány tanulója volt az osztálynak?

95. Egy kutya 80 m távolságban meglát egy nyulat, és elkezdi üldözni. A két állat egyszerre kezd futni a kutyát a nyúllal összekötő egyenes mentén. A nyúl 10-et, a kutya 9-et ugrik másodpercenként. Mennyi idő alatt éri utol a kutya a nyulat, ha a kutyaugrás 1 m hosszú, a nyúlugrás pedig csak 80 cm?

96. Egy kutya 30 m távolságra levő nyulat kezdett üldözni. Egyszerre kezdték a futást, és a kutya egyenes vonalú pályán 3 perc alatt elfogta a nyulat, mert átlagsebessége 10 m/min-nel nagyobb volt, mint a nyúlé. Mekkora utat futott be a nyúl az üldözés közben?

97. Karcsi jutalmul egy bizonyos pénzösszeget kap. Takarékoskodik, és miután ezt a pénzösszeget megkétszerezi, elkölt belőle 40 forintot. A megmaradt pénzt ismét megkétszerezi, majd elkölt belőle 100 forintot. Az így megmaradt pénzt ismét megkétszerezi, és elkölt belőle 480 forintot. Ekkor annyi pénze marad, mint amennyit jutalmul kapott. Mennyi volt a jutalom?

98. Gondoljatok egy számot, szorozzátok meg 2-vel, a szorzathoz adjatok hozzá 50-et, a kapott számot osszátok el 2-vel, és a hányadosból vegyétek el a gondolt számot.
Igaz-e, hogy az eredmény mindig 25 lesz?

99. Egy iskolai ünnepély rendezésével 6000 Ft bevételt szeretnénk biztosítani. Ezért háromféle jegyet készítünk 5–5 Ft árkülönbséggel, a legolcsóbb jegyből 200-at, a közepes árú jegyből 160-at és a legdrágább jegyből 80-at. Mennyi legyen a legolcsóbb jegy ára?

100. 18 pénzdarabom van, csupa 2 Ft-os és 5 Ft-os. Ha annyi 5 Ft-osom volna, ahány 2 Ft-osom van, és annyi 2 Ft-osom volna, ahány 5 Ft-osom van, akkor kétszer annyi pénzem volna, mint így. Mennyi pénzem van?

101. Egy apának, az anyának és a lányának az életkora összesen 85 év. Az apa 5 évvel idősebb, a lány 25 évvel fiatalabb az anyánál. Hány évesek külön-külön?

102. Egy 27 éves apának 3 éves a fia. Hány év múlva lesz az apa háromszor annyi idős, mint a fia?

103. Hány éves az, aki azt mondja: „3 év múlva félannyi idős leszek, mint amennyi *A* 6 évvel ezelőtt volt, amikor én harmadannyi éves voltam, mint amennyi *A* most”?

104. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az alapon fekvő szöge 36°-kal nagyobb a szárak szögénél?

105. Mekkorák egy háromszög szögei, ha az egyik szöge 20°-kal nagyobb a másodiknál és a harmadik szöge pedig 10°-kal kisebb az elsőnél?

106. Egy háromszög kerülete 48 cm, oldalai hosszának aránya 3 : 4 : 5. Határozzuk meg az egyes oldalak hosszúságát.

107. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 24 cm. Az alapja 1,5 cm-rel hosszabb a száránál. Milyen hosszúak a háromszög oldalai?

108. Egy 12 cm kerületű egyenlő szárú háromszögben az alap hossza a szárak hosszának a $\frac{2}{3}$ része. Mekkorák a háromszög oldalai?

109. Egy város területe 5 egybevágó négyzetből áll olyan elrendezésben, hogy az alaprajza *L* alakú. A várost övező kőfal annyi km hosszú, mint ahány km^2 a város területe. Milyen hosszú a kőfal?

110. Melyik az a szám, amelynek $\frac{3}{4}$ része 5-tel nagyobb, mint az $\frac{1}{3}$ része?

111. Két szám összege 76, különbsége 18. Melyik ez a két szám?

112. Egy tört nevezője 5-tel nagyobb a számlálójánál. Ha a tört számlálójához 14-et hozzáadunk, a nevezőjéből pedig 1-et elveszünk, akkor a tört reciprokával egyenlő nagyságú törtet kapunk eredményül. Melyik ez a tört?

113. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 2. Ha a kisebbik számot elosztjuk 4-gyel, a nagyobbikat pedig 9-cel, akkor az első hányados 4-gyel lesz nagyobb a másodiknál. Melyik ez a két szám?

114. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$, különbségük pedig 12. Melyik ez a két szám?

115. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetihez képest feleakkora számot kapunk. Az eredeti szám első számjegye kétszerese a második számjegynek. Melyik ez a szám?

116. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó számjegyével, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

117. Egy háromjegyű szám első és harmadik számjegyének az összege 8, a második számjegye 2. Ha felcseréljük az első és a harmadik számjegyet és az így kapott számból kivonjuk az eredeti számot, 594-et kapunk. Melyik az eredeti szám?

118. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 12. Ha számjegyeit felcseréljük, 18-cal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

119. Egy kétjegyű számban a tízesek száma 3-mal nagyobb, mint az egyeseké. Ha a kétjegyű számhoz hozzáadjuk azt a számot, amelyik számjegyeinek a megfordításával keletkezik, akkor 143-at kapunk. Melyik ez a szám?

120. Melyik az a kétjegyű szám, amelyben a számjegyek összege 9, és amelyet a számjegyei felcserélésével nyert kétjegyű számból kivonva az eredeti szám $\frac{1}{5}$ részét kapjuk?

121. Egy kétjegyű számban 3-mal több egyes van, mint tízes. Ha a számjegyei közé számjegyeinek az összegét iktatjuk be harmadik jegyül, az eredeti szám 11-szeresét kapjuk. Melyik kétjegyű számból indultunk ki? Hány ilyen szám van?

122. Egy könyv ára vászonkötésben 168 Ft, ami 68%-kal több, mint papírfedéllel. Mennyi az ára a papírfedelű könyvnek?

123. Ha egy szám 15%-ához hozzáadunk $\frac{9}{5}$-öt, akkor a szám 18%-át kapjuk. Melyik ez a szám?

124. Egy tanuló két hanglemezt adott el azonos áron. Az egyiken 20%-ot nyert, a másikon 20%-ot vesztett, így összesen 10 forinttal kapott kevesebbet értük, mint amennyiért vette őket. Mennyiért adta és vette a hanglemezeket?

125. Egy téglalap egyik oldalát 25%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a területe ne változzék?

126. Két üzemnek a terv szerint egy hónapban 360 db szerszámgépet kellett készítenie. Az első üzem 112%-ra teljesítette a tervet, a második pedig 110%-ra, és így a két üzem egy hónap alatt 400 db szerszámgépet gyártott. Hány szerszámgépet készített terven felül külön-külön a két üzem?

127. Két brigád együtt 8200 transzformátortekercset készített. Az ellenőrzés az egyik brigád által készített tekercseknek a 2%-át, a másikénak pedig 3%-át hibásan szigeteltnek találta, összesen 216 darabot. Hány darab hibátlan tekercset készített mindegyik brigád?

128. Egy benzinkút 1800 liter űrtartalmú tankját egyszerre két tartálykocsiból töltik fel. Az első tartálykocsiból percenként 20 literrel kevesebb benzint lehet áttölteni, mint a másikból. 15 perc alatt a benzinkút tankja 75%-ig telik meg. Hány liter benzin folyik át a benzinkútba az első, illetve a második tartálykocsiból percenként?

***129.** Az ország középiskolai tanulóinak $1\frac{2}{3}$%-a foglalkozik a KÖMAL feladatainak a megoldásával, mégpedig a fiúknak a $2\frac{1}{3}$%-a, a lányoknak a $\frac{2}{3}$%-a. A 90 000 középiskolai tanuló közül mennyi fiú és mennyi lány KÖMAL feladatmegoldó?

***130.** 850-et osszunk szét két részre úgy, hogy az első rész 8%-ának és a második rész 24%-ának az összege 850-nek a 12%-a legyen.

***131.** Két egymással szembe haladó repülőgép közül az egyik *A*-ból a tőle 3600 km-re levő *B*-be repül. A másik repülőgép *B*-ből megy *A*-ba. Mindkét repülőgép időjárási problémák miatt egy közbenső *C* repülőtéren 2 órát vesztegelt. Utána mind az első, mind a második gép 25%-kal fokozta a sebességét, és így az első repülőgép *B*-be 48 perc, a második repülőgép *A*-ba 1 óra 36 perces késéssel érkezett meg. Mekkora a két repülőgép eredeti sebessége, ha a második repülőgép sebessége 200 km/h-val nagyobb, mint az elsőé?

132. Hány kilogramm 410 Ft-os, illetve 520 Ft-os egységárú kávéfajtából tud a Compack Kereskedelmi Vállalat 200 kilogramm 480 Ft-os egységárú kávékeveréket előállítani?

133. 0,15 kg 15%-os sóoldatból mennyi vizet kell elpárologtatni, hogy 20%-os sóoldat maradjon vissza?

134. 1,3 kg sóoldathoz 0,8 kg 15%-os sóoldatot öntünk, így 10%-os sóoldat jön létre. Hány %-os volt az eredeti oldat?

135. Mennyivel több kénsav van 2,2 kg 24%-os kénsavoldatban, mint ugyanennyi 15%-osban?
A 2,2 kg 24%-os kénsavoldatnak hány grammját kellene tiszta vízzel kicserélnünk, hogy 15%-os kénsavoldatot kapjunk belőle?

136. Mennyi 26%-os kénsavat kell hozzákeverni 40 kg 68%-os kénsavhoz, hogy 32%-os koncentrációjú kénsavat állítsunk elő?

137. 10 liter 87°-os alkoholunk van. Mennyi vizet kell hozzáöntenünk, hogy 80°-os alkoholt kapjunk?

138. Ugyanabból az anyagból két különböző töménységű oldat áll a rendelkezésünkre, mégpedig 20 liter 45%-os és 30 liter 60%-os. Hány %-os oldatot tudunk előállítani összekeverésükkel?

139. Összekeverünk 3 liter 12%-os, 5 liter 18%-os és 2 liter 22%-os alkoholt. Hány százalékos keveréket állítottunk elő?

140. Egy cink–réz ötvözetben 82% réz van. Ha az ötvözetbe még újabb 18 kg cinket rakunk bele, akkor az ötvözet réztartalma 70%-ossá válik. Mennyi cinket és rezet tartalmaz külön-külön a régi és az új ötvözet?

141. Egy ezüst–réz ötvözetben 0,8 kg ezüst van. Hány kg réz van benne, ha az ötvözet sűrűsége $10{,}2 \cdot 10^3$ kg/m^3, az ezüst sűrűsége $10{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, a rézé $8{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3?

***142.** Két arany–ezüst ötvözet van. Az elsőben 2:3, a másodikban 3:7 ezen fémek aránya. Mennyit kell venni mindegyik ötvözetből, hogy 80 kg olyan új ötvözetet kapjunk, amelyben az arany és az ezüst tömegének aránya 5:11?

143. Egy üzemben a hűtőfolyadék két csapon keresztül engedhető egy tartályba. Ha csak az első csapot nyitjuk meg, a tartály 6 perc alatt telik meg, a másik csapon keresztül pedig 10 perc alatt. Hány perc alatt telik meg a tartály, ha egyszerre mindkét csapot megnyitjuk?

144. Egy kád csupán a melegvizes csapból 20 perc alatt telik meg, csak a hidegvizes csapból pedig 25 perc alatt. Mennyi idő alatt telt meg a kád, ha a melegvizes csap 4 perccel kevesebb ideig volt nyitva, mint a hidegvizes csap?

145. Egy úszómedencébe három cső torkollik. Az első kettőn a medencébe befolyik a víz, a harmadikon pedig kifolyik belőle. Egyedül az első csövön keresztül a medence 2 óra alatt telik meg, a másodikon keresztül 5 óra alatt, a tele medencéből pedig a harmadik csövön át 10 óra alatt tud kifolyni az összes víz. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha egyszerre mind a három csapot megnyitjuk?

146. Egy medencébe 3 cső vezet. Az elsőn át 2,5 óra alatt, a másodikon 3 óra alatt, a harmadikon 1,5 óra alatt telik meg a medence. Egy alkalommal mindhárom csövet együttesen működtetik, de 22,5 perc után a harmadik csövet elzárják. Mennyi idő alatt telik meg így a medence?

147. Egy víztároló 2 csövön át tölthető meg, mégpedig egyedül az első cső 4 óra alatt, egyedül a második cső 3 óra alatt tölthetné meg. Egy harmadik csövön keresztül a víztároló 1 óra alatt ürül ki. Mennyi idő alatt ürül ki a tároló, ha mindhárom cső egyszerre van nyitva?

148. Egy építkezésnél a talajvíz kiszivattyúzására 3 szivattyút állítottak be. Egyedül az első szivattyúval 3 óra alatt, a másodikkal 4 óra alatt, a harmadikkal 6 óra alatt lehet a vizet kiszivattyúzni. A 3 szivattyú 0,5 órás együttes munkája után a maradék vizet az első és a harmadik szivattyúval szivattyúzzák ki. Összesen mennyi időbe telik a víz kiszivattyúzása?

***149.** Két vízcsapot egyszerre kinyitva $\frac{2}{3}$ óra alatt töltenek meg egy medencét. Az általuk szolgáltatott vízmennyiségek aránya 3:4. Mikor telik meg a medence, ha az első csapot 6 órakor, a másodikat 6 óra 25 perckor nyitják meg?

150. Egy gyárban két munkás vállalja, hogy együttes munkával 6 nap alatt elkészít egy munkagépet. Tudják-e a vállalásukat teljesíteni, ha külön-külön dolgozva az egyik munkás 10 nap alatt, a másik munkás 15 nap alatt készülne el vele?

151. Egy kertet az apa 3,5 óra, a fia 6 óra alatt ásná fel egyedül. Mennyi idő alatt készülnek el a kert felásásával, ha mindketten dolgoznak?

152. Egy apa 1 óra 40 perc alatt, felesége 3 óra 20 perc alatt, kisfia 6 óra 40 perc alatt ássa fel a kertjüket. Mennyi idő alatt készülnek el a kert felásásával, ha egyszerre mindhárman ásnak?

153. Szőlőtelepítés előtt a talajt meg kell forgatni. Erre a műveletre 12 nap áll rendelkezésre. Napi 1 m^3-rel többet sikerült megforgatni a tervezettnél, így 8 nap alatt készült el a munka. Hány m^3 földet kellett megforgatni?

154. Egy üzemben az egyik sajtológép 120 m^2 lemezt 5 óra alatt munkál meg, egy másik gép pedig 4,5 óra alatt. Hány óra alatt munkálják meg együttesen a lemezt?

155. Egy asztalosüzemnek a vártnál gyorsabb almaérés miatt a megrendelt gyümölcsösládákat 5 hét helyett 4 hét alatt kellett elkészítenie, ezért napi 175 ládával megemelte a termelést. Mennyi láda készült el az üzemben 1 nap alatt, ha minden héten 6 napot dolgoztak?

156. Egy 50 m/s sebességgel haladó test és egy 12 m/s sebességgel haladó test egy helyről, egy időben indulva egy irányban mozog. Hány másodperc múlva lesz a távolságuk 209 m?

157. Egy 36 m/s és egy 20 m/s sebességgel haladó test ugyanarról a helyről, egy időben indulva ellenkező irányban haladva távolodik egymástól. Hány másodperc múlva lesz a távolságuk 574 m?

158. Egy 5,3 km hosszú ellipszis alakú ügetőpálya startpontjától egyszerre indul el két zsoké egymással ellenkező irányban. Az egyik átlagsebessége 12,5 km/h, a másiké 14 km/h. Mennyi idő múlva találkoznak?

159. Egy 5,3 km hosszú ellipszis alakú ügetőpálya startpontjától egyszerre indul el két zsoké egymással megegyező irányban. Az egyik zsoké sebessége 12,5 km/h, a másiké 14 km/h. Mennyi idő múlva találkoznak?

160. Két pontszerű test ugyanazon körpályán kering ugyanabban az irányban. Sebességük aránya 6:10. Valamely időpontban találkoznak a körpálya egy bizonyos pontján. Ugyanebben a pontban a legutóbbi találkozás 3 perccel azelőtt volt. Számítsuk ki a testek keringési idejét. (Oldd meg következtetéssel!)

161. Egy hajó két végállomása közti utat 4 óra 40 perc alatt tette meg oda-vissza. A sebessége a folyón lefelé menet 16 km/h volt, a folyón felfelé pedig 12 km/h. Milyen messze van egymástól a két végállomás?

162. Egymástól 17 km távolságból egymás felé egyszerre indul el egy 60 km/h átlagsebességű motorcsónak és egy 8 km/h átlagsebességű evezős csónak. Mennyi idő múlva találkoznak állóvízben? Mennyi idő múlva találkoznak, ha a 4 km/h sebességű folyón a motorcsónak felfelé halad? Mi történik, ha az evezős csónak megy felfelé a folyón?

163. Egy folyón fölfelé haladva 8 km/h-val kisebb egy hajó sebessége, mint lefelé haladva. A két kikötő között felfelé 15 óráig, lefelé 10 óráig tart az út. Hány kilométert tesz meg ez a hajó fölfelé és lefelé óránként? Milyen távol van egymástól a két kikötő?

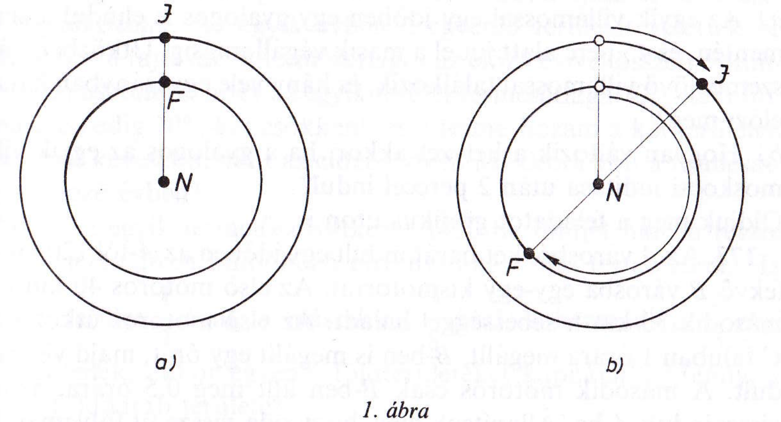
164. Egy felfelé evező csónakból kiesik egy labda, de ezt csak 10 perc múlva veszik észre. Ekkor azonnal megfordulnak és utána eveznek. A csónak megfordulása után mennyi idővel érik utol a labdát, ha a folyó folyásának sebessége 4 km/h, és a csónak állóvízen

8 km/h sebességgel haladna? Változtassátok meg először a folyó, azután a csónak sebességét, és figyeljétek meg, hogy ez hogyan befolyásolja az eredményt.

165. Két város közti távolságot egy gépkocsi 1,5 nap alatt teszi meg. Az első félnap a teljes távolság $\frac{3}{8}$-át, a második félnapon az $\frac{5}{12}$-ét teszi meg. A harmadik félnap 65 km-rel tesz meg többet a teljes távolság $\frac{1}{6}$ részénél. Mekkora a városok közti távolság?

166. Az országúton két kerékpáros halad egymással szemben. Az egyik sebessége 5 m/s, a másiké 7 m/s. Induláskor 300 méterre voltak egymástól. Mennyi idő múlva lesz köztük ismét 300 m a távolság? Lehet-e 500 m a köztük levő távolság?

167. A Jupiter bolygó Nap körüli keringési ideje 11,86 év. Mennyi idő telik el, míg a Föld és a Jupiter egymáshoz legközelebbi *a)* helyzetükből az egymástól legtávolabbi *b)* helyzetbe kerülnek *(1. ábra)*?



1. ábra

168. Valaki elindult az *A* tanyáról a *B* faluba 3 km/h sebességgel. Két óra múlva az *A* tanyáról ugyanazon az úton elindult a *B* faluba egy másik gyalogos 4,5 km/h sebességgel. Az *A* tanyától mekkora távolságra, és mennyi idő múlva fogja utolérni a másik gyalogos az elsőt? A feladat megoldását grafikus úton is végezzük el.

