

kell dolgoznia. A 