169. Az *A* és *B* turistaházból, amelyek egymástól 10 km távolságra vannak, egyszerre indul el egy-egy turista egymással szembe. Az egyik óránként 4 km-t, a másik 6 km-t halad. Határozzuk meg grafikus úton, hogy mennyi idő múlva és hol találkoznak.

170. Egy 99 km/h sebességgel haladó személygépkocsi 9 óra 53 perckor érkezik meg, míg a 63 km/h sebességgel haladó tehergépkocsi ugyanazon az útvonalon 11 óra 11 perckor érkezik meg ugyanarra a célállomásra. Hány kilométerrel a cél előtt előzte meg a személyautó a teherautót?

171. Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg az utat a kiinduló állomástól a végállomásig. A kiinduló állomásról 2 percenként indítják az autóbuszokat. Egyik autóbusszal egy időben indul a kiinduló állomásról egy autó, amelynek sebessége négyszer akkora, mint az autóbuszé. Hány autóbuszt előz meg az autó a végállomásig? A feladatot oldjuk meg grafikus úton is.

172. 3 km hosszú villamosvonal két végállomásáról 5 percenként egyszerre indítanak egy-egy villamost. A villamosok menetideje 10 perc.

a) Az egyik villamossal egy időben egy gyalogos is elindul a sínek mentén, és 45 perc alatt jut el a másik végállomásig. Útközben hány szembejövő villamossal találkozik, és hány vele egy irányban haladó előzi meg?

b) Hogyan változik a helyzet akkor, ha a gyalogos az egyik villamoskocsi indítása után 2 perccel indul?

Oldjuk meg a feladatot grafikus úton is.

173. Az *A* városból két barát indult egy időben az *A*-tól 120 km-re fekvő *B* városba egy-egy kismotorral. Az első motoros 40 km/h, a második 30 km/h sebességgel haladt. Az első motoros útközben a *C* faluban 1 órára megállt, *B*-ben is megállt egy órát, majd visszaindult. A második motoros csak *B*-ben állt meg 0,5 órára, azután visszaindult *A*-ba. Állapítsuk meg, hogy oda-vissza út folyamán hol találkozott egymással a két motoros. A feladat megoldását grafikus úton végezzük el.

174. Két egyenlő magasságú gyertyát egyszerre gyújtunk meg. Az első 4 óra alatt, a másik 3 óra alatt ég el. Hány óra múlva lesz az első gyertyacsonk kétszer olyan magas, mint a második, ha a gyertyák magassága egyenletesen csökken? Oldjuk meg a feladatot grafikus úton is.

175. Két pont mozog egyenletesen két kör kerületén, amelyek sugarainak aránya 1:6. A nagyobb sugarú körön mozgó pont 10 s alatt 2 m-rel többet halad és így ötödannyi fordulatot tesz meg, mint a másik. Határozzuk meg a két pont sebességét.

176. Egy traktor hátsó kerekének a sugara kétszer akkora, mint az első keréké. Ha az első kerék kerülete 1 m-rel nagyobb, a hátsóé 1 m-rel kisebb volna, akkor az első kerék 300 méteren ugyanannyit fordulna, mint a hátsó 375 méteren. Mekkora a két kerék sugara?

***177.** Az óra mutatói 6 órakor egy egyenesbe esnek és ellentétes irányba mutatnak. 6 óra után legközelebb mikor következik be ez a helyzet, és 6 óra előtt?

***178.** Déli 12 órakor az óra mutatói fedik egymást. Hány órakor fogják egymást legközelebb ismét fedni?

***179.** 3 óra után mikor találkozik és mikor merőleges egymásra először az óra két mutatója?

***180.** Egy tangazdaságban különböző gabonafajták termesztésével foglalkoznak. Az egyik évben 2 egyenlő területet vetettek be ugyanazzal a fajtával. A termésátlagot az előző évivel összehasonlítva azt tapasztalták, hogy az egyik terület termésátlaga 10%-kal nőtt, a másiké pedig 10%-kal csökkent, és a terméshozam a két területen 30 kg-mal kevesebb, mint az előző évben. Mekkora volt a termésátlag az előző évben?

***181.** Az egyik termelőszövetkezet 1430 ha földjét három részre osztja, mert három különböző növényt akar rajta termeszteni. Ha az első terület $\frac{1}{3}$-ával, a másodikat $\frac{3}{8}$-ával, a harmadikat $\frac{2}{5}$-ével csökkentenék, akkor egyenlő földterületeket kapnának. Mennyi a három földdarab területe?

***182.** Nyáron az utcákat öntözőkocsikból locsolják. A kocsi vezetőjének ügyelnie kell arra, hogy a víz más járművet ne érjen, viszont fontos, hogy csak addig zárja el a csapot, ameddig szükséges. Hány méteres útszakasz marad szárazon

a) ha vele egyirányban,
b) ha vele ellentétes irányban
haladó 4,5 m hosszú autó mellett halad el, feltéve, hogy az öntözőkocsi sebessége 25,2 km/h, az autó sebessége 21,6 km/h?

***183.** Az A-ból 60 km/h sebességgel haladó személyvonatot az ugyancsak A-ból induló és 120 km/h sebességgel haladó gyorsvonat menetrend szerint B-ben éri utol. Egy alkalommal a személyvonat az út $\frac{3}{4}$-ének megtétele után sebességét pályajavítási munkák miatt $\frac{2}{3}$-ára csökkentette, így a gyorsvonat B előtt 48 km-rel érte utol. Milyen távol van a B az A-tól? A feladatot grafikus úton oldjuk meg!

***184.** Az A faluból egy tanuló 15 óra 33 perckor indult el kerékpáron a B falu felé, ahová 18 óra 45 perckor érkezett meg. Ugyanezen a napon egy másik tanuló B-ből 14 óra 15 perckor indult el ugyanazon az úton, és állandó sebességgel haladva 16 óra 55 perckor ért A-ba. Útközben egyszerre érkeztek meg egy hídhoz, amelyet az első tanuló 1 perccel később hagyott el, mint a második tanuló. Mikor értek a hídhoz és hol vannak a híd végpontjai?

***185.** Két város, A és B egymástól s $(s>0)$ távolságban egy hajózható folyó mellett fekszik, és a folyóparton vasútvonal vezet. A-ból elindul egy vonat 75 km/h sebességgel B felé, ugyanakkor B-ből két hajó indul el ellentétes irányban, de egyenlő sebességgel. A vonat a szemben jövő hajóval félannyi idő múlva találkozik, mint amennyi idő alatt utoléri a másik hajót. Mekkora a hajók sebessége?

***186.** Három játékos sakkozik. A játék feltételei a következők:
a) mindegyik játszmában ketten nyernek, egy veszít;
b) a vesztes köteles a nyerők meglévő pénzét megkétszerezni.
Mennyi pénzzel kezdtek hozzá a játékhoz, ha három játszma után, amiből mindegyik játékos egyet vesztett, egyformán 104–104 Ft-juk volt?

***187.** Több testvér osztozik az örökségen. A végrendelet értelmében A kap 20 000 Ft-ot és a maradék tizedrészét, B kap 40 000 Ft-ot és a maradék tizedrészét, és így tovább. Az osztozkodás után kitűnt, hogy a testvérek mindegyike egyenlő összeget kapott. Hányan voltak a testvérek, mennyit kapott mindegyik külön-külön, és mekkora volt az örökség?

***188.** Három gyerek: A, B, C ügyességi játékot játszik, és mivel mindhárman golyógyűjtők, abban állapodnak meg, hogy a mindenkori vesztes a másik két játékos golyóállományát megháromszorozza (vagyis kétszer annyi golyót ad mindegyiknek, mint ahány golyója volt az illetőnek). Három játszma után, amelyeket rendre A, B, C vesztett el, mindegyik játékosnak egyenlő számú golyója van. Hány golyója volt eredetileg mindegyiknek, ha az első játszma után C-nek 54 golyóval volt többje, mint A-nak?

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó, elsőfokúra visszavezethető egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

189. *a)* $2|x|-5=7-|x|$; *b)* $\frac{1}{3}|x|-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

190. *a)* $2|x|-4{,}5=5-\frac{3}{8}|x|$; *b)* $0{,}3|x|-1=3-0{,}5|x|$.

191. $|x|=x+2$.
192. $|x-2|=3$.
193. $|x-4|=5$.
194. $|4-x|=5$.
195. $|x+8|=1$.
196. $|7+x|=5$.
197. $|2x-1|=3$.
198. $|x+3|=|x-5|$.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

199. *a)* $x+|x|=4$; *b)* $x\cdot|x|=-9$.
200. $|x-5|=|x+4|$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

201. $|3x-4|=-x+4$.

202. $|2x-5| = x-1.$

203. $|3+x| = 2x+3.$

204. $\dfrac{3\,|x|-2}{|x|-1} = 2.$

205. $\big||x|+3\big| = 3.$

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

206. $1-|x| = \dfrac{1}{2}.$

207. $1+|x| = \dfrac{1}{2}.$

208. $2-|x| = 1{,}5.$

209. $|x| = 2x+1.$

210. $|2-x| = 2x+1.$

211. $|x+2| = 2(3-x).$

212. $\dfrac{7x+4}{5}-x = \dfrac{|3x-5|}{2}.$

213. $\left|\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{4}\right| = x-1.$

214. $|5-x| = |x+4|.$

215. $\left|\dfrac{3x-2}{x-1}\right| = 2.$

216. $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3.$

***217.** $\left|\dfrac{3\,|x|-2}{|x|-1}\right| = 2.$

***218.** $\left|\dfrac{3\,|x|+2}{|x|-1}\right| = 3.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

219. $3\,|x|+2 = 3\,|x|-3.$

220. $|3x-2|+x = 11.$

221. $|x| = x.$

222. $|x|-|x-2| = 2.$

223. $|x-1|+|x-2| = 1.$

224. $|x-1|+|x-2| = 2.$

225. $|x-3| = x-3.$

226. $|x-3| = |3-x|.$

227. $|x-3| = x.$

228. $|2x-3|+|2x+3| = 14.$

229. $|2x-3|+|2x+3| = 6.$

***230.** $|2x-1|+|3x+2|+|x| = 3.$

***231.** $|x-1|-2\,|x-2|+3\,|x-3| = 4.$

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

232. $\dfrac{2-3\,|x|}{1+|x|} = 1.$

233. $\left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right| = 1.$

***234.** $\left|\dfrac{2-3\,|x|}{1+|x|}\right| = 1.$

***235.** $|x-2|+|x-3|+|2x-8| = 9.$

***236.** $|4x-1|-|2x-3|+|x-2| = 0.$

***237.** $|x-1|+|x+2|-|x-3| = 4.$

***238.** $|x-2|+|x-3|+2\,|x-8| = 9.$

***239.** $|x-2|+|x-4|-|2x-6| = 2.$

***240.** $|1-2x|+|3x+2|+|x| = 5.$

241. $\big||x|-1\big| = 4+x.$

242. $\big||x|-2\big| = 1.$

*243. $\big||x+2|-3\big| = 1.$

*244. $\big|2-\big|1-|x|\big|\big| = 1.$

*245. $\big|3-2|x|\big| = |2-x|-3.$

*246. $\Big|\big||x|-2\big|-1\big|-2\Big| = 2.$

*247. $\big||3x-1|-|2x+1|\big| = 1.$

248. Határozzuk meg azt a legkisebb x egész számot, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$|x-3|+2|x+1| = 4.$$

249. Oldjuk meg az $\mathbf{R}^+$ halmazon a következő egyenletet:

$$x^{\frac{|x|}{x}} = -2|x|+3.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol a p paraméter valós szám:

250. $|x-p| = 2.$
251. $|x-p| = |x-4|.$
252. $|3-x| = p.$
253. A p valós paraméter mely értékeire lesz kettőnél több gyöke a valós számok halmazán a következő egyenletnek?

$$|2x+3|+|2x-3| = px+6.$$

Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető paraméteres egyenletek.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán, ha a p paraméter racionális szám:

254. *a)* $px = p^2$; *b)* $(p^2-9)x = p+3.$
255. *a)* $(p-2)x = p^2-4$; *b)* $p^2x+2 = p(x+2).$
256. *a)* $(p^2-9)x = p^3+27$; *b)* $(p^2-4)x = 3p^2+p-10.$
257. *a)* $(p^2-2p+1)x = p-1$; *b)* $(2p-1)x = 3p+(p+2)x.$
258. *a)* $p^2x-9x = p^2+6p+9$; *b)* $p(px-1) = 3(px-1).$
259. Oldjuk meg az x egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a},$$

ahol az $a\neq 0$, $b\neq 0$ paraméterek egész számok.

260. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x-n}{m} - a = \frac{2x-m}{m},$$

ahol a, n, m paraméterek egész számok és $m\neq 0$.

261. Oldjuk meg a racionális számok halmazán y-ra a következő egyenletet, ahol az a, m paraméterek pozitív egész számok:

$$a - \frac{m+y}{m} = m - \frac{a+y}{a}.$$

262. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{a+x}{d} - 2 = \frac{x-d}{a},$$

ahol az a és d paraméterek valós számok.

***263.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x}{p-3} - \frac{1}{p} = \frac{6+4x}{p^2-3p},$$

ahol a p paraméter valós szám.

264. Az a és b valós paraméterek mely értékeinél lesz az $ax+b = 0$, $(a^2+b^2 > 0)$ lineáris egyenlet x_0 gyöke
a) zérus; *b)* negatív; *c)* pozitív
valós szám?

265. Az $ax+by = 0$ egyenletnek az a és b valós paraméterek mely értékeire
a) nincs megoldása;
b) végtelen sok megoldása van;
c) pontosan egy gyöke van
a valós számok halmazán?

266. A p valós paraméter mely értékeire van a $2(3+x) = px$ egyenletnek
a) pozitív;
b) negatív
gyöke a valós számok halmazán?

267. A p valós paraméter mely értékeinél van a

$$6x = 4p - 11$$

egyenletnek nemnegatív valós gyöke?

268. A p valós paraméter mely értékeire lesz
a) pozitív valós szám; *b)* nulla; *c)* negatív valós szám a

$$3(x-p) = \frac{3x-7p}{5} + 1$$

egyenlet gyöke?

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ha a, b, c, és d valós paramétereket jelölnek:

269. $ax+b = \dfrac{3x+2ab}{3} + \dfrac{1}{2}$.

270. $a(ab+1)x + b^2 = a^2 + (a^3+b)x$.

271. $a(1-ax) = 4b - 2ax$.

272. $a + (ab+2)x = 2b + (b+2a)x$.

273. $(a^2b^2+36)x + a^2 = b^2 + (9a^2+4b^2)x$.

274. $\dfrac{a+x}{a} - c = \dfrac{b+x}{b} - d$.

275. $\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x} = \dfrac{2x+a}{2a} - \dfrac{a}{x}$.

276. $\dfrac{a+b}{x} - c = d - \dfrac{a-b}{x}$.

277. $\dfrac{a}{x+b} - c = \dfrac{a}{x+b} - d$.

278. $\dfrac{x+1}{x-1} = -\dfrac{a}{b}$.

279. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán, ha az a, b és c paraméterek egész számok:

$$2bx + ax = x(a+b) + a + cx.$$

***280.** Oldjuk meg a következő egyenletet az x valós számok halmazán, ha a p paraméter valós szám:

$$\frac{2p+x}{2p-x} = \frac{8p^2-3x}{x^2-4p^2} - \frac{x+p}{2p+x}.$$

A p ($p \in \mathbf{R}$) paraméter mely értékeire nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán?

***281.** Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x+p-2p^2}{p^2-x^2} = \frac{x+p}{p-x} + \frac{x}{p+x},$$

ahol a p paraméter valós szám.
A p ($p \in \mathbf{R}$) paraméter mely értékeire lesz az egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

282. Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint $a:b$, különbségük pedig c. Határozzuk meg a két számot, ha $a>b$ és $c>0$.

283. Egy apa most a éves, a fia b éves. Hány év múlva lesz az apa m-szer annyi idős, mint a fia ($a>b>0$, $m>1$)?

284. Egy munkát egy munkás a nap alatt végezne el egyedül, egy másik munkás pedig b nap alatt. Mennyi idő alatt készülnek el ugyanazzal a munkával együtt (a, $b>0$)?

285. Egy üzemnek a terv szerint n nap alatt m munkadarabot kellett készítenie. Az üzem a tervet túlteljesítve t nappal a határidő előtt befejezte a munkát, és k darabbal többet gyártott az előírtnál. Hány munkadarabbal készítettek többet naponta a tervezettnél ($n>t>0$, $m, k>0$)?

286. Két munkás közül az egyik naponta a, a másik b munkadarabot készít el. Eddig az első p, a második q munkadarabot készített el. Hány nap múlva lesz egyenlő a két munkás által elkészített munkadarabok száma, ha naponta egyenlő ideig dolgoznak?

287. Hány %-os oldatot kapunk, ha a liter p%-os töménységű kénsavat b liter vízhez öntöttünk (a, b, $p>0$)?

288. Egy tartály egy csapon keresztül a óra alatt telik meg, a tele tartály a lefolyón keresztül b óra alatt ürül ki. Mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha egyszerre nyitjuk meg a csapot is, a lefolyót is $(a, b > 0)$?

289. Két falu közti autóbuszjáraton az autóbuszok átlagsebessége az egyik irányban v_1 km/h, a másik irányban v_2 km/h. Mekkora az átlagsebesség egy teljes fordulóra vonatkozólag $(v_1, v_2 > 0)$?

290. Az A és B autók induláskor egymástól $d>0$ távolságra vannak. Az A autó sebessége u km/h, a B autó sebessége v km/h, ahol $u>v>0$. Mikor találkozik az A autó a B autóval

a) ha egy irányban haladnak;

b) ha ellentétes irányban haladnak?

291. Az A és a B autók egymástól $d>0$ távolságra vannak az induláskor. Az A sebessége u km/h, a B sebessége v km/h, ahol $u>v>0$. Mikor előzi meg A a vele egyirányban haladó B-t $k>0$ távolsággal?

292. Egy vonat, amely Budapestről Debrecenbe megy, C-től pályaépítési munkák miatt n-ed részére csökkentette a sebességét, így a órát késik. Ha sebességét Debrecenhez b kilométerrel közelebb csökkentette volna, akkor a késése c óra lenne. Hány kilométert tett meg a vonat eredetileg óránként $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n \in \mathbf{Z}^+)$?

293. Két helyről egy-egy jármű indul el egymással szemben egyenletes mozgással. Ha az első jármű m perccel előbb indul, mint a második, akkor a második jármű indulása után t perccel találkoznak. Ha viszont a második jármű indul n perccel előbb, mint az első, akkor az első jármű indulása után r perccel találkoznak. Hány perc múlva találkoznak, ha a két jármű egyszerre indul?

Diofantikus egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

294. $xy = x+y$.

295. $3x+7y = 13$.

296. $14x-5y = 19$.

297. $17x+12y = 5$.

298. $139x+11y = 15$.

299. $102x+45y = 53$.

Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán a következő egyenleteket:

300. $3x+7y = 13$.

301. $14x-5y = 19$.

302. $6x+7y = 22$.

303. $17x+10y = 384$.

304. $29x-23y = 123$.

305. Határozzuk meg azokat az egytől különböző egyjegyű természetes számokból alkotott számpárokat, amelyeknek szorzatában az egyik számjegy megegyezik az egyik tényezővel.

306. Egy téglalap oldalainak a hossza centiméterben kifejezve két különböző pozitív egész szám. Kerülete ugyanannyi centiméter, mint ahány négyzetcentiméter a területe. Mekkorák a téglalap oldalai?

307. Melyik az a kétjegyű szám, melyet az egyesek helyén álló számmal osztva hányadosul 9-et, maradékul 6-ot kapunk?

308. Melyik az a kétjegyű szám, amely számjegyeinek kétszeres szorzatával egyenlő?

309. Ha két egész szám szorzatához hozzáadjuk az összegüket, akkor 34-et kapunk. Melyik ez a két szám?

310. Bontsuk fel 283-at két pozitív egész számra úgy, hogy az egyik rész osztható legyen 13-mal, a másik rész 17-tel.

311. Valakinek 3-féle bora van, az elsőből 72 Ft, a másodikból 48 Ft, a harmadikból 32 Ft egy liter ára. Mennyit kell mindegyik fajtából kivennie, hogy 40 liter, literenként 40 Ft-os bort kapjon, feltéve, hogy egész számú litereket óhajt összekeverni?

312. Egy négyjegyű szám 132-vel osztva 105-öt, 133-mal osztva 91-et ad maradékul. Melyik ez a szám?

313. 100-at bontsuk fel két olyan részre, melyek közül az egyik 5-tel osztva kettőt, a másik 7-tel osztva négyet ad maradékul.

314. Melyik az a háromjegyű szám, amely eggyel kisebb, mint a szélső számjegyeinek a felcserélésével adódó szám kétszerese?

***315.** Egy tanuló azt állítja, hogy dédapja születési évszámának hétszerese 13-mal osztva 11-et, tizenháromszorosa 11-gyel osztva hetet ad maradékul. Mikor született a dédapa?

***316.** Fémgyűjtésnél az úttörők 1. csapata versenyre hívta ki a 2. csapatot. A két csapat összesen 2831 kg fémet gyűjtött. Az 1. csapat tagjai személyenként 95 kg-ot, a 2. csapat tagjai pedig 74 kg-ot gyűjtöttek átlagban. Hány tagja volt az 1. csapatnak és a 2. csapatnak, mennyi fémet gyűjtött külön-külön a két csapat?

***317.** Egy számlán a következő elmosódott tétel olvasható:

$$*24 \text{ db} \quad \text{à } 19* \text{ Ft} = *3808 \text{ Ft}.$$

A csillagok helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Milyen számjegyek állhatnak a $*$-ok helyén?

***318.** Házunk előtt egyik nap háromszor annyi kerékpár és autó haladt el együttesen, mint ahány traktor. A kerékpárok és kerekeik, az autók és kerekeik száma együttesen 100. Hány kerékpár, autó és traktor haladt el a ház előtt a megfigyelés napján?

***319.** Egy futóversenyen 12, rajtszámokkal jelzett versenyző indult. Mi volt a beérkezés sorrendje, ha a rajtszám és a helyezési szám szorzata minden esetben eggyel volt nagyobb, mint egy 13-mal osztható szám?

***320.** Hogyan lehet 768 Ft illetéket 1 Ft-os, 5 Ft-os és 10 Ft-os illetékbélyegben felragasztani, ha az 5 Ft-os illetékbélyegből kétszer annyit vásároltunk, mint a másik kettőből együttvéve?

321. Egy építkezéshez egy teherautó x nap alatt $(x \in \mathbf{N} \mid x > 3)$ tudja kiszállítani az anyagot. Mivel az építkezést a határidőnél hamarabb akarják befejezni, a szállítást meggyorsították és a negyedik napon még további két teherautót állítottak be, amelyek közül az egyik teljesítménye $\frac{5}{6}$-a, a másiké pedig 1,5-e az eredeti teherautóénak, így y nap alatt szállították el az építési anyagot. Mely $x < 50$ pozitív természetes szám esetén lesz y is pozitív természetes szám?

***322.** Egy galambtulajdonos arra a kérdésre, hogy hány galambja van, így felelt: Galambjaim száma 300-nál több, de 900-nál kevesebb. Ha páronként bocsátom ki őket, akkor utoljára egy marad, ha hármasával, akkor kettő, ha négyesével, akkor három, ha ötösével, akkor négy, ha hatosával, akkor öt galamb marad a galambdúcban, de ha hetesével engedem ki őket, akkor egy sem marad vissza. Hány galambja volt a tulajdonosnak?

***323.** Jóska 500 Ft-jából vett egy sakktáblát. A pénztárnál csupa aprópénzt kapott vissza. Otthon a maradék pénzt még egyszer megszámolta és kirakta a sakktáblára úgy, hogy minden mezőre ugyanannyi pénz került. Másnap visszament a boltba és megvette a figurákat. A futóért, a huszárért háromszor, a bástyáért négyszer, a vezérért kilencszer, a királyért tizenhatszor annyit fizetett, mint egy gyalogért, és a végén 150 Ft-ja maradt. Mennyi pénze volt Jóskának, és mennyibe kerültek az egyes bábuk?

***324.** Egy kiránduláson 150-en vettek részt. A 15 300 Ft-os összköltséghez a férfiak 170 Ft-tal, a nők 140 Ft-tal, a gyermekek 90 Ft-tal járultak hozzá személyenként. A gyermekek száma nem érte el a 120-at. Hány férfi, nő, illetve gyermek vett részt a kiránduláson?

325. Ha egy kétjegyű szám kétszereséből egyet levonunk, akkor az eredeti szám számjegyeit kapjuk meg fordított sorrendben. Melyik ez a szám?

***326.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek az összege 20. Ha a számból 16-ot levonunk, az így nyert különbség fele olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei fordított sorrendben megegyeznek az eredeti szám számjegyeivel. Melyik ez a szám?

327. Egy négyjegyű szám számjegyei egymásután következő természetes számok. Ha a százasok és az ezresek helyén álló számjegyeket felcseréljük, teljes négyzetet kapunk. Melyik ez a szám?

328. Melyek azok a szabályos sokszögek, amelyekkel a sík hézag és átfedés nélkül lefedhető? Mutassuk meg, hogy ez a feladat egyenértékű azzal, hogy keressük meg az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

egyenlet pozitív egész megoldásait.

***329.** Pista néhány osztálytársának kérésére ceruzákat vásárolt, összesen 11 darabot. Az üzletben 2 Ft-os, 4 Ft-os és 5 Ft-os ceruzák voltak. Hány darabot vásárolt az egyes fajtákból, ha összesen 27 Ft-ot fizetett?

***330.** Hány olyan természetes szám van, melynek a 9-es és a 11-es számrendszerbeli alakja egyaránt háromjegyű? Határozzuk meg közülük azokat, amelyeknek e két előállításában ugyanazok a számjegyek lépnek fel, de fordított sorrendben.

***331.** Melyik az a két, legalább kétjegyű pozitív természetes szám, amelynek összegéből, nemnegatív különbségéből, szorzatából és hányadosából alkotott összeg 576?

*332. Mutassuk meg, hogy az $5x+3y=k$, $(k \in \mathbf{N}, k>7)$ egyenletnek van megoldása a természetes számok halmazán. Keressünk olyan természetes számot, amelynél nagyobb k esetén az egyenlet a pozitív egész számok halmazán megoldható.

Elsőfokú egyváltozós egyenlőtlenségek

Mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

333. *a)* $2x \geqq -3$; *b)* $\frac{1}{2}x < -1$.

334. *a)* $2x-3>1$; *b)* $\frac{1}{2}x-3 \geqq 2$.

335. *a)* $-2x \geqq 3$; *b)* $-\frac{1}{2}x \leqq 3$.

336. *a)* $2-x<3$; *b)* $1-\frac{1}{2}x>3$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazukat a számegyenesen:

337. *a)* $x+4>2-3x$; *b)* $6x+2>3x-4$.

338. *a)* $x+6>2-3x$; *b)* $2x+1>4x-7$.

339. *a)* $4(x-1) \leqq 2+7x$; *b)* $2(2x-1) \geqq 3(1+x)$.

340. *a)* $3(x-2) \geqq 4x-9$; *b)* $2(1-2x) \geqq 6(1-x)+x$.

341. *a)* $2(3+5x)<3(7x-4)-4$; *b)* $\frac{1}{2}(2-x)<\frac{3}{4}x-4$.

Állapítsuk meg, hogy mely valós x értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

342. *a)* $4x-7<3+4x$; *b)* $9x+8<15+7x$.

343. *a)* $5x-4>7+5x$; *b)* $-3(x+20) \leqq -20$.

344. *a)* $(x-3)^2-11 \geqq (x+2)^2$; *b)* $(2x-1)^2-8x<(3-2x)^2$.

345. *a)* $(x-2)^2-2x+10<(3-x)^2$;
b) $(3x-1)^2-6x<(2-3x)^2$.

346. *a)* $(x-1)^2-2x+10<(2-x)^2$,
b) $(x+4)^2-6 \geqq (x+3)^2+2x$.

347. *a)* $(x-1)^2-5 \leqq (x+4)^2$;
b) $(1+x)^2+3x^2<(2x-1)^2-18$.

348. *a)* $\frac{3x+5}{4} \leqq 2x+5$; *b)* $\frac{2(x+3)}{11}>3+\frac{3}{11}$.

349. *a)* $-\frac{x}{2}<3x-\frac{3+2x}{4}$; *b)* $2x-\frac{x}{3}+\frac{1}{2} \geqq 3x-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$.

350. *a)* $\frac{5x-2}{3}-\frac{1-3x}{4}<\frac{9x+4}{2}$;
b) $x-\frac{x-1}{2} \geqq \frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

351. *a)* $\frac{4-3x}{3}<\frac{2x-1}{4}-\frac{5x-2}{6}$;
b) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$.

352. Milyen pozitív egész számok teljesítik a következő egyenlőtlenségeket?
a) $3(x-2)<1+x$; *b)* $6(x+1)<1+3(2-x)$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a pozitív valós számok halmazán:

353. *a)* $(2x+1)^2-8 \geqq (3-2x)^2$;
b) $8x^2+(x+1)^2>(2-3x)^2+4$.

354. *a)* $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}<4x-3$; *b)* $\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4}>0$.

355. *a)* $\frac{37-2x}{3}+x \leqq \frac{3x-8}{4}-9$;
b) $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}<-2$.

356. *a)* $\frac{7-6x}{2}+10x<\frac{20x+1}{3}+2$;
b) $3-\frac{7x-2}{6} \geqq \frac{5-13x}{9}$.

357. *a)* $\frac{5-x}{8}+\frac{3-2x}{4} \geqq 0;$

b) $\frac{2x+3}{4}+\frac{5x-2}{5} > 1-\frac{4x-3}{10}.$

Állapítsuk meg, hogy milyen intervallumba esik az x, ha:

358. *a)* $2{,}5 < 5x < 10;$ *b)* $-4 \leqq 4x \leqq 8.$

359. *a)* $-28 \leqq -14x \leqq 84;$ *b)* $-15 < -3x < -3.$

360. *a)* $1 \leqq x-2 < 2;$ *b)* $0 \leqq x-1 \leqq 4.$

361. Határozzuk meg, hogy x mely egész értékei elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket:

a) $6 \geqq x > 2;$ *b)* $-8 \leqq x < -3;$ *c)* $-2 < x < 2;$

d) $3\frac{1}{2} < x < 5\frac{3}{4};$ *e)* $8 \leqq x < 12{,}5;$ *f)* $-7 < x < -1;$

g) $\frac{1}{4} < x < \frac{8}{7};$ *h)* $2{,}7 < x \leqq 3\frac{1}{3};$ *i)* $0{,}5 \leqq x \leqq 4{,}25.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket

a) algebrai úton;

b) grafikusan:

362. $\frac{x-3}{-2} > 0.$ **363.** $\frac{1}{x} \leqq 1.$

364. $\frac{1}{x} > 1.$ **365.** $\frac{1}{x} > -1.$

366. $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő törtes egyenlőtlenségeket:

367. $\frac{-1}{5-2x} < 0.$ **368.** $\frac{3x+1}{2x+3} > 0.$

369. $\frac{5-a}{2-3a} \geqq 0.$ **370.** $\frac{3(4-x)}{1-3x} > 0.$

371. $\frac{2-z}{z-4} \geqq 0.$ **372.** $\frac{2x-3}{3x-6} > 0.$

373. $\frac{x-4}{2x-3} \leqq 0.$ **374.** $\frac{2x+1}{3x+2} < 0.$

375. $\frac{1-2z}{-3z+4} \leqq 0.$ **376.** $\frac{5-y}{y-4} \leqq 0.$

377. $\frac{x+2}{(x-3)^2} > 0.$ **378.** $\frac{2x-7}{4-x} > 1.$

379. $\frac{3x}{2x+1} > 1.$ **380.** $\frac{5x-5}{3x-2} > 1.$

381. $\frac{4x+6}{7x-2} \leqq 1.$ **382.** $\frac{3-6x}{2x+1} > -5.$

383. $\frac{2x+3}{3x+2} \leqq 2.$ **384.** $\frac{3x+1}{2x-5} > 2.$

385. $\frac{3(1-4a)}{2a+1} \geqq -9.$ **386.** $\frac{3-5x}{2x-5} < -3.$

387. $\frac{x+4}{2x+3} \leqq -2.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

388. $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{2x+5}.$

389. $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}<\frac{x+1}{x-2}$.

390. Határozzuk meg azt a legnagyobb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

391. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-1}{x-2}<\frac{x+3}{x}.$$

392. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\geqq 2, \quad \text{ahol} \quad a\in \mathbf{R}^+.$$

393. Bizonyítsuk be, hogy

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2, \quad \text{ahol} \quad a\in \mathbf{R}^+.$$

394. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+2}{a}+\frac{a+2}{2}\geqq 4, \quad \text{ahol} \quad a\in \mathbf{R}^+.$$

395. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \quad \text{ahol} \quad a, b\in \mathbf{R}^+.$$

396. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2+b^2+c^2+3\geqq 2(a+b+c), \quad \text{ahol} \quad a, b, c\in \mathbf{R}.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő paraméteres egyenlőtlenségeket x-re:

397. $\frac{a}{x-1}>1$, ahol $a\in \mathbf{R}$.

398. $\frac{a}{x+1}\geqq -1$, ahol $a\in \mathbf{R}$.

399. $x-2\left(1-\frac{1}{a}\right)<\frac{2(x+1)}{3a}$, ahol $a\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

400. $a(x-3)>x-5$, ahol $a\in \mathbf{R}$.

401. $\frac{x+1}{3a}+\frac{2x-3}{2}>\frac{3x+1}{6a}$, ahol $a\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

402. Az a valós paraméter mely értékeire lesz a $2(x-a)=\frac{4x-9a}{5}+1$ egyenlet gyöke

a) pozitív;
b) zérus;
c) negatív;
d) egész szám?

403. Az a paraméter mely értékeinél van az $\frac{x+2a}{3}=4(x-a)$ egyenletnek

a) pozitív gyöke;
b) pozitív egész gyöke?

404. Az a paraméter mely értékeinél van a $3(x-2a)+4(x-a)=5x$ egyenletnek 7-nél nagyobb gyöke? Mely a értéknél van egész gyök?

IV.

Abszolútértéket tartalmazó egyenlőtlenségek

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait és ábrázoljuk a megoldáshalmazokat a számegyenesen:

405. $|x| \leqq 3.$ **406.** $|x+8| < 1.$

407. $|x+7| < 5.$ **408.** $|x-5| < 3.$

409. $|3-x| \leqq 1.$ **410.** $|x-4| < 5.$

411. $|2-x| \leqq 4.$ **412.** $|5-2x| < 1.$

413. $|2x-3| < 2.$ **414.** $|x| > 3.$

415. $|x-4| > 5.$ **416.** $|x+3| > 2.$

417. $|x-5| \geqq 8.$ **418.** $|2x-4| \geqq 2.$

419. $|2-2x| \geqq 1.$ **420.** $|3x-2{,}5| \geqq 2.$

421. $|3x+6| > 3.$ **422.** $\frac{|x-3|}{x-3} > 0.$

423. $\left|\frac{2}{x-4}\right| > 1.$ ***424.** $\frac{1}{|x|-3} < \frac{1}{2}.$

***425.** $\frac{|x-1|}{x+2} < 1.$ **426.** $\frac{2}{|x+2|} \leqq 1.$

***427.** $\frac{2}{|x-2|} > \left|\frac{-3}{2x-1}\right|.$

***428.** Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}.$$

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

***429.** $|x-2| < \frac{x-1}{2}.$

***430.** $2|x+1| > x+4.$

***431.** $|x+2| > |x|.$

***432.** $|1-x| < |x|.$

***433.** $|x-2| \leqq |x+4|.$

***434.** $|2x-3|-|3x+7| > 0.$

***435.** $|x-1|+|2-x| > 3+x.$

***436.** $|x+2|+|x+1|+|x-4| > 9.$

***437.** $|x-1|+|x+2|-|x-3| > 4.$

***438.** $|x+2|-|x+1|+|x|-|x-1|+|x-2| < 3.$

***439.** $\big||2x-1|-3\big| > 2.$

***440.** Melyek azok az egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\left|\frac{1}{x-15}\right| > \frac{4}{9}?$$

***441.** Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$|x+1|+|x-4| > 7\,?$$

***442.** Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2} \geqq 1.$$

IV.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő paraméteres egyenlőtlenségeket x-re:

443. $a|x| > b$, ahol $a, b \in \mathbf{R}^+$.

444. $|x| < a$, ahol $a \in \mathbf{R}^+$.

445. $|x-a| < \varepsilon$, ahol $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

Egészrésszel kapcsolatos feladatok

Jelölje [a] a-nak az egészrészét. Bizonyítsuk be, hogy

446. $[x+k] = [x]+k$, ahol $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$.

***447.** $[x+y] \geqq [x]+[y]$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$.

***448.** $[kx] \geqq k[x]$, ahol $x \in \mathbf{R}^+$, $k \in \mathbf{N}$.

***449.** $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, ahol $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

***450.** $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$.

***451.** $[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$.

***452.** $\left[\frac{1}{[x]}\right] = \left[\frac{1}{|x|}\right]$, ahol $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

***453.** $[ax] = m$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbf{Z}$.

***454.** $\frac{x}{a} = x-[x]$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

***455.** $x-1 = \left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]$.

2. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek

Másodfokú egyváltozós egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket
a) a természetes számok halmazán; b) az egész számok halmazán:

456. $3x^2 = 0$.
457. $x^2-4x = 0$.
458. $x^2+x = 0$.
459. $3x^2-27 = 0$.
460. $x^2+25 = 0$.
461. $(x-2)^2 = 121$.
462. $3x^2+6x = 8x^2-9x$.
463. $\frac{3x^2-11}{4}+\frac{74-2x^2}{6} = 20$.
464. $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5} = 2$.
465. $(x+3)^3-(x+2)^3 = 19$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket
a) a racionális számok halmazán; b) a valós számok halmazán:

466. $x^2-2 = 0$.
467. $\frac{x^2}{4} = 49$.
468. $4x^2 = 11$.
469. $\frac{15}{4}x^2-303{,}75 = 0$.
470. $4x^2-0{,}64 = 0$.
471. $100x^2-1000 = 0$.
472. $x^2+1 = 0$.
473. $x(x-3) = 4x-6x^2$.
474. $5x^2-8x+3(x+2)x = 0$.
475. $(x-3)^3+2x(5x+1) = x^3-(2x-1)^2-26$.

Oldjuk meg teljes négyzetté való kiegészítéssel a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

476. *a)* $x^2-4x+4=0$; *b)* $x^2-4x+3=0$.
477. *a)* $x^2-4x-96=0$; *b)* $x^2-2x+1=0$.
478. *a)* $x^2-2x-3=0$; *b)* $x^2-2x+8=0$.
479. *a)* $x^2+x+0{,}25=0$; *b)* $x^2+x=30$.
480. *a)* $x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}=0$; *b)* $9x^2+24x+16=0$.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

481. *a)* $x^2-1=0$; *b)* $x^2+1=0$; *c)* $(x-2)^2-1=0$.
482. *a)* $x^2-4=0$; *b)* $x^2+4=0$; *c)* $(x+1)^2+2=0$.
483. *a)* $\frac{1}{3}x^2-3=0$; *b)* $3x^2+5=0$; *c)* $-0{,}5x^2+2=0$.
484. *a)* $-x^2=x$; *b)* $x^2-2x=0$; *c)* $x^2=-2x$.
485. *a)* $x^2-5x+6=0$; *b)* $x^2-8x+16=0$; *c)* $-x^2+2x+5=0$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a megoldóképlet segítségével a valós számok halmazán:

486. $x^2-6x+8=0$.
487. $x^2+9x+20=0$.
488. $x^2+x-12=0$.
489. $x^2-5x+6=0$.
490. $5x^2+7x+2=0$.
491. $5x^2-26x-24=0$.
492. $2x^2-3x+8=0$.
493. $3x^2-8x+4=0$.
494. $8x^2-16x+9=0$.
495. $16x^2+16x+3=0$.

Egyenértékűek-e a valós számok halmazán a következő egyenletek:

496. $x^2-2x=0$ és $x^2-\frac{2x^2}{x}=0$?
497. $x^2-5x+6=0$ és $2x-6=0$?
498. $x(x-1)-2(x-1)=0$ és $(x-1)(x-2)=0$?
499. $x^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=x$ és $x^3=x$?
500. $(x-2)^2=(7-2x)^2$ és $x-2=7-2x$?
501. $\frac{x^2-1}{x-1}=4$ és $x+1=4$?
502. $\frac{x^2-1}{x-1}=3$ és $x+1=3$?
503. $\frac{x^2-1}{x+1}=2$ és $x-1=2$?

504. Egyenértékűek-e a következő egyenletek
a) a racionális számok halmazán; *b)* a valós számok halmazán

$$x^2+1=0 \quad \text{és} \quad x^4+1=0\,?$$

505. Egyenértékűek-e a következő egyenletek
a) az egész számok halmazán; *b)* a valós számok halmazán

$$x^2=4 \quad \text{és} \quad x^4=16\,?$$

Számítsuk ki a következő egyenletek gyökeit:

506. $x^2-2(1+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0$.
507. $\sqrt{6}x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+2=0$.
508. $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.
509. $(2x+2)(x-1)=5x+6$.
510. $x(2x+3)=-12x-6$.
511. $8x(x+2)+3(x+1)+1=0$
512. $(1+2x)(3-x)+x^2=9$.
513. $\frac{x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{3x^2-10x}{15}$.
514. $\frac{7{,}2y+8{,}3}{7{,}2}=\frac{59{,}76}{51{,}84-y}$.

515. $\dfrac{x^2-7x}{3}-1=\dfrac{11x}{10}-\dfrac{x-4}{3}$.

516. $1-\dfrac{2x^2-3x}{2}=\dfrac{(3x-1)^2}{5}-\dfrac{(x+3)^2}{5}$.

***517.** $\dfrac{2+x^2-x}{x}=\dfrac{1}{9}(5x-1)+\dfrac{1}{5}(3x-1)$.

518. $\dfrac{3{,}4x+2{,}7}{x-3{,}4}=\dfrac{x-2{,}7}{x+3{,}4}$.

519. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4(1+x^2)}{x^2}-\dfrac{6}{x}$.

x^2

520. $\dfrac{2}{x+1}-2=\dfrac{x}{x-1}$.

$(x+1)\cdot(x-1)$

521. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{3(3x-7)}=\dfrac{2}{x}$.

522. $\dfrac{6}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}=3$.

$\boxed{(x+1)\cdot(x-1)}$

523. $\dfrac{2(3x+4)}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+2}{x-2}$.

524. $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{64}{x^2-16}$.

***525.** $\dfrac{14}{x^2-9}+\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{4-x}{x+3}=\dfrac{7}{x+3}$.

***526.** $\dfrac{6-x}{3x^2-12}-\dfrac{1}{x-2}=1-\dfrac{1}{2-x}$.

***527.** $\dfrac{2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

528. $\dfrac{6}{4x^2-1}+\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2}{2x-1}=1$.

***529.** $\dfrac{1}{2(1-a)}+\dfrac{5}{4a^2+4a+4}=\dfrac{3a}{a^3-1}$.

***530.** $\dfrac{x}{x-10}-\dfrac{8}{x-6}=\dfrac{4x}{x^2-16x+60}$.

***531.** $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{4x}{x^2+4x+3}$.

***532.** $\dfrac{6}{x^2-9}+\dfrac{13-x}{3+x}=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{3-x}$.

***533.** $\dfrac{9x^2-18x}{x^2-9}+\dfrac{6x}{3+x}-\dfrac{3+x}{3-x}=\dfrac{6(3x-3)}{x^2-9}$.

***534.** $\dfrac{x^2-x+16}{x^2+x+1}+\dfrac{36+x}{x^3-1}=-\dfrac{x+6}{1-x}$.

***535.** $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x-1}$.

Az egyenletek gyökeinek a kiszámolása nélkül döntsük el, hogy megoldhatók-e a valós számok halmazán a következő egyenletek:

536. $x^2+6x+16=0$.
537. $x^2+6x-16=0$.
538. $x^2-6x+16=0$.
539. $x^2-6x-16=0$.

Az egyenlet megoldása nélkül állapítsuk meg, hogy hány gyöke van a következő egyenleteknek és milyen előjelűek a gyökök:

540. $6x^2+2x-11=0$.
541. $4x^2-x-9=0$.
542. $3x^2+13x+9=0$.
543. $2x^2-13x+12=0$.
544. $6x^2+18x+12=0$.

545. Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek a következő számpárok a gyökei:

a) $(5;\ 8)$; *b)* $(-4;\ -5)$; *c)* $\left(-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{3}{8}\right)$;

d) $(3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2})$; *e)* $(\sqrt{7};\ -\sqrt{2})$.

546. Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

a) m^2-2m-3; *b)* $2x^2-7x+3$; *c)* $6a^2+5a-6$;
d) $72y^2-67y+15$; *e)* $-20x^2+7x+6$.

***547.** Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{2x^2-9x+10}{2x^2+x-15}$; *b)* $\dfrac{2x^2+7x+6}{12+5x-2x^2}$;

c) $\dfrac{6a^2+5a-4}{3a^2+19a+20}$; *d)* $\dfrac{a^2-9a+14}{2a^2-2a-4}$;

e) $\dfrac{2a^2-a-3}{4a^2-7{,}5a+2{,}25}$; *f)* $\dfrac{2x^2-xy-3y^2}{4x^2-7{,}5xy+2{,}25y^2}$.

548. Milyen $k \in \mathbf{R}$ értéknél lesz az

a) $x^2-7x+k=0$ egyenlet egyik gyöke -2?

b) $x^2+kx-15=0$ egyenlet egyik gyöke 5?

c) $5x^2-19x+k=0$ egyenlet egyik gyöke 3?

d) $kx^2-19x-2=0$, $(k\neq 0)$ egyenlet egyik gyöke $-0{,}1$?

e) $x^2-kx+a^2-b^2=0$ egyenlet egyik gyöke $(a+b)$?

549. Határozzuk meg az m-et ($m \in \mathbf{R}$) úgy, hogy a $2x^2-11x+m=0$ egyenlet gyökei között a következő összefüggés álljon fenn:

$$2x_1-x_2=2.$$

550. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy a $4x^2-5x+c=0$ egyenlet gyökeinek az aránya $-\dfrac{3}{4}$ legyen.

551. Határozzuk meg a p-t úgy, hogy az $x^2+px+20=0$ egyenlet két gyökének a különbsége 1 legyen.

552. Milyen összefüggésnek kell p és q között fennállni, hogy az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyök n-szerese ($n \in \mathbf{Z}^+$, $n>1$) lehessen?

553. Határozzuk meg c-t úgy, hogy a $4x^2-8x+c=0$ egyenletnek

a) két egyenlő gyöke legyen;

b) két pozitív gyöke legyen;

c) egy pozitív és egy negatív gyöke legyen;

d) egyik gyöke 0 legyen;

e) ne legyen valós gyöke.

554. Határozzuk meg a k-t úgy, hogy az $x^2-7x+2k=0$ egyenlet egyik gyöke az $x^2-5x-k=0$ egyenlet egyik gyökének a kétszerese legyen.

555. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ egyenlet gyökeinek

a) ellentettjei;

b) n-szeresei ($n \in \mathbf{Z}^+$, $n>1$);

c) reciprokai.

556. Határozzuk meg a $2x^2-3x-3=0$ egyenlet

a) gyökeinek négyzetösszegét;

b) a gyökök négyzetének különbségét;

c) a gyökök köbeinek az összegét;

d) a gyökök köbeinek a különbségét

az egyenlet megoldása nélkül.

557. Mekkorának válasszuk c-t, hogy az $x^2+(3c+1)x+4c=0$ egyenlet gyökei négyzetének összege $\dfrac{1}{3}$ legyen?

558. Létezik-e olyan racionális p paraméter, hogy a

$$(p^2-5p+3)x^2+(3p-1)x+2=0$$

másodfokú egyenlet egyik gyöke fele a másiknak?

559. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+p_1x+q_1=0$ és az $x^2+p_2x+q_2=0$ egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha $p_1p_2=2(q_1+q_2)$.

560. Milyen összefüggés áll fenn p és q között, ha az

$$x^2+px+q=0 \quad \text{és a} \quad px+q^2=0, \quad (p\neq 0)$$

egyenleteknek van közös gyöke?

***561.** A p valós paraméter milyen értékeinél lesz a

$$9x^2-(2-p)x-6-p=0$$

másodfokú egyenletnek

a) két különböző gyöke;

b) két egyenlő abszolútértékű gyöke;

c) két egyenlő gyöke?

Oldjuk meg x-re a következő egyenleteket, ahol a p paraméter valós szám:

562. $x^2-2(p+1)x+4p=0$.

563. $x(x+3)+p(p-3) = 2(px-1)$.

564. Mely racionális számokra igaz, hogy

$$(a-b)x^2-(a^2+ab+b^2)x+ab(2a+b) = 0,$$

ha az a, b paraméterek racionális számok.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán, ha az a, b paraméterek racionális számok:

565. $bx^2-a = (a-b)x$.

566. $\dfrac{x(x+2b)}{a^2+2ab+b^2} - \dfrac{2x}{a+b} = \dfrac{b-a}{a+b}$.

567. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x+\frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$$

egyenletet, ahol az $a \neq \pm b$ paraméterek valós számok.

568. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x}, \quad \text{ahol } a, b, x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

569. Bizonyítsuk be, hogy az $ax^2+bx+c = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a reciprokai gyökei a $cx^2+bx+a = 0$ egyenletnek, ha $a, c \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

570. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2 = 0$ egyenlet gyökei valós számok, ha $a, b, c \in \mathbf{R}$.

571. A valós p paraméter mely értékeinél lesz valós gyöke a

$$(p+3)x^2+(2p+3)x+p+5 = 0$$

egyenletnek ?

572. Létezik-e olyan $p \in \mathbf{Z}$ paraméter, amelynél a következő másodfokú egyenletnek két egyenlő gyöke van:

a) $x^2-(5+p)x+4 = 0$;

b) $x^2+2(p-4)x+p^2+6p+3 = 0$;

c) $(p-1)x^2-2(p+1)x+p+4 = 0, \quad (p \neq 1)$;

d) $px^2+6px+4p = -2x^2-1, \quad (p \neq -2)$?

***573.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $ax^2+bx-c = 0$ egyenletben az a, b, c pozitív valós számok és $a^2 = bc$, akkor

$$(x_1+1)(x_2+1) < -1,$$

ahol x_1 és x_2 az egyenlet két gyöke. Határozzuk meg az $(x_1+1)(x_2+1)$ szorzat maximális értékét. Mekkora lesz ebben az esetben a, b, c értéke?

574. Milyen feltételt elégítenek ki az $x^2+px+q = 0$ másodfokú egyenlet p, q együtthatói, ha $x_1(2x_2-1) = x_2+2$, ahol x_1, és x_2 a másodfokú egyenlet gyökei?

575. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c racionális számok és $a+b+{}$ $+c \neq 0$, akkor az

$$(a+b+c)x^2-2(a+b)x+a+b-c = 0$$

egyenlet gyökei racionálisak.

576. Határozzuk meg azokat a valós p értékeket, amelyekre a

$$(p-3)x^2-2px+6p = 0$$

egyenlet gyökei pozitív valós számok.

577. A p paraméter mely értékei mellett teljesül az $x^2-\dfrac{15}{4}x+p^3 = 0$ egyenlet gyökeire, hogy $x_1^2 = x_2$?

***578.** A p paraméter mely értékeinél lesz legalább egy pozitív gyöke az

$$x^2+2(p-1)x+p+5 = 0$$

egyenletnek?

***579.** Adjuk meg azokat a valós p paramétereket, amelyekre az

$$x^2+\frac{p}{2}x+\frac{p^2-5}{2} = 0$$

egyenlet mindkét gyöke

a) kisebb, mint egy; *b)* nagyobb, mint -1.

***580.** Milyen valós p paraméter esetén lesz a

$$px^2+x+p-1 = 0$$

egyenletnek két olyan különböző x_1 és x_2 gyöke, melyekre

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$$

teljesül?

***581.** A valós p paraméter mely értékeinél lesznek a

$$px^2+(p^3-p-1)x+1-p^2=0$$

egyenlet gyökei a $[-1; 1]$ intervallumban?

***582.** Határozzuk meg, hogy mikor teljesül az

$$ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0)$$

másodfokú egyenlet x_1 és x_2 gyökeire, hogy

$$x_1^2-x_2^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

***583.** Milyen feltételek teljesülése esetén lesz az

$$x^2+px+q=0$$

egyenlet gyökeinek a különbsége m, $(m\in \mathbf{R})$?

***584.** Milyen valós p paraméterérték esetén esnek az

$$x^2-2(p+1)x+p(p-1)=0$$

egyenlet gyökei által meghatározott intervallumba az

$$x^2-2x-p^2+1=0$$

egyenlet gyökei?

Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok

585. Két egymás után következő természetes szám szorzata 552. Melyik ez a két szám?

586. Egy ballagó osztályban mindenki megajándékozta minden osztálytársát a saját fényképével. Mennyi volt az osztálylétszám, ha 1056 fénykép cserélt gazdát?

587. Bontsuk fel a 240-et két olyan tényezőre, amelyek összege 31.

588. Egy tört számlálója 2-vel kisebb, mint a nevezője. Ha ehhez a törthöz hozzáadjuk a reciprok értékét, akkor $\frac{34}{15}$-öt kapunk. Melyik ez a törtszám?

589. Egy tört nevezője 4-gyel nagyobb a számlálójánál. Ha a számlálót 3-mal csökkentjük és a nevezőt ugyanannyival növeljük, a tört értéke felére csökken. Melyik ez a tört? 36 63

590. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 9. Ha a számjegyeket felcseréljük és az így kapott számot az eredetivel megszorozzuk, szorzatul 2268-at kapunk. Melyik ez a szám?

591. Határozzuk meg azt a kétjegyű számot, amelyben az egyesek száma 2-vel nagyobb a tízesek számánál, és ha a számot megszorozzuk a számjegyeinek az összegével, akkor 144-et kapunk. Melyik ez a szám?

592. Egy tanuló két számot szorzott össze. A két szám közül az egyik 10-zel nagyobb volt, mint a másik. A tanuló a szorzásnál hibázott, mert a szorzatban a tízesek száma 4-gyel kevesebb lett. A szorzás ellenőrzésekor a kisebbik tényezővel való osztásnál hányadosul 39-et, maradékul 22-t kapott. Milyen számokat szorzott össze a tanuló?

593. Egy vállalat januárban 60 dolgozóval 3 millió forint értéket termelt. Februárban a termelési érték 15,5%-kal emelkedett, mégpedig azért, mert az 1 főre eső termelési érték kétszer annyi %-kal nőtt, mint ahány %-kal emelkedett a vállalat létszáma. Mennyi volt a vállalat létszáma februárban?

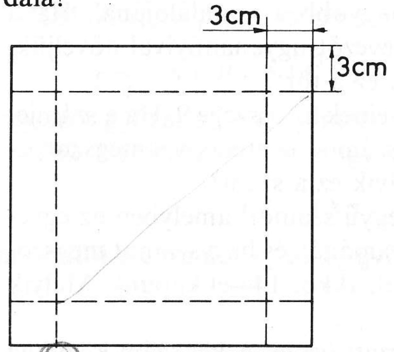
594. Egy 12 cm × 18 cm-es méretű fénykép körül egyenlő szélességű keret van. Határozzuk meg a keret szélességét, ha területe egyenlő a kép területének a 75%-ával.

595. Egy áru árát felemelték, majd később – mivel nem fogyott – kétszer annyi százalékkal csökkentették, mint ahány százalékkal felemelték annak idején. Így az eredeti áránál 5,5%-kal lett olcsóbb. Hány százalékkal emelték fel az árát eredetileg?

596. Két kénsavoldat közül az első 0,8 kg, a második 0,6 kg tömény kénsavat tartalmaz. Ha a két oldatot összeöntjük, akkor 10 kg harmadik töménységű kénsavoldatot kapunk. Mekkora volt az első és a második oldat tömege, ha a kénsavtartalom százaléka az első oldatban 10-zel több, mint a másodikban?

597. Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszor akkora, mint a másik, a területe pedig 7,5 cm^2. Mekkorák a háromszög befogói?

598. Hány oldalú sokszögnek van annyi átlója, mint ahány oldala?



599. Négyzet alakú lemezből dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkaiból 3 cm-es négyzeteket vágunk ki, és azután az oldalakat felhajtjuk. A dobozt 1500 cm^3 térfogatúra tervezzük. Milyen nagyságú négyzet alakú lemezből lehet a dobozt elkészíteni *(2. ábra)*?

2. ábra

600. Egy téglalap kerülete 42 cm, átlója 15 cm. Mekkorák az oldalai?

601. Egy téglalap területe 192 cm^2, kerülete 56 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

602. Egy téglalap kerülete 40 cm. A téglalap oldalai fölé írt négyzetek területeinek az összege 208 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai?

603. Egy sakkverseny minden résztvevője pontosan egy játszmát játszott a többi résztvevő mindegyikével. Ezen a versenyen összesen 153 partit játszottak le. Hányan vettek részt a sakkversenyen?

604. Két kombájn együtt 4 nap alatt learatta a szövetkezet búzatábláját. Az egyik kombájn egyedül 6 nappal hosszabb idő alatt végezte volna el ugyanazt az aratási munkát mint a másik. Hány napig aratott volna külön-külön a két kombájn?

605. Egy tartály két csövön keresztül 6 óra alatt telik meg. Az egyik csövön át 5 órával hamarabb telik meg, mint a másikon keresztül. Mennyi idő alatt töltené meg külön-külön a két cső a tartályt?

606. Két útjavító brigád együttesen naponta 4,5 km hosszú utat tud megjavítani. A 2. brigád 2 nappal kevesebbet dolgozott, de mindkét brigád 20 km hosszú szakaszt javított meg külön-külön.

Hány km-es szakaszt javított meg egy-egy brigád külön-külön naponta?

607. Két munkás együtt dolgozva 8 óra alatt tud befejezni egy munkát. Mennyi idő alatt lenne készen egyedül ezzel a munkával az első, illetve a második munkás, ha az utóbbinak 12 órával több időre lenne szüksége, mint az elsőnek?

608. Egy építkezésen 8000 m^3 földet kellett kitermelni meghatározott idő alatt. A markológép naponta 50 m^3-rel tudott kiemelni a tervezett mennyiségnél, és így a munka 8 nappal hamarabb lett készen. Hány napig tartott volna a munka az eredeti tervezet szerint?

609. A ruhagyárban az egyik brigád 810 szoknyát, a másik brigád ugyanennyi idő alatt 900 szoknyát varrt meg. Az 1. brigád 3 nappal, a 2. brigád 6 nappal a határidő előtt már kész volt a munkával. Hány szoknyát varrtak meg naponta, ha az 1. brigád mindennap 4 szoknyával kevesebbet varrt meg, mint a 2. brigád?

610. Egy építkezéshez 30 tonna anyagot kell kiszállítani. A szállításhoz a megrendeltnél 2 tonnával kisebb teherbírású teherautókat küldtek, de 4-gyel többet, így a szállítást időben elvégezhették. Hány teherautó végezte a szállítást és hány tonnásak voltak?

611. Két folyóparti város távolsága 240 km. Ezt az utat a menetrend szerinti hajó oda-vissza 25 óra alatt teszi meg. Mekkora sebességgel haladna ez a hajó álló vízben, ha a folyó 4 km/h sebességgel folyik?

612. Két kikötő között a távolság egy folyón 21 km. Egy motorcsónak elindul az egyik kikötőből a másikba, ott 30 percet áll, majd visszaindul, és így az első indulás után 4 órával ér vissza a kikötőbe. A folyó vizének sebessége 2,5 km/h. Mekkora a motorcsónak sebessége állóvízben?

613. Két gyalogos egyszerre indul A-ból B-be. Az első, aki óránként 2 km-rel többet tesz meg, éppen egy órával hamarabb ér céljához. Hány kilométert tesznek meg óránként, ha B 24 km-re van A-tól?

614. Egy kerékpárosnak 30 km-es utat kell megtennie. Mivel a kitűzött időnél 3 perccel később indult, ahhoz, hogy idejében megérkezzék, óránként 1 km-rel többet kellett megtennie, mint ahogy eredetileg tervezte. Mekkora sebességgel haladt?

615. Egy gyorsvonat tilos jelzés miatt 16 percig vesztegelt, és hogy késését behozza, a következő 80 km-t az előírtnál 10 km-rel nagyobb óránkénti sebességgel kellett megtennie. Mennyi volt a menetrendben előírt sebessége?

616. Az A vasútállomásról reggel 5 órakor tehervonat indul B-be, mely A-tól 1080 km távolságra van. 8 órakor B-ből gyorsvonat indul A-ba, ez óránként 15 km-rel többet tesz meg a tehervonatnál. Félúton találkoznak. Hány órakor történik ez?

617. Az A város 78 km-re van B-től. A-ból elindult egy kerékpáros B-be. Egy órával később pedig egy másik kerékpáros B-ből A-ba. Ez utóbbi sebessége 4 km/h-val több, mint az elsőé, így B-től 36 km-re találkoztak. Mennyi ideig kerékpározott mindegyik az indulástól a találkozásig és mekkora sebességgel?

618. Két város között 960 km a távolság. A személyvonat sebessége 20 km/h-val több, mint a tehervonaté. Határozzuk meg a vonatok sebességét, ha tudjuk, hogy a személyvonat menetideje 4 órával kevesebb a két város között.

619. Reggel 5 órakor elindul egy szállítókocsi A-ból B felé. Ugyanekkor B-ből is elindul egy teherautó A felé. Pontosan 11 órakor haladnak el egymás mellett. A teherautó 30 perccel hamarabb ér A-ba, mint a szállítókocsi B-be. Mikor érkezik meg a teherautó?

620. Egy egymástól 480 km-re levő A és B városból egyszerre indult el egymással szemben két vonat. Három óra 15 perc múlva még 51 km távolságban voltak egymástól. Ha B-ből 40 perccel később indult volna el ez a vonat, mint az A-ból induló, akkor félúton találkoztak volna. Határozzuk meg mindkét vonat sebességét.

621. Egy 120 m hosszú körpályán két sportoló korcsolyaedzést tart. Mindketten egy irányban haladnak és 20 percenként találkoznak. Az egyik korcsolyázó a kört 1 perccel rövidebb idő alatt futja le, mint a másik. Határozzuk meg mindkét korcsolyázó sebességét.

622. Egy kocsi első kereke 60 m-es távolságon 9-cel többet fordul, mint a hátsó kereke 63 m-en. A két kerék kerületének az összege 5 m. Mekkora a kerekek kerülete és a sugaruk?

623. Két gyalogos közül az egyik A-ból B-be, a másik B-ből A-ba tart. Az első 6 órával később indul, ezért amikor találkoznak, 12 km-rel kisebb utat tett meg, mint a második. A találkozás után mindegyik a régi sebességgel folytatja az útját, és így az első 8 óra múlva ér B-be, a második pedig 9 óra múlva ér A-ba. Határozzuk meg mindkét gyalogos sebességét.

624. Egy kerékpáros mindennap 30 km-es utat tesz meg. Az egyik napon 3 perccel hamarabb indult el, de 1 km/h-val kisebb sebességgel hajtott, mint máskor. Így is időre megérkezett. Mennyi volt ekkor a sebessége?

***625.** Menetrend szerint az A és B helységek közti 20 km-es távolságot a tehervonat állandó sebességgel teszi meg. A valóságban félútig ezzel a sebességgel haladt, de ott a jelző 3 percre megállította és így az út másik felén óránként 10 km-rel gyorsabban ment, hogy időben megérkezzen. Másnap ugyanott a jelző 5 percre állította meg. Mennyivel kellett ekkor megnövelnie a sebességét, hogy tartani tudja a menetrend szerinti érkezési időt? Mekkora a vonat menetrend szerinti sebessége?

***626.** Pista naponta 30 km-t kerékpározik A-ból indulva B felé. Miután 72 km-t megtett, Bandi is elindul B-ből A felé ugyanazon az úton, és naponta az egész út 0,1-ed részét teszi meg. Miután Bandi annyit ment, mint az általa km-ben megtett út mérőszámának a 0,125 része, találkozik Pistával. Mekkora az A és B helységek távolsága?

***627.** Az A és B kerékpárosok az M, illetve N helységekből indultak el egymással szemben. Amikor találkoztak, kiderült, hogy A 6 km-rel többet tett meg, mint B. Ha mindketten ugyanazzal a sebességgel folytatják tovább az útjukat, akkor A N-be 4,5 órával, B M-be 8 órával a találkozás után fog megérkezni. Milyen távol van M-től N?

***628.** Két kerékpáros egyidejűleg indul el az A községből a B és C község felé. Az AC távolság 30 km-rel nagyobb, mint az AB távolság. Mindegyik kerékpáros 10 óra alatt teszi meg az utat. Mekkora az AB távolság, ha a második kerékpárosnak 21 km megtevéséhez 10 perccel kevesebb időre van szüksége, mint az első kerékpárosnak?

***629.** Egy ABC derékszögű háromszög B és C csúcsából egyszerre indul el egy-egy légy a BA átfogón, illetve a CA befogón az A pont felé. A BA átfogón mozgó légy sebessége 8,5 m/s, a CA befogón mozgó légy sebessége 5 m/s. Mikor lesz a két légy távolsága 26 méter, ha $d_{BA}=c=85$ m, $d_{CA}=b=75$ m?

630. Bontsuk fel 30-at két összeadandóra úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen.

631. Bontsunk fel egy 20 cm hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy az egyes részek fölé rajzolt négyzetek területének az összege minimális legyen.

632. Bontsuk fel a 10-et két olyan összeadandóra, amelyek szorzata maximális.

633. Bontsuk fel a p számot két részre úgy, hogy a részek szorzata a legnagyobb legyen.

634. Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyek befogóinak az összege 12 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

635. Egy gyár udvarán 40 m hosszú kerítéssel kell bekeríteni egy téglalap alakú rakodási területet három oldalról (a negyedik oldalon épület áll). Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy a bekerített terület a lehető legnagyobb legyen?

636. 24 m hosszú dróttal téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldala egy ház falához csatlakozzék. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha azt akarjuk, hogy az elkerített rész maximális területű legyen?

637. Az olyan téglalapok közül, melyeknek a kerülete k, melyiknek a legnagyobb a területe?

638. Egy trapéz egyik párhuzamos oldala 4, másik párhuzamos oldalának és m magasságának az összege 10. Hogyan válasszuk meg a trapéz méreteit, ha azt akarjuk, hogy területe maximális legyen?

639. Mekkorák az 10 cm-es és 15 cm-es befogójú derékszögű háromszögbe írható maximális területű téglalapok oldalai, ha a téglalap egyik szöge a háromszög derékszögével esik egybe?

Másodfokú kifejezést tartalmazó abszolútértékes egyenletek

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

640. $x^2-|x| = 6$.

641. $x^2+2{,}5\,|x|-1{,}5 = 0$.

642. $x^2-6\,|x|+8 = 0$.

643. $x^2+6\,|x|+8 = 0$.

644. $9x^2-18\,|x|+5 = 0$.

645. $0{,}25x^2-|x|-3 = -4$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

646. $|0{,}25x^2-x-3| = 2$.

647. $\left|0{,}25x^2-|x|-3\right| = 2$.

648. $|x^2-4| = x^2-4$.

649. $|-x^2+1| = -x^2+1$.

650. $(|x|+1)^2 = 4\,|x|+9$.

651. $(3\,|x|-3)^2 = |x|+7$.

652. $|x-3| = (x-3)^2$.

653. $|x^2-3x+2| = 3x-x^2-2$.

654. $|2x+3|-1 = |2x^2-x-1|$.

655. $|x^2-2x-3| = |2x-5|+1$.

656. $|5x-x^2-6| = x^2-5x+6$.

657. $|x^2-5x+6| = 5x-x^2-6$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

658. $3\,|x^2-4x+2| = 5x+16$.

659. $3\,|x^2-2x-1| = 5x+1$.

660. $3\,|x^2-4x+2| = 5x-4$.

661. $3\,|x^2-6x+7| = 5x-9$.

662. $|x^2-2x-3| = |x^2-2x+5|$.

663. $x^2-|x-1| = 1$.

***664.** $|x^2-1| = -|x|+1$.

IV.

*665. Oldjuk meg a racionális számok halmazán az

$$|x^2-4x+3|+|x^2-6x+8| = 1{,}5$$

egyenletet.

Másodfokúra redukálható magasabbfokú egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

666. $16x^4-625 = 0$.
667. $x^4-5x^2+4 = 0$.
668. $x^4-125x^2+484 = 0$.
669. $4x^4-17x^2+4 = 0$.
670. $x^8-13x^4+36 = 0$.
671. $x^6-2x^3-8 = 0$.
672. $16x^8-257x^4+16 = 0$.
673. $8x^6-9x^3+1 = 0$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán – alkalmas helyettesítés bevezetésével – a következő egyenleteket:

674. $(x-1)^2-5(x-1)+6 = 0$.
675. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x) = 24$.
676. $(x^2+2x)^2-14x^2 = 15+28x$.
677. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 6$.
678. $(x-2)^4-5(x-2)^2+4 = 0$.
679. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6 = 0$.
***680.** $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

Oldjuk meg a következő, úgynevezett reciprok egyenleteket a valós számok halmazán, felhasználva, hogy

ha $x+\dfrac{1}{x} = a$, *akkor* $x^2+\dfrac{1}{x^2} = a^2-2$.

***681.** $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) = 7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

***682.** $2\left(x^2+\dfrac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\dfrac{5}{x}\right)+74 = 0$.
***683.** $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6 = 0$.
***684.** $12x^4-16x^3-11x^2-16x+12 = 0$.
***685.** $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30 = 0$.

Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása a komplex számok halmazán

Oldjuk meg a következő valós együtthatós másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán:

686. *a)* $x^2=-1$; *b)* $x^2=-2$.
687. *a)* $x^2+4 = 0$; *b)* $x^2+9 = 0$.
688. *a)* $x^2-x+6 = 0$; *b)* $x^2+6x+36 = 0$.
689. *a)* $x^2+2x+2 = 0$; *b)* $x^2-2x+5 = 0$.
690. *a)* $x^2+x+2 = 0$; *b)* $x^2+3x+4 = 0$.
691. *a)* $2x^2+x+1 = 0$; *b)* $2x^2-x+3 = 0$.

Írjunk fel olyan másodfokú egyenleteket, amelyeknek a gyökei:

692. *a)* $x_1 = 1-3i$; $x_2 = 1+3i$; *b)* $x_1 = \sqrt{2}-i$; $x_2 = \sqrt{2}+i$.
693. *a)* $x_1 = 2-i\sqrt{5}$; $x_2 = 2+i\sqrt{5}$;
b) $x_1 = \sqrt{3}-i\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{3}+i\sqrt{2}$.

Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő másodfokúra redukálható egyenleteket:

694. $x^4+x^2+1 = 0$.
***695.** $8x^6-9x^3+1 = 0$.
***696.** $16x^8-257x^4+16 = 0$.
697. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12$.
698. $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10 = 0$.
699. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3) = 1$.
700. $(8x+7)^2(8x+6)(8x+8) = 72$.

Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő komplex együtthatós egyenleteket:

701. $x^2-(\sqrt{2}+1)x+1+\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-1) = 0.$

702. $x^2-(3i+2)x-2+4i = 0.$

703. $(1+i)x^2-2(2-i)x-2,5-1,5i = 0.$

704. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az $x^2+|x| = 0$ egyenletet.

***705.** Mekkora lehet a z komplex szám abszolútértékének a maximuma, ha

$$\left|z+\frac{1}{z}\right| = 1?$$

Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a számegyenesen a megoldáshalmazt:

706. $x^2>1.$ **707.** $x^2\geqq 1.$

708. $x^2<1.$ **709.** $x^2\leqq 1.$

710. $x^2-9>0.$ **711.** $x^2-9\geqq 0.$

712. $x^2-9<0.$ **713.** $x^2-9\leqq 0.$

714. $5(x^2-16)>0.$ **715.** $x(x-3)>0.$

716. $3x(x+5)<0.$ **717.** $2x(2-x)<0.$

718. $4x^2+x\geqq 0.$ **719.** $7x^2-3x<0.$

720. $15x^2>4x.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán
a) algebrai úton;
b) grafikus úton:

721. $x^2-2x-3>0.$

722. $x^2+2x+3\geqq 0.$

723. $x^2-2x+1\geqq 0.$

724. $x^2-3x-10\leqq 0.$

725. $x^2-5x+6>0.$

726. $x^2-5x+8>0.$

727. $-x^2+x+6\geqq 0.$

728. $2x^2+3x-2\leqq 0.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

729. $-x^2-6x+27\leqq 0.$

730. $2x^2-4x+13>0.$

731. $2x^2-x+4<0.$

732. $2x^2-13x+20<0.$

733. $-3x^2-x+2\geqq 0.$

734. $-3x^2+5x+2\geqq 0.$

735. $3x^2-5x-2<0.$

736. $4x^2-4x+1>0.$

737. $9x^2+6x+1>0.$

738. $-x^2+12x-36<0.$

739. $-x^2+12x-36\leqq 0.$

740. $-x^2+12x-36>0.$

741. $-x^2+12x-36\geqq 0.$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a pozitív valós számok halmazán:

742. $\dfrac{x^2-15x}{3}>108-5x.$

743. $\dfrac{2x^2-3}{2}-\dfrac{x^2+3}{4}>3.$

Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek? Ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

744. $\dfrac{x(x+1)}{x-1}>3.$

745. $\dfrac{x(x+1)}{x-1}>6.$

746. $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x-2} > 0$.

747. $\dfrac{x^2-25}{x-4} < 0$.

748. $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}$.

749. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} < \dfrac{4}{3}$.

750. $\dfrac{2}{x-3} > \dfrac{x}{1-x}$.

751. $\dfrac{x-2}{x+2} \geqq \dfrac{2x-3}{4x-1}$.

752. $\dfrac{1}{x-1} - 3 < \dfrac{2}{x-3}$.

753. $3 - \dfrac{2x-17}{x-5} > \dfrac{x-5}{x+2}$.

754. $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0$.

755. $\dfrac{(8-x)(-x+5)}{x^2-5x+6} < 0$.

756. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0$.

757. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$.

*758. $\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$.

759. Határozzuk meg azt a legkisebb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-5}{x^2+5x-14} > 0.$$

Határozzuk meg azt a legnagyobb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

760. $\dfrac{x-2}{x^2-9} < 0$.

761. $\dfrac{x+4}{x^2-9} - \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{4x}{-3x-x^2}$.

*762. $(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) < 0$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és állapítsuk meg, hogy a]9; 10] *intervallum részhalmaza-e a megoldáshalmaznak:*

763. $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2 > 0$.

*764. $\dfrac{(x-3)(x-5)(8-x)^3}{(x-2)(5x-7)^2} < 0$.

765. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$x^4-3x^3-x+3 < 0.$$

766. Milyen $p \in \mathbf{R}$ értékeknél teljesül minden valós x-re a $px^2+12x-5 < 0$ egyenlőtlenség?

*767. Határozzuk meg azokat a valós p paramétereket, amelyekre az

$$\frac{x^2+p^2}{p(6+x)} \geqq 1$$

egyenlőtlenség minden $-1<x<1$ értékre fennáll.

*768. Adott egy tört, amelynek számlálója p, nevezője p^2-1 ($|p| \neq 1, p \in \mathbf{Z}$). Ha mind a számlálóhoz, mind a nevezőhöz 2-t adunk hozzá, akkor a tört értéke $\dfrac{1}{3}$-nál nagyobb lesz. Ha mind a számlálóból, mind a nevezőből 3-at elveszünk, akkor a tört értéke pozitív marad, de $\dfrac{1}{10}$-nél kisebb lesz. Melyik ez a tört?

*769. Bizonyítsuk be, hogy az

$$1 \leqq \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leqq 3$$

egyenlőtlenség minden valós x-re fennáll.

*770. A p valós paraméter mely értékeire lesz igaz, hogy a

$$-2 < \frac{x^2+px-2}{-x^2+x-1} < 3$$

egyenlőtlenség $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén teljesül?

*771. Milyen p valós paraméter esetén lesz az $x^2-x-2<0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazának részhalmaza a $px^2-4x-1 \leqq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza?

*772. A p valós paraméter mely értékeinél esnek a $px^2+2x-3=0$ egyenlet gyökei az $[1; 3]$ intervallumba?

*773. Milyennek válasszuk a valós p paramétert, hogy a

$$(p-1)x^2-2px+p+3=0, \quad (p \neq 1)$$

másodfokú egyenlet mindkét gyöke pozitív legyen?

*774. Milyen p valós paraméter mellett elégítik ki a $2x^2+6x+p=0$ másodfokú egyenlet gyökei az

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<2$$

feltételt?

Milyen valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

*775. $(2x-1)(3x+2)(x+1)<0$.

*776. $\dfrac{2}{2x+1} > x^2-\dfrac{5}{2}x+2$.

*777. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2} < \dfrac{5}{4}$.

*778. $(2x+3)^2(3x-5)^3(x+1)(x-3)<0$.

*779. $2(x^3+1)^2 > (x^2+1)^3$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán x-re a következő paraméteres egyenlőtlenségeket:

780. $x^2-a^2<0, \quad a \in \mathbf{R}$.

781. $ax^2-\dfrac{1}{a}>0, \quad a \in \mathbf{R}^+$.

782. $x^2-4a^2-12ab-9b^2<0$, ahol $a, b \in \mathbf{R}^+$, $a>b$.

783. $(x+a)(x-b)+(x+b)(x-a) < 2a^2+2b^2$, ahol $a, b \in \mathbf{R}^+$.

784. $(a+x)(2x+a)+(x-a)(a-2x) > (a+2x)^2-a^2$, $a \in \mathbf{R}^+$.

785. $\dfrac{(a-x)(x-b)}{ax-b} < 0$, $a, b \in \mathbf{R}^+$, $a>b$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő, abszolútértékes kifejezést tartalmazó egyenlőtlenségeket:

786. $|x^2-4x|<5$.

787. $|x^2+x|-5<0$.

788. $|x^2-x-6|>4$.

789. $|x^2-x-3|<9$.

790. $x^2-5|x|+6<0$.

791. $|x^2-5x|<6$.

792. $|2x^2-9x+15| \geqq 20$.

793. $|2x^2-9x+15| \geqq 0$.

794. $|x^2-2x|<x$.

795. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

796. $|x^2-3x|+x-2<0$.

797. $|x^2-3x+2|>3x-x^2-2$.

798. $|x^2-2x-8|>2x$.

799. $x^2-|5x+8|>0$.

800. $x^2+4 \geqq |3x+2|-7x$.

801. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

802. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.

803. $(|x|-1)^2>2$.

804. $x^2+3|x|+2>6x|x|$.

805. $|x^2-1|+|x^2-9|<8$.

806. $\dfrac{x^2+6x-7}{|x+4|}<0$.

807. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqq 2x$.

808. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqq 2$.

*809. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| < 3.$

*810. $\left|\frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2}\right| < 3.$

Vegyes feladatok

811. Oldjuk meg a prímszámok halmazán az $x^2-2y^2 = 1$ egyenletet.

812. Határozzuk meg azokat a pozitív egész x és y számokat, amelyekre $x^2-y^2 = 133$.

***813.** Az $x^2-y^2 = 1980$ egyenletet hány olyan különböző $(x; y)$ számpár elégíti ki, amelynek elemei pozitív egész számok?

***814.** Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x+y = x^2-xy+y^2 \quad \text{egyenletet.}$$

815. Hány megoldása van az egész számok halmazán az

$$x^2-y^2 = 2xyz \quad \text{egyenletnek?}$$

***816.** Hány megoldása van a természetes számok halmazán a

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{1960} \quad \text{egyenletnek?}$$

***817.** Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-y^2 = p^2$ egyenletnek mindig van pozitív egész megoldása, ha $p>2$ egész szám.

***818.** Oldjuk meg a pozitív természetes számok halmazán a

$$19x^2-65y^2 = 1965 \quad \text{egyenletet.}$$

***819.** Határozzuk meg azokat a pozitív természetes számokat, amelyek kielégítik az $xy^2+2xy+x-243y = 0$ egyenletet.

820. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan x, y egész számok, amelyek kielégítenék a $15x^2-7y^2 = 9$ egyenletet.

821. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $3x^2+4xy+y^2 = p$ egyenletet, ahol p prímszám.

***822.** Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet

$$\frac{x-1}{1+(x-1)y}+\frac{y-1}{2y-1} = \frac{x}{x+1}.$$

823. Három egymás után következő páratlan szám négyzetének összege négyjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Melyek ezek a számok?

824. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek mindegyike 9-cel nagyobb számjegyei négyzetének az összegénél?

***825.** Hány megoldása van a pozitív egész számok halmazán az

$$\frac{1}{1970} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \text{egyenletnek?}$$

***826.** Megoldható-e az egész számok halmazán az

$$x^2+y^2 = 1977 \quad \text{egyenlet?}$$

***827.** Keressünk olyan kétjegyű számot, amely egyenlő a tízesek helyén álló számjegy köbének és az egyesek helyén álló számjegy négyzetének az összegével.

***828.** Két kétjegyű szám összegének négyzete egyenlő azzal a négyjegyű számmal, amely a két kétjegyű szám egymás mellé írásával keletkezik. Melyek ezek a kétjegyű számpárok?

***829.** Adjuk meg azokat az $(x; y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ számpárokat, amelyekre

$$4x^2-4x-y^2 = 20.$$

***830.** Négy asszony, mindegyik a lányával együtt, egy üzletben szőnyegszegőt vásárol. Mindegyik anya kétszer annyi métert vásárol, mint a lánya, és a 8 személy mindegyike annyi métert vesz, ahány forintot fizet egy-egy méterért. Egy méter szőnyegszegő ára forintban kifejezve egész szám. Bárányné 76 Ft-tal többet fizet, mint Zöldné, Nóra 3 m-rel kevesebbet vásárol, mint Feketéné, Ági 2 m-rel többet, mint Vali, aki 48 Ft-tal kevesebbet fizet, mint Szabóné. Hogy hívják Margit anyját?

831. Létezik-e megoldása a természetes számok halmazán az

$$x^3-5x^2 = 13 \quad \text{egyenletnek?}$$

832. Adjuk meg azokat az $(x; y)$ egész számpárokat, amelyekre

$$x^3+7y = y^3+7x \quad \text{teljesül.}$$

833. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $y^3-x^3 = 91$ egyenletet.

3. Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek

Irracionális egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán:

834. $\sqrt{x}=x$. **835.** $\sqrt{x}=-x$.

836. $\sqrt{x} = x-2$. **837.** $\sqrt{x+2} = x-4$.

838. $\sqrt{x} = 2x-6$. **839.** $\sqrt{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$.

840. $\sqrt{x^2-7} = 3$. **841.** $\sqrt{x+1} = 2x$.

842. $\sqrt{x+6} = x$. **843.** $\sqrt{x+1}+1 = x$.

844. $\sqrt{x^2-12} = \sqrt{x}$. **845.** $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x^2}$.

846. $\sqrt{x-3} = x-9$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

847. *a)* $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$; *b)* $\sqrt{-x} = -\frac{1}{2}x$; *c)* $\sqrt{x} = x-2$.

848. *a)* $\sqrt{x}=x^2$; *b)* $\sqrt{-x}=x^2$; *c)* $\sqrt{x} = 2x^2-1$.

849. *a)* $\sqrt{x} = \frac{1}{x}+\frac{7}{4}$; *b)* $\sqrt{x+2} = \frac{4}{x}$.

850. *a)* $\sqrt{3x-5} = x^2-7$; *b)* $\sqrt{4-x} = 3-\sqrt{5+x}$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

851. *a)* $x\sqrt{x}+\sqrt{x}-4 = 4(\sqrt{x}-1)$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{2}{9}-x} = \frac{1}{3}$.

852. *a)* $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$; *b)* $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-x} = 2$.

853. *a)* $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} = -2$; *b)* $\sqrt[5]{\frac{2}{3}x-9} = 2$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

854. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$. **855.** $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x} = 3$.

856. $\sqrt{x^2-9} = x^2-21$. **857.** $\sqrt{9+x}+\sqrt{25-x} = 2$.

858. $\sqrt{9+x}+\sqrt{25-x} = 0$. **859.** $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$.

860. $\sqrt{x^2+9} = 2x-3$. **861.** $\sqrt{x^2-9} = 3x-11$.

862. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1} = 1$. **863.** $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} = 5$.

864. $\sqrt{5x+20}+\sqrt{x+8} = 2$. **865.** $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = 1$.

866. $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5+x} = 3$. **867.** $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2} = x+1$.

868. *a)* $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{2}+4$; *b)* $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x} = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

869. *a)* $\sqrt[3]{x-4} = 2$; *b)* $\sqrt[3]{x-4} = -2$; *c)* $\sqrt[3]{x(x+6)} = x$.

870. *a)* $\sqrt[4]{x-2} = 1$; *b)* $\sqrt[4]{x-2} = -1$; *c)* $\sqrt[4]{x^2-36} = 2\sqrt{2}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

871. *a)* $\sqrt{x+5} = -3$; *b)* $\sqrt{x+2}+2 = 0$.

872. *a)* $\sqrt{4x-3} = -4$; *b)* $\sqrt{2x}-\sqrt{18x} = 2$.

873. *a)* $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} = 0$; *b)* $x-3\sqrt{x}-4 = 0$.

874. *a)* $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$; *b)* $\sqrt{8-x^2} = -x$.

875. *a)* $\sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} = 1$; *b)* $\sqrt{x^2-4x+4} = x-2$.

876. *a)* $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2x-1} = -2$; *b)* $\sqrt{100-x^2} = x-10$.

877. *a)* $\sqrt{x-7} + \sqrt{6-x} = 3$; *b)* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$.

878. *a)* $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = -1$; *b)* $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = -1$.

879. *a)* $\sqrt{x} - \sqrt{-3-x} = 1$; *b)* $\dfrac{21}{\sqrt{2x+1}} - 2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = 0$.

880. *a)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + 4 = 0$; *b)* $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{6}{\sqrt{x-3}}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

881. $\sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{3x-1}$. **882.** $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$.

883. $\sqrt{4+x} + \sqrt{9+x} = \sqrt{x+25}$.

884. $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$.

885. $\sqrt{20+x} + \sqrt{20-x} = \sqrt{6x}$.

886. $\sqrt{4x+5} + \sqrt{10x+6} = \sqrt{24x+25}$.

Van-e a racionális számok halmazán megoldása a következő egyenleteknek?

887. $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

888. $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = 4$. **889.** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3}{2}$.

890. $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2$.

Megoldhatók-e a következő egyenletek a pozitív valós számok halmazán?

891. $x + \sqrt{x^2+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

892. $\dfrac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-4}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-4}}$.

893. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$.

894. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$.

895. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+19}$.

***896.** $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

***897.** $\sqrt{23 + \sqrt{2x - \sqrt{5x^2-21x-68}}} = 5$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

***898.** $\sqrt{x+5} = x^2-5$.

899. $4\sqrt{1-x+x^2} = 8-x$.

900. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}$.

901. $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + 1$.

902. $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} = 0$.

***903.** $\sqrt{4x^2-3x+15} + \sqrt{4x^2-3x+8} = 7$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen:

904. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$.

905. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$.

906. $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 5$.

907. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

908. $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{x^2+4x+4}$.

909. $\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{x^2-2x+1}$.

910. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2-6x+9}$.

*911. $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$.

*912. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

*913. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

*914. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

915. $5x-3\sqrt{x}=14$.

916. $|2\sqrt{2|x|-1}-1|=3$.

917. $|\sqrt{x}-3|=1+|\sqrt{5-x}-1|$.

918. $\sqrt{x^2+17x+4}-\sqrt{x^2+11x+7}=\frac{2x-1}{5}$.

919. $2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}=5$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő másodfokú egyenletekre visszavezethető egyenleteket:

920. $5\sqrt[4]{x}+2=3\sqrt{x}$. 921. $2\sqrt[3]{x}+5=\frac{63}{\sqrt[3]{x}}$.

922. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

923. $x^3-3x\sqrt{x}+2=0$.

924. $x^5-33x^2\sqrt{x}+32=0$.

Milyen számok elégítik ki a következő egyenleteket?

*925. $\sqrt{1-x^2}=(1-\sqrt{x})^2$.

*926. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2$.

*927. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

928. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=2{,}5$.

929. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=2$. 930. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

931. $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4$. 932. $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$.

*933. $\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{x}{2}\sqrt[7]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$.

Mely valós x-ekre teljesülnek a következő egyenletek:

*934. $1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}=\sqrt{1+\frac{x}{a}}$, ahol $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

*935. $\sqrt{a+x}+\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$, $(a\in\mathbf{R}^+)$.

*936. $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\frac{x}{2a}$, $(a\in\mathbf{R}\setminus\{0\})$.

*937. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=-1$, $(a, b\in\mathbf{R})$.

*938. $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}$, $(a\in\mathbf{R}^+)$.

*939. $x+\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $(a\in\mathbf{R})$.

*940. $x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$, $\left\{a\in\mathbf{R}\,|\,0\leqq a\leqq\frac{1}{4}\right\}$

*941. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$, $(a\in\mathbf{R})$.

*942. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$, $(a\in\mathbf{R})$.

*943. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$, $(a, b\in\mathbf{R})$.

Irracionális egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen:

944. $\sqrt{x} > -1.$ **945.** $\sqrt{2x-5} > 7.$

946. $\sqrt{x^2} < x+1.$ **947.** $2\sqrt{x-1} < x.$

948. $\sqrt{x+2} > x.$ **949.** $\sqrt{x+12} < x.$

950. $\sqrt{2x+1} > 1-x.$ **951.** $\sqrt{x+3} \leqq 1-x.$

952. $\dfrac{\sqrt{3-x}+1}{x} < 1.$ **953.** $\sqrt{x^2-1} > x-3.$

Határozzuk meg azt a legkisebb egész számot, amely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

954. $\sqrt{x+3} \leqq x+1.$ **955.** $\sqrt{2x+9} < 3-x.$

956. $\sqrt{x-5}+\sqrt{x} \leqq 5.$ **957.** $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

Milyen egész számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket:

958. $\sqrt{-x^2+4x-3} < x-2.$

959. $x+\sqrt{2-x} > 0.$

960. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

961. $\sqrt{3x+13} \leqq x+1.$

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

962. $\sqrt{x^2-4x} \geqq x-4.$

963. $\sqrt{x^2+4x} > 2-x.$

964. $\sqrt{x^2-1} < 5-x.$

965. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

966. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$

***967.** $\sqrt{\left|\dfrac{1}{4}-x\right|} \geqq x+\dfrac{1}{2}.$

968. $\sqrt{3x+1} > \sqrt{2-x}.$

969. $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}.$

970. $x^2 > 2\sqrt{x^2-4x+4}.$

971. $x^2+2x+1 < 3\sqrt{x^2-4x+4}.$

972. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8} > 3.$

973. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2} > 3.$

974. $\sqrt{20-x}-\sqrt{10-x} > 2.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

975. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1.$ **976.** $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1.$

977. $\sqrt{1-\dfrac{x+2}{x^2}} < \dfrac{2}{3}.$ **978.** $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x} < 2.$

***979.** $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$ **980.** $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$

981. $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x.$

982. $\sqrt{x^2-x-12} < x.$

983. $\sqrt{x(x+6)+9}-\sqrt{x^2-6x+9} > 1.$

984. $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x.$

985. $\sqrt{x^4-2x^2+1} \geqq 1-x.$

*986. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1.$

Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

*987. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1.$ *988. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{-x^3+4}} \geqq 0.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán x-re a következő paraméteres egyenlőtlenségeket, ahol a p valós paramétert jelöl:

*989. $x-\sqrt{p-2x} < 0.$

*990. $x+4p \geqq 5\sqrt{px}.$

*991. $\sqrt{p-x}+\sqrt{p+x} > p.$

*992. $\sqrt{x(2p-x)} \geqq p-x.$

*993. $(p+1)\sqrt{2-x} < 1.$

4. Nevezetes egyenlőtlenségek és alkalmazásuk

994. Bizonyítsuk be, hogy $\forall a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ valós számra igaz, hogy

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \geqq 2.$$

995. Mutassuk meg, hogy ha $a,\ b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{2ab}{a+b} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

996. Igazoljuk, hogy ha $a,\ b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqq \sqrt{ab}.$$

Milyen geometriai jelentést adhatunk az egyenlőtlenségnek?

997. Bizonyítsuk be, hogy ha $a,\ b \in \mathbf{R}$, akkor

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Milyen geometriai jelentése van az egyenlőtlenségnek $a,\ b \in \mathbf{R}^+$ esetén?

998. Igazoljuk, hogy ha $a,\ b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqq \frac{a^3+b^3}{2}.$$

999. Bizonyítsuk be, hogy ha $a,\ b \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}.$$

*1000. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$, akkor

$$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \leqq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}.$$

1001. Mutassuk meg, hogy $a^n+b^n \leqq (a+b)^n$, $(n \in \mathbf{N}^+)$ teljesül $\forall a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ számra.

1002. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $n \geqq m \geqq 2$; $n, m \in \mathbf{N}^+$, akkor

$$\sqrt[m]{a^m+b^m} \geqq \sqrt[n]{a^n+b^n}.$$

1003. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b pozitív valós számra teljesül, hogy

$$a^4+b^4 \geqq ab(a^2+b^2).$$

1004. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív a, b, c valós számra igaz, hogy

$$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c).$$

1005. Igazoljuk, hogy bármely valós számra teljesül, hogy

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac.$$

1006. Igazoljuk, hogy bármely pozitív a, b, c valós számra igaz, hogy

$$a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc.$$

1007. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}, \quad \text{ha } a, b, c, d \in \mathbf{R}^+.$$

*1008. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}, \quad \text{ha } a, b, c \in \mathbf{R}^+.$$

*1009. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad \text{ha } a_1, a_2, \ldots, a_n \geqq 0 \text{ és } n \in \mathbf{N}^+.$$

*1010. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, akkor

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqq n, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

1011. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 a_2 \ldots a_n > 0$, akkor

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geqq n, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

1012. Igaz-e minden pozitív a valós számra, hogy

$$a^2+2 \geqq 2\sqrt{a^2+1}\,?$$

1013. Teljesül-e minden pozitív x valós számra, hogy

$$\frac{4}{x^2}+x \geqq 3\,?$$

1014. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b=1$, akkor $a^4+b^4 \geqq \frac{1}{8}$.

1015. Igaz-e az a, b, c tetszőleges pozitív valós számra, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}\,?$$

1016. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}^+$ és $a+b=c$, akkor

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2} > \sqrt[3]{c^2}.$$

1017. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad a, b \in \mathbf{R}^+.$$

Bizonyítsuk be, hogy:

1018. $2a^2 = 1+a^4$, ha $a \in \mathbf{R}$.
*1019. $(a+b)^n \leqq 2^{n-1}(a^n+b^n)$, ha $a, b \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ és $n \in \mathbf{N}^+$.
*1020. $2^n-1 \geqq n\sqrt{2^{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^+$,
1021. $(n!)^2 > n^n$, ha $n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$.
1022. $2^n n! < (n+1)^n$, $n \in \mathbf{N}^+$.

$$\mathbf{1023.}\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}},\qquad a, b, c, \in \mathbf{R}^{+}.$$

$$\mathbf{1024.}\ \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqq 3,\qquad a, b, c\in \mathbf{R}^{+}.$$

1025. Igazoljuk, hogy ha $0<a<1$ és $0<b<1$, akkor

$$0<a+b-ab<1.$$

Bizonyítsuk be, hogy

1026. $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geqq ac+bd,$ ha $a, b, c, d\in \mathbf{R}^{+}$.

1027. $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqq\sqrt{ab}+\sqrt{cd},$ ha $a, b, c, d\in \mathbf{R}^{+}$.

1028. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc,$ ha $a, b, c\in \mathbf{R}^{+}$.

Igazoljuk, hogy minden a, b valós számra teljesül, hogy:

1029. $|a+b|\leqq|a|+|b|$.

1030. $|a-b|\leqq|a|+|b|$.

1031. $|a+b|\geqq\big||a|-|b|\big|$.

1032. Bizonyítsuk be, hogy ha $|a|<1$ és $|b|<1$, akkor

$$|a+b|<|1+ab|.$$

1033. Bizonyítsuk be, hogy ha $|b|<\frac{|a|}{2}$, akkor $\frac{1}{|a-b|}<\frac{2}{|a|}$.

1034. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x|<1$ és $n\in \mathbf{N}^{+}\setminus\{1\}$, akkor

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

1035. Igazoljuk, hogy bármely a, b, c valós számra teljesül, hogy

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqq|a|+|b|+|c|.$$

***1036.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x\geqq-1$ és $0<n<1$, akkor $(1+x)^n\leqq 1+nx$, ha pedig $n<0$ vagy $n>1$, akkor $(1+x)^n\geqq 1+nx$ egyenlőség csak az $x=0$ esetén áll fenn. (Bernoulli-féle egyenlőtlenség).

***1037.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y\in \mathbf{R}^{+}$, akkor $x^y+y^x>1$.

***1038.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqq\sqrt{a_1^2+a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}\text{ és } b_1=b_2=\ldots=b_n\neq 0,\text{ vagy } b_1=b_2=\ldots=b_n=0.$$

(Cauchy egyenlőtlenség).

1039. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x, y valós számok esetén teljesül, hogy

$$x^2+y^2-xy-x-y+1\geqq 0.$$

1040. Igazoljuk, hogy $\forall\, x\in \mathbf{R}$ esetén

$$2x^4-2x^3-x^2+1\geqq 0.$$

1041. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c tetszőleges valós számok, akkor

$$(a+b)(a+b-2c)+(b+c)(b+c-2a)+(c+a)(c+a-2b)\geqq 0.$$

1042. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Igaz-e, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$?

1043. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},\qquad n\in \mathbf{N}^{+}\setminus\{1\}.$$

1044. Bizonyítsuk be, hogy ha $n\in \mathbf{N}^{+}$, akkor

$$1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2.$$

1045. Bizonyítsuk be, hogy ha $n\in \mathbf{N}^{+}$, akkor

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

*1046. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbf{N}^+$, akkor

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)^2<\frac{1}{2}.$$

*1047. Mutassuk meg, hogy $\forall n \in \mathbf{N}^+$ számra igaz, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leqq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

1048. Legyen a, b, c egy háromszög három oldalának a hossza. Bizonyítsuk be, hogy

$$2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2.$$

1049. Bizonyítsuk be, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\sin 2\alpha+\frac{2}{\sin 2\alpha} \geqq 3.$$

1050. Az egyenlő átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb az átfogóhoz tartozó magassága?

1051. Azok közül a derékszögű háromszögek közül, amelyeknek egyenlő az átfogóhoz tartozó magassága, melyiknek a legkisebb az átfogója?

1052. Adott körlap tetszőleges pontjából két egymásra merőleges egyenes szakaszt húzunk a körvonalig. Mikor lesz e két szakasz összege a legnagyobb?

1053. Az egyenlő kerületű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a területe?

1054. Egy 900 m² területű téglalap alakú sportpályát 120 000 Ft-ból körül lehet-e keríteni, ha az egyik pár párhuzamos oldalának a kerítése méterenként 500 Ft-ba, a másik pár párhuzamos oldalának a kerítése pedig méterenként 200 Ft-ba kerül?

1055. Egy a oldalú négyzet alakú papírlapból – a sarkokból kis egybevágó négyzetek kivágása után – dobozt hajtogatunk. Mekkora legyen a kivágott négyzetek oldala, hogy a hajtogatással maximális térfogatú dobozt kapjunk?

*1056. Határozzuk meg az $f(x)=x+\frac{a}{x}$ $(a>0)$ függvény minimumát a $]0;+\infty[$ intervallumon.

*1057. Adott felszínű téglatestek közül melyiknek a legkisebb a testátlója?

*1058. Az egyenlő térfogatú paralelepipedonok közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

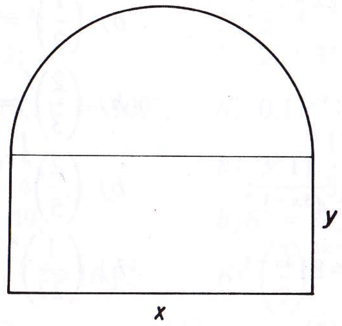
*1059. Hogyan válasszuk meg az adott oldalélű szabályos négyoldalú gúla alapélét és magasságát, hogy a gúla térfogata maximális legyen?

*1060. Adott egy egyenes körkúp alapkörének a sugara és a magassága. Írjunk a kúpba maximális térfogatú hengert. Határozzuk meg ezen henger alapkörének a sugarát és a magasságát. Mekkora lesz a maximális térfogat?

*1061. Adott sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú kúpot. Mekkora lesz ennek a kúpnak a térfogata, a magassága, az alapkörének a sugara?

*1062. Adott sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert. Mekkora lesz a henger alapkörének a sugara, a henger magassága és a térfogata?

*1063. Adott egy k kerületű ablak, melynek alakja egy téglalap és felette egy félkör *(3. ábra)*. Milyennek válasszuk a téglalap két oldalának az arányát, ha azt akarjuk, hogy az ablak maximális mennyiségű fényt engedjen be?



3. ábra

5. Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Exponenciális egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

1064. *a)* $3^x=27$; *b)* $2^x=8$.

1065. *a)* $3^{3x}=27$; *b)* $2^{3x}=8$.

1066. *a)* $3^{5x-3}=81$; *b)* $2^{5x-3}=16$.

1067. *a)* $3^{4x-5}=729$; *b)* $2^{4x-5}=64$.

1068. *a)* $3^{|x|}=27$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}=81$.

1069. *a)* $3^{|3x-4|}=9^{2x-2}$; *b)* $2^{-4x}=\frac{1}{4}$.

1070. *a)* $4^x=\frac{1}{4}$; *b)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4}=1$.

1071. *a)* $10^x=0{,}01$; *b)* $10^x=0{,}01\cdot 10^{3x+3}$.

1072. *a)* $4^x=32$; *b)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\frac{27}{8}$.

1073. *a)* $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x}=128$; *b)* $(0{,}125)^{3-4x}=\frac{1}{32}$.

1074. *a)* $7^x=0$; *b)* $\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$.

1075. *a)* $5^x=3^x$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$.

1076. *a)* $2^{-4x}=\frac{1}{4^{5x-1}}$; *b)* $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2x}=\frac{125}{8}$.

1077. *a)* $3^{2-3x}=81^{4x+1}$; *b)* $\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$.

1078. *a)* $2^{x^2-7x+12}=1$; *b)* $\left(\frac{1}{64}\right)^{\sqrt{x+2}}=0{,}5$.

1079. *a)* $5^{x^2-8x+12}=1$; *b)* $4^x=8^{2x-1}$.

1080. *a)* $4^{2x}=\sqrt[3]{128}$; *b)* $\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{5}\right)^{9-x}$.

1081. *a)* $\sqrt[3]{4^x}=\sqrt{2^{3x+1}}$; *b)* $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3x-7}{x-3}}=\frac{1}{2}$.

1082. *a)* $\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{8}{27}$; *b)* $3^{-4x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1083. *a)* $100\cdot 2^x=10^{3x+3}\cdot 5^{-x}$;

b) $7^{x+2}-\frac{1}{7}\cdot 7^{x+1}-14\cdot 7^{x-1}+2\cdot 7^x=48$.

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket:

1084. *a)* $2^{x-2}=5^{2-x}$; *b)* $3^{3^x}=27^{27}$.

1085. *a)* $8^{5-x}=7^{x-5}$; *b)* $5^{x^2}=5^{3x}$.

1086. *a)* $3^{x-4}=2^{x-4}$; *b)* $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$.

1087. *a)* $4^{2x-3}=7^{x-1{,}5}$; *b)* $7^{x-3}=4^{2x-6}$.

1088. *a)* $0{,}5^{\sqrt{x-3}}=1$; *b)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x-2}=1$.

1089. *a)* $\frac{1}{8}\cdot 2^{x^2}=4^x$; *b)* $3^{x^2}=27\cdot 9^x$.

1090. *a)* $9^{\sqrt{x}}=3^{x-3}$; *b)* $3^{-\frac{x}{2}+1}=9$.

1091. *a)* $2^x=-2$; *b)* $2^x+3^x=0$.

1092. *a)* $1000\cdot(0{,}1)^{\frac{1}{x}}=100^x$; *b)* $0{,}11^{x^3-5}=0{,}001\,331$.

1093. *a)* $4^{\frac{1}{x}-2}=\frac{1}{4}$; *b)* $3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

1094. *a)* $7^{1-|x|}=49$; *b)* $6^{|x|}=36$.

1095. *a)* $2^{x^2-6x-2{,}5}=16\sqrt{2}$; *b)* $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

1096. *a)* $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x}=9$.

1097. *a)* $0{,}1^{-(x^2-5x+8)}=100;$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{4x-3}=\frac{4096}{531\,441}.$

1098. *a)* $2\cdot\left(\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}=4;$ *b)* $5^{(x^2+x-2)(3-x)}=1.$

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1099. $3^x=6.$
1100. $3^x=2x+3.$
1101. $2^x=4x.$
1102. $2^x=x^2.$
1103. $2^{-x}=-x+2.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1104. *a)* $3^x=8;$ *b)* $3^x=6.$
1105. *a)* $15^x=236;$ *b)* $14^{x-1}=19.$
1106. *a)* $18^{3x+1}=475;$ *b)* $0{,}17^{x+2}=9.$
1107. *a)* $3^{2x-3}=11^{1-x};$ *b)* $17^{x-2}=19^{x-3}.$
1108. *a)* $3^{2(x+2)}=13^{2x-1};$ *b)* $5^{x+3}\cdot 2^{x-1}=375.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1109. $2^{x+3}-2^x=112.$
1110. $10^x+10^{x-1}=0{,}11.$
1111. $2^{x+2}+2^{x-2}=34.$
1112. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=896.$
1113. $2\cdot 3^{x+3}-5\cdot 3^{x-2}=1443.$
1114. $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950.$
1115. $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}.$
1116. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=5^x+5^{x-1}+5^{x-2}.$
1117. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}.$
1118. $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}.$
1119. $5^{4x-3}-4\cdot 5^{4x-1}+8\cdot 5^{4x+1}=24\,505.$
1120. $25\cdot 5^{x+1}+4\cdot 5^x+5^{x-1}=646.$

1121. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$
1122. $5^{2x+1}+7^{x+1}=35+175^x.$
1123. *a)* $\sqrt{2^{x+14}}-\sqrt{2^{x+12}}=64;$ *b)* $\sqrt{3^{x-54}}-7\cdot\sqrt{3^{x-58}}=162.$

Oldjuk meg a következő másodfokúra visszavezethető egyenleteket:

1124. *a)* $4^x+2^{x+1}=8;$ *b)* $3^{x+2}+9^{x+1}=810.$
1125. *a)* $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0;$ *b)* $4^x-9\cdot 2^x+8=0.$
1126. *a)* $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29;$ *b)* $2^{2+x}-2^{2-x}=15.$
1127. *a)* $5^{2x-1}+5^{x+1}=250;$ *b)* $3^{2x+2}-12\cdot 3^{x+1}+27=0.$
1128. *a)* $5^x+\frac{125}{5^x}=30;$ *b)* $4\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^{x+1}-25=0.$
1129. *a)* $5^x+0{,}2^x=4{,}8;$ *b)* $10^x-10^{-x}=\frac{8}{3}.$
1130. *a)* $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0;$

b) $4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2=0.$

1131. *a)* $9^{x-1}+3^{x+2}=90;$ *b)* $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0.$
***1132.** *a)* $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 6^{\frac{x}{2}};$ *b)* $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2.$
***1133.** *a)* $5^{3x}+9\cdot 5^x+27\cdot 5^{-3x}=64-27\cdot 5^{-x};$

b) $3^{\sqrt[3]{x^2}}=3\cdot 3^{\sqrt[3]{x}+1}.$

Logaritmikus egyenletek

1134. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\log_2 x=4;$ *b)* $\log_3 x=2;$ *c)* $\log_5 x=-2$ *d)* $\log_5 x=23.$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1135. *a)* $\lg x=-1;$ *b)* $\log_{0,1} x=-1;$

c) $\log_{100} x=\frac{2}{3};$ *d)* $\log_{1000} x=-\frac{2}{3}.$

1136. *a)* $\lg x=0{,}3010$; *b)* $\lg x=-0{,}4437$;
c) $\lg x=2{,}4298$; *d)* $\lg x=0{,}3817-2$.

1137. *a)* $\log_{0,3} x=3$; *b)* $\log_{0,25} x=\frac{1}{4}$;
c) $\lg x=0$; *d)* $\lg x=0{,}4343$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

1138. *a)* $x=\log_2 2$; *b)* $x=\log_3 81$;
c) $x=\lg 10^6$; *d)* $x=\log_5 1$;
e) $x=\log_2 \sqrt{2}$; *f)* $x=\log_{\sqrt{2}} 2$.

1139. *a)* $x=\log_2 8$; *b)* $x=\log_4 8$;
c) $x=\log_{16} 8$; *d)* $x=\log_7\left(\frac{1}{7}\right)$;
e) $x=\log_{49}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; *f)* $x=\log_{343}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

1140. *a)* $\log_3(x-12)=2$; *b)* $\log_5(x+10)=3$.

1141. *a)* $\log_{0,5}(5x-1)=-2$; *b)* $\log_{36}(x^2-10)=\frac{1}{2}$.

1142. *a)* $\log_3|x|=2$; *b)* $\log_2|x|=4$.

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

1143. *a)* $|\log_3 x|=1$; *b)* $|\log_3|x||=1$.
1144. *a)* $\log_2|x-2|=0$; *b)* $\lg|x-1|=1$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1145. *a)* $\log_3(x-4)(x-2)=1$; *b)* $\log_8(x^2-2x-34)=0$.
1146. *a)* $\log_{0,5}(x^2-5x+8)=-1$;
b) $\log_2(x^2-5x+8)=1$.
1147. *a)* $\log_2\log_3\log_4 x=0$; *b)* $\log_5\log_{0,5}\log_{0,25} x=1$.
1148. *a)* $\lg\lg\lg p=0$, $p\in\mathbf{R}^+$;
b) $\log_a\log_b\log_c x=p$, $a, b, c\in\mathbf{R}^+\setminus\{1\}$.

Határozzuk meg a logaritmus alapszámát a következő esetekben:

1149. *a)* $\log_x\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$; *b)* $\log_x 8=-\frac{1}{2}$.

1150. *a)* $\log_x 0{,}125=-2$; *b)* $\log_x 36=\frac{3}{2}$.

1151. *a)* $\log_x\frac{1}{64}=-3$; *b)* $\log_x(x+6)=2$.

1152. *a)* $\log_x 16-\log_x 2=\frac{1}{2}$; *b)* $\log_x(6x+5x^2)=3$.

1153. Határozzuk meg a következő egyenletek egész gyökét:

a) $\frac{\lg(2x+1)}{\lg(x-1)}=2$; *b)* $\frac{\lg(x^2-20)}{\lg(x+10)}=1$; *c)* $\frac{\log_x(35-x^3)}{\log_x(5-x)}=3$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a logaritmus azonosságainak a felhasználásával:

1154. *a)* $\lg x=\lg 2+\lg 4$; *b)* $\lg x=-2\lg 5$.
1155. *a)* $2-\lg x=\lg 2+\lg 4+\lg 25$; *b)* $\lg 2+\lg x=\lg(x+3)$.
1156. *a)* $2\lg x=\lg 16+\lg 4$; *b)* $2\lg 5+\lg x=1-\lg 2$.
1157. *a)* $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$;
b) $\lg(x-4)+\lg(x+3)=\lg(5x+4)$.
1158. $\ln(x^3+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1)=\ln 3$.
1159. $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$.
1160. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.
1161. $\frac{\lg(2x+5)-\lg x}{2+\lg 100}=\frac{1}{4}$.
1162. $2\log_2\left(\frac{x-7}{x-1}\right)+\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.
1163. *a)* $\frac{\lg x}{\lg x-\lg 2}=3$; *b)* $\frac{\lg 2x}{\lg|4x-15|}=2$.

Egyenértékűek-e a valós számok halmazán a következő egyenletek?

1164. $3x-2 = 6-x$ és
$3x-2+\lg(1-x^2) = 6-x+\lg(1-x^2)$.

1165. $5x-2 = 2x+4$ és
$5x-2+\lg(x^2+3) = 2x+4+\lg(x^2+3)$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1166. *a)* $\log_2 x = \frac{1}{3}(x+1)$; *b)* $\log_2 x = \frac{6}{x}$.

1167. *a)* $\log_2 x = \frac{1}{x-1}+1$; *b)* $\lg(x+1) = x-1$.

1168. *a)* $\lg x = \sqrt{x}$; *b)* $\lg x = \sqrt{x}-1$.

1169. *a)* $\lg x = 2^{-x}$; *b)* $\log_2 x = x^2-1$.

Van-e megoldása a pozitív racionális számok halmazán a következő egyenleteknek? Ha igen, akkor adjuk meg.

1170. $\lg\sqrt{x^2-4x}-\lg\sqrt{4-x} = 0$.

1171. $\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\lg(2x+15) = 1$.

1172. $\lg\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\lg(2x+3) = \lg 15$.

1173. $\lg^2 3-\lg^2 2 = (1-\lg x)\lg\frac{3}{2}$.

***1174.** $\log_3 \log_4 \log_3^2(x-3) = 0$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1175. *a)* $\log_5 5^x = \frac{1}{x^{-1}}$; *b)* $\lg 10^x = \frac{1}{x^{-1}}$.

1176. *a)* $\frac{\lg 3^x}{x} = \lg 3$; *b)* $\frac{\lg 2^x}{x} = \lg 2$.

1177. *a)* $\log_x 3x = 3$; *b)* $\log_x 2x = 2$.

1178. *a)* $\frac{\log_x 4}{\log_x 3} = \frac{\lg 4}{\lg 3}$; *b)* $\frac{\log_x 3}{\log_x 2} = \frac{\lg 3}{\lg 2}$.

1179. *a)* $\log_x 2+\log_x 3 = \frac{1}{3}$; *b)* $\log_x x^2 = 1$.

1180. *a)* $\lg(7x-9)^2+\lg(3x-4)^2 = 2$;
b) $\frac{1}{3}\lg(271+3^{\sqrt{2x}}) = 1$.

1181. *a)* $\lg^2 x+\lg x^2 = \lg^2 2-1$;
b) $\frac{1}{2}\lg 2x = \lg(3-x)-\lg\sqrt{x+1}$.

1182. *a)* $\lg(x-1)^3-3\lg(x-3) = \lg 8$;
b) $\lg(x^2-1) = \lg(x+1)+\lg(x-1)$.

***1183.** *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:*
a) $|1+\log_{\frac{1}{3}} x|-3 = |2-\log_{\frac{1}{3}} x|$;
b) $|1-\log_{\frac{1}{5}} x|+2 = |3-\log_{\frac{1}{5}} x|$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, felhasználva, hogy $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$; $a, b, c \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$:

1184. *a)* $\log_2 x+\log_8 x = 8$; *b)* $\log_2 x+\log_4 x = 1$.

1185. *a)* $\log_9 x = 0{,}5\log_x 3$; *b)* $\log_2(x-1)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 9$.

1186. *a)* $2\log_x 25-3\log_{25} x = 1$;
b) $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x = 7$.

1187. *a)* $\log_4 x+\log_x 4 = 2$; *b)* $\log_4 x+\log_x 4 = \frac{5}{2}$.

1188. *a)* $\log_9 x+\log_{x^2} 3 = 1$; *b)* $2\log_x 25-3\log_{25} x = 1$.

1189. *a)* $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x = 6$;
b) $\log_3 x-6\log_x 3 = 5$.

1190. *a)* $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x = 1$;
b) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3 = 0$.

1191. *a)* $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64 = 3;$

b) $\log_{\frac{4}{\sqrt{x}}} x+\log_3 x-\log_{\frac{1}{3}} x = 8.$

1192. *a)* $\log_4^2 (x-1)^4-\log_{\frac{1}{2}} (x-1) = 5;$

b) $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6} = 0.$

1193. Hány egynél nagyobb gyöke van a

$$\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\log_2^2 x+\log_2^4 x = 1 \text{ egyenletnek?}$$

Ha léteznek ilyen gyökök, akkor határozzuk meg az értéküket.

Vegyes feladatok

1194. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2n} = 0{,}04^{-28}$$

egyenletet, ahol $n\in \mathbf{N}^+$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

***1195.** $4^{\frac{1}{x}}+2x\cdot 2^{\frac{1}{x}}-6x = 9, \quad (x\in \mathbf{R}^+).$

1196. $2^{3+\log_2 24} = 3\cdot 2^{\frac{1}{x}}.$

1197. $5^{1+\log_5 \cos x}=2{,}5.$

1198. $3^{\lg \operatorname{tg} x}+3^{\lg \operatorname{ctg} x}=2.$

1199. *a)* $x^{\lg x}=1;$ *b)* $x^{\lg x}=100x.$

1200. $x^x=x.$

1201. $x^{1-\lg x}=0{,}01.$

1202. $x^{\lg\sqrt{x}}=100.$

1203. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x.$

1204. $\sqrt[3]{x^x}=x^{\sqrt[3]{x}}.$

1205. Van-e megoldása a pozitív racionális számok halmazán az

$$x^{2+\log_3 x} = 3^8 \text{ egyenletnek?}$$

1206. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^{\log_{3x} 6}-2^{\log_{3x} 6}-2 = 0.$$

Oldjuk meg a következő egyenleteket az egész számok halmazán:

1207. *a)* $x^{\log_4 x-2} = 2^{3(\log_4 x-1)};$ *b)* $8^x+18^x = 2\cdot 27^x;$

c) $x^{\frac{1}{2}+\lg x} = \sqrt{x^5}.$

1208. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$25^{\log_x 2}-26\cdot 5^{1+\log_x 2}+625 = 0.$$

1209. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $3^{1+\log_{\sqrt{2}} x}+9^{\log_{\sqrt{2}} x} = 108;$

b) $7^{\log_x 9}-7^{\log_x 3}-42 = 0.$

1210. Hány elemű halmaz a $\sqrt[\lg x]{x}=10^{x^4}$ egyenlet megoldáshalmaza?

Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenleteket:

***1211.** *a)* $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x-\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x =\dfrac{3}{2};$

b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

***1212.** *a)* $2^{\log_2^2 x+1} = (x^2)^{\log_2 x}-48;$

b) $x^{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\lg x} = \sqrt{x}.$

***1213.** *a)* $\log_{x^2-x-2}x=1;$

b) $3^{2x+1} = 3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}.$

Adjuk meg a következő egyenletek megoldáshalmazát:

1214. $a^1\cdot a^3\cdot a^5\cdot\ldots\cdot a^{2x-1} = p$, ahol $a\in \mathbf{R}^+$ és $a>1$, $p\in \mathbf{R}^+$, $x\in \mathbf{N}^+$.

1215. $1+a+a^2+\ldots+a^{x-1}+a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$, ahol $x\in \mathbf{N}$, $a\in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$.

1216. $\log_p \log_p x = 1+\log_p a-\log_p b$, ahol $a, b\in \mathbf{R}^+$, $p\in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$, $x\in \mathbf{R}^+$.

***1217.** $\dfrac{\lg x}{\lg (x-a)} = 2, \quad (x \in \mathbf{R}^+,\ a \in \mathbf{R},\ x > a).$

***1218.** $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}, \quad (x \in \mathbf{R}^+;\ a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}).$

***1219.** A pozitív valós p paraméter mely értékeire oldható meg a

$$2 \lg x - \lg (x-1) = \lg p$$

egyenlet? Adjuk meg az egyenlet megoldáshalmazát.

***1220.** Oldjuk meg x-re a következő paraméteres egyenletet:

$$\log_a x + \log_x a = b, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\},\ b \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}.$$

***1221.** A valós a és b paramétereknek milyen feltételt kell kielégíteniük, hogy az

$$1 + \log_b (2 \lg a - x) \log_x b = \frac{2}{\log_b x}, \quad \text{ahol} \quad a \in \mathbf{R}^+,\ b \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$$

egyenletnek legalább egy megoldása legyen? Adjuk meg az egyenletnek ezt a gyökét.

Keressük meg, hogy milyen feltételek mellett oldhatók meg a következő paraméteres egyenletek. Adjuk meg a megoldáshalmazt x-re nézve.

***1222.** $\log_3 p - \log_x p = \log_{\frac{x}{3}} p.$

***1223.** $\log_{p^2 - x^2} ((px)^2 - 1) = 1.$

Exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán, és ábrázoljuk a megoldáshalmazt a számegyenesen:

1224. *a)* $3^x \geqq 81;$ *b)* $2^x \leqq 8.$

1225. *a)* $3^x > 4;$ *b)* $0{,}1^x < 100.$

1226. *a)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqq \dfrac{1}{9};$ *b)* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \leqq 1.$

1227. *a)* $0{,}5^{\frac{2}{x}} < 0{,}0625;$ *b)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqq \dfrac{1}{27}.$

1228. *a)* $2^{\frac{x-1}{x+1}} > 1;$ *b)* $3^{1-x} \geqq 81.$

1229. *a)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x+3}{x-3}} < 1;$ *b)* $5^{2x-1} < 25.$

1230. *a)* $6^{x^2-7x+12} > 1;$ *b)* $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1} < \left(\dfrac{4}{9}\right)^x.$

1231. *a)* $3^{-x^2+5x-8} < \dfrac{1}{9};$ *b)* $2^{(x-1)(x+2)} < 1.$

1232. *a)* $(x+3)^{x^2-5x+6} > 1;$ *b)* $2^{x^2-8x+18} > 8.$

1233. *a)* $2^x + 2^{1-x} < 3;$ *b)* $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$

1234. Melyek azok a valós számok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$5^x - 5^{3-x} \leqq 20\,?$$

1235. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. A $[-1; 1]$ intervallum része-e a megoldáshalmaznak?

$$3^{2x} < 7 \cdot 3^x + 9 \cdot \log_3 9.$$

1236. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. A $]0; 1]$ intervallum mely része tartozik a megoldáshalmazhoz?

$$x^{\log_2 x} < 32.$$

1237. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a pozitív valós számok halmazán:

$$2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}.$$

***1238.** Oldjuk meg a

$$0{,}5^{2-\frac{x-3}{x-2}} > 0{,}5^{\frac{x-2}{x-1}}$$

egyenlőtlenséget

a) a valós számok halmazán;
b) a pozitív valós számok halmazán;
c) a negatív valós számok halmazán.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

1239. $\log_2 (x+3) > \log_2 4.$

1240. $\log_{\frac{1}{3}} 5x \leqq \log_{\frac{1}{3}} 25.$

1241. $\log_4 (2x-4) > 0.$

1242. $\log_4 (2x-4) < 0.$

1243. $\log_{\frac{1}{2}} (5x-12) < 0.$

1244. $\log_{\frac{1}{2}} (5x-12) > 0.$

1245. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{3x-1} < 0.$

1246. $\lg \frac{x-1}{2-x} > 0.$

1247. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1.$

1248. $\log_{0,3} (x+1) < 1.$

1249. $\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} > 1.$

1250. $\log^2_{\frac{1}{2}} x > 36.$

***1251.** $1+\log_2 (x+1) > -\log_{0,5} (4-x^2).$

***1252.** $|\log_2 x| < 1.$

***1253.** $|\log_{\frac{1}{2}} x| > 2.$

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait:

1254. $\lg_{x^2-3} 729 > 3.$

1255. $\log_\pi (x+27)-\log_\pi (16-2x) < \log_\pi x.$

1256. $\log (x+8) \geqq \lg (x^2-3x-4).$

***1257.** $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_3 x > 1.$

1258. $\log_x \sqrt{20-x} > 1.$

1259. $\log_2 (3-x)-\log_2 (x-1) < \log_{\sqrt{2}} 3.$

1260. $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x-1} < 1.$

***1261.** $(2x^2-11x-13) \log_{\frac{1}{2}} (7-x) > 0.$

1262. $\log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2-5)) > 0.$

1263. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (2^x-4^x) \leqq 1.$

1264. $x^{\frac{1}{\lg x}} > 10x^4.$

1265. $(x^2+x+1)^x < 1.$

1266. $x^{\lg^2 x+\lg x-4} > 10\,000$

1267. Melyek azok a pozitív valós számok, amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek?

$$\log_3 (x^2-5x+6) < 0.$$

1268. Oldjuk meg az

$$\log_{\frac{1}{3}} (6x^2-x-1) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget

a) a pozitív valós számok halmazán;
b) a negatív valós számok halmazán;
c) a valós számok halmazán.

Megoldhatóak-e a következő egyenlőtlenségek a pozitív valós számok halmazán? Adjuk meg az egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

***1269.** $\log_{3-x} x < -1.$

***1270.** $\log_x \left(\frac{5}{2}x-1\right) \geqq 2.$

Milyen valós x-ekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

***1271.** $\log_{x^2-3} (4x+2) \geqq 1.$

***1272.** $\log_{|x|} (x-1) < 2.$

***1273.** $\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geqq 0.$

1274. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a

$$\log_p x+\log_p (x+1) < \log_p (2x-6)$$

egyenlőtlenséget, ahol a $p>1$ paraméter valós szám.

1275. Határozzuk meg a valós p paraméter mindazon értékeit, amelyekre a következő egyenlőtlenség megoldható a valós számok halmazán. Adjuk meg a megoldáshalmazt.

$$x^{\log_p x+1} > p^2 x.$$

Mely valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

***1276.** $\log_{9-x^2} \cos x \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) > 1.$

***1277.** $\log_{\cos x} \log_{\sin x} \operatorname{tg} x > 0.$

***1278.** Oldjuk meg az

$$x^{\sin x - a} > 1$$

egyenlőtlenséget, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ és $a \in \mathbf{R}$.

Határozzuk meg a sík azon pontjainak a halmazát, amelyek $(x;\, y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

***1279.** $\log_{\cos x}(|y|-2) > 0.$

***1280.** $\log_{\sin x} y > \log_{\sin x}(\operatorname{tg} x).$

6. Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek

Trigonometrikus egyenletek

Létezik-e olyan szög, melynek a

a) szinusza; b) koszinusza; c) tangense; d) kotangense a következő értékekkel egyenlő?

1281. 0,85.

1282. $\frac{7}{6}$.

1283. $-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

1284. $-1{,}05$.

1285. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1286. $\sqrt{10}$.

1287. $-\sqrt{0{,}5}$.

1288. $\sqrt{2}$.

1289. Felvehet-e negatív értéket

a) $\sin\alpha$; *b)* $\cos\alpha$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha$,

ha α egy háromszög szöge?

A szögfüggvények definíciójának a felhasználásával döntsük el a következő szorzatok előjelét:

1290. $\sin 110° \cdot \sin 130°$.

1291. $\cos 220° \cdot \sin 220°$.

1292. $\cos 200° \cdot \sin 100°$.

1293. $\operatorname{tg} 140° \cdot \operatorname{tg} 210°$.

1294. $\cos 325° \cdot \operatorname{tg} 215°$.

Létezik-e olyan x szög, amelyre teljesül, hogy

1295. $\sin x = \frac{12}{13}$ és $\cos x = \frac{5}{13}$.
1296. $\sin x = 0{,}3$ és $\operatorname{tg} x = 3$.
1297. $\cos x = \frac{40}{202}$ és $\operatorname{tg} x = 4{,}95$.

Döntsük el, hogy igazak-e a következő egyenlőségek:

1298. $\cos(-\pi)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
1299. $\sin(-\pi)+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}(-\pi) = 1$.
1300. $4\sin\pi\cos 2\pi+5\operatorname{tg}\pi-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$.
1301. $2\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{4}-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}-2\sqrt{3}$.
1302. $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.
1303. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1304. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
1305. $\sin x = \frac{1}{2}$.
1306. $\cos x = -1$.
1307. $\cos x = -0{,}5$.
1308. $\operatorname{tg} x = -1$.
1309. $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
1310. $\operatorname{ctg} 2x = 1$.

1311. $\sin 3x = 0$.
1312. $\sin 2x = \frac{1}{2}$.
1313. $\sin\frac{x}{2} = -0{,}65$.
1314. $\cos(2x-18°) = \frac{1}{2}$.
1315. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.
1316. $\sin\left(5x+\frac{\pi}{9}\right) = -1$.
1317. $\sqrt{2}\cos 3x = 1$.
1318. $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = 0$.
1319. $\operatorname{tg} x^2 = 1$.
1320. $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.
1321. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.
1322. $\sin\pi x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
1323. $\cos x^2 = 1$.

Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

1324. $\cos x = 0{,}5$.
1325. $\sin x = x$.
1326. $\sin x = x^2$.
1327. $\sin 2x = \cos x$.

Létezik-e olyan valós szám, amelyre teljesül, hogy:

1328. $\sin x\cos x = \sin 45°$.
1329. $2^{\sin^2 x} = \sin x$.

1330. $3^{\sin^2 x} = \cos x$.

1331. Bizonyítsuk be, hogy ha $\cos x \neq 0$, akkor

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1332. Igazoljuk, hogy $\cos x + \sin x \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x} = 0$, ha $\cos x \neq 0$.

1333. Mutassuk meg, hogy ha $|\cos x| \neq 1$, akkor

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}.$$

1334. Igazoljuk, hogy ha $\sin x \neq 0$, akkor

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

1335. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ valós szám, akkor

$$1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x = (1+\cos x)(1+\operatorname{tg} x), \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

1336. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

1337. Bizonyítsuk be, hogy ha x valós szám és $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{2}{\sin x}.$$

1338. Mutassuk ki, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

1339. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$$\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \operatorname{tg}^2 x.$$

1340. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $|\operatorname{tg} x| \neq 1$, akkor

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \sin x + \cos x.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1341. $\sin^2 x - 2\sin x = 0$.
1342. $\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x$.
1343. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.
1344. $\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.
1345. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 1$.

Mely valós számokra teljesül, hogy:

1346. $\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x = 5$.
1347. $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1-\operatorname{tg} x} = 1$.
1348. $\sin x - \cos x = 0$.
1349. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$.
1350. $\operatorname{tg} x \cos x + \operatorname{tg} x - \cos x - 1 = 0$.
1351. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.
1352. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.
1353. $4\cos^2 x + 17\sin x = 8$.
***1354.** $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{1}{4}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1355. $\sin x + \cos x = 1$.
1356. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
1357. $3\sin x + 4\cos x = 4$.
1358. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.
1359. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

1360. $1-\cos x = \sin\frac{x}{2}$.

1361. $\sin(\pi - x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = (1-\cos^2 x)\frac{1}{\sin 2x}$.

1362. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

1363. $2\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{tg} 3x+3 = 0$.

1364. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

1365. $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$.

1366. $2\cos x\cos 2x = \cos x$.

1367. $\cos x-2\sin^2\frac{x}{2} = 0$.

***1368.** $\cos 3x = \sin 4x-\sin 2x$.

Mely valós x-ekre igaz, hogy:

1369. *a)* $\sin 4x = \sin 3x$; *b)* $\cos 2x = \cos x$.

1370. $\cos x = \sin 3x$.

1371. $\cos 5x = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1372. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$.

1373. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = 0$.

1374. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

***1375.** $\cos x = \sin|x|$.

***1376.** $\sqrt{3}\,|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x| = 4$.

Bizonyítsuk be, hogy $\forall x\in\mathbf{R}$ *esetén*

1377. $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2 = 2$.

1378. $8\cos^4 x = 3+4\cos 2x+\cos 4x$.

1379. Igazoljuk, hogy ha $x\in\mathbf{R}$ és $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, akkor

$$\operatorname{ctg}^2 x-\cos^2 x\operatorname{ctg}^2 x-\cos^2 x = 0.$$

1380. Mutassuk ki, hogy $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}$, ahol $k\in\mathbf{Z}$ esetén igaz, hogy

$$(\operatorname{ctg} x+1)^2+(\operatorname{ctg} x-1)^2 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

***1381.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x\in\mathbf{R}$ és $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, akkor

$$\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1382. $\sin x = \frac{1}{\cos x}$.

1383. $\cos 2x = 2-5\cos x$.

1384. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1+\sin 2x$.

***1385.** $2\operatorname{ctg} 2x-3\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

***1386.** $1+\sin x-\sin 2x = \cos x+\cos 2x-\cos 3x$.

***1387.** $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x = 0$.

***1388.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos x+\sin 2x = 0$.

***1389.** $2+\cos x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

***1390.** $5(1+\cos x) = 2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

***1391.** $\sin(\pi(x^2+2)) = 0$.

***1392.** $4^{\sin^2 x}+5\cdot 4^{\cos^2 x} = 12$.

***1393.** $5^{-\cos 2\pi x}+6 = 11\cdot 5^{-\cos^2\pi x}$.

***1394.** $\sqrt{\cos(x+1)} = \sqrt{\cos x}$.

***1395.** $\sin(\pi\cos x) = 0$.

***1396.** $\sqrt{1-\cos^2 x} = 1-\sin|x|$.

1397. $\cos\pi x^2 = 1$.

1398. Oldjuk meg a

$$\sqrt{1-\cos x} = \sin x \quad \text{egyenletet, ha } \pi < x < 3\pi.$$

***1399.** Oldjuk meg a racionális számok halmazán a

$$4 \sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5 \quad \text{egyenletet.}$$

***1400.** Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenletet?

$$\pi \sqrt{3} \operatorname{ctg} x = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \left| x + \frac{\pi}{2} \right|.$$

***1401.** Van-e az egész számok halmazán megoldása az

$$x^{\lg \operatorname{tg} x} + x^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2 \quad \text{egyenletnek?}$$

***1402.** Megoldható-e a valós számok halmazán a

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2 \quad \text{egyenlet?}$$

***1403.** Hány megoldása van a valós számok halmazán a

$$|\sin x| = \frac{2x}{201\pi} \quad \text{egyenletnek?}$$

***1404.** Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$\sin 3x = p \sin x.$$

Milyen határok között változzon a p paraméter, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán legalább két megoldása legyen?

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, ahol p valós paraméter:

***1405.** $\sin(x+p) \cos x = 1.$

***1406.** $|\cos 2x| = |\sin^2 x - p|.$

***1407.** A p valós paraméter mely értékeinél oldható meg a valós számok halmazán a

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 + 3p^2 = 4p(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$$

egyenlet? Adjuk meg a megoldáshalmazt.

***1408.** Oldjuk meg x-re a következő egyenletet, ahol $a, b \in \mathbf{R}$ és $a, b \neq 0$:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}.$$

***1409.** Határozzuk meg a

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$$

egyenletnek a [0,75; 1] intervallumba eső megoldásait.

***1410.** Adjuk meg a sík azon pontjainak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátáira teljesül, hogy

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0.$$

***1411.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ és $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, akkor

$$2\beta + \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \; 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{esetén.}$$

Trigonometrikus egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

1412. $\sin x > 0.$

1413. $\sin x \leqq -1.$

1414. $\cos x > 1.$

1415. $\sin x > \frac{1}{2}.$

1416. $\sin x < \frac{1}{2}.$

1417. $\sin x \leqq \frac{1}{2}.$

1418. $|\sin x| > \frac{1}{2}.$

1419. $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

1420. $\operatorname{tg} x > 0$.

1421. $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

1422. $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$.

1423. $|\cos x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Milyen valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket?

1424. *a)* $\sin x < \cos x$; *b)* $3 \sin x < \sqrt{3} \cos x$.

1425. *a)* $|\sin x| > \cos^2 x$; *b)* $\sin x < |\cos x|$.

Adjuk meg a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

1426. $\sin 2x > 1$.

1427. $\sin 2x < -\dfrac{1}{2}$.

1428. $\sin \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{2}$.

1429. $\sin 3x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1430. $\sin (x+\pi) < 0$.

1431. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq 0$.

1432. $\operatorname{tg} 2x < -1$.

1433. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right) > 0$.

Milyen valós x-ekre teljesül, hogy

1434. *a)* $-2 < \operatorname{tg} x < 3$; *b)* $-4 < \operatorname{ctg} x \leqq 1{,}5$.

1435. *a)* $\dfrac{1}{3} \leqq \sin x < \dfrac{1}{2}$; *b)* $-\dfrac{1}{2} < \cos x \leqq -\dfrac{1}{4}$.

Mely valós számokra igaz, hogy:

1436. $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqq 0$.

1437. $\operatorname{tg}^2 x + (2-\sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$.

1438. $2 \sin^2 x + 3 \sin x > 2$.

1439. $\cos 2x \geqq \sin 2x$.

1440. $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \geqq 0$.

***1441.** $\sin 3x < \sin x$.

***1442.** $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$.

***1443.** $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 0$.

1444. $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x} > 0$.

1445. $\lg \sin x \leqq 0$.

***1446.** $\cos x \, |\cos x| \leqq \dfrac{1}{2}$.

***1447.** $\operatorname{ctg} 2^{-\sqrt{x-1}} < 1$.

***1448.** Igazoljuk, hogy minden valós x-re igaz:

$$(\sin x + 2 \cos 2x)(2 \sin 2x - \cos x) < 4{,}5.$$

***1449.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbf{R}$ és $0 < x < \pi$, akkor

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} > 0.$$

***1450.** Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

***1451.** Mutassuk meg, hogy ha $x+y+z = \pi$, akkor

$$\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} < \frac{1}{4}.$$

Milyen geometriai jelentése lehet a feladatnak?

IV.

V. EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGRENDSZEREK

1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek

V.

1. Mely pozitív egészekből álló számpárok elégítik ki a következő egyenleteket?
a) $x+y=4$; *b)* $2x+3y=5$; *c)* $2x+y=15$; *d)* $2x-y=8$.

2. Zsófinak csupa 10 Ft-os és 20 Ft-os van a pénztárcájában. Hány tízforintosa lehet, ha összesen 100 Ft van a pénztárcában?

3. Egy radír ára 2 Ft, egy ceruzáé 3 Ft. Hány darab radírt és ceruzát vásárolhatunk 37 Ft-ért, ha mindkét cikkből veszünk legalább egyet?

4. Válogassuk ki a következő rendezett számpárok közül azokat, amelyek a $3x-4y=7$ egyenlet megoldásai:

$$(-1;-1),\ \left(0;-\frac{7}{4}\right),\ (3;2),\ (1;-1),\ (-3;-4),\ (5;2),\ (0;0),\ (-2;-3{,}25).$$

5. Hozzuk a következő egyenleteket (ha lehet) $ax+by=c$ alakra:
a) $x-2=3x-y$; *b)* $3(x+y)=2x-4$;
c) $(x-3)(y+2)-1=xy$; *d)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

6. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ egyenlet megoldásait.

7. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ és $x+2y=8$ egyenletek egész számpár megoldásait. Van-e a két megoldáshalmaznak közös része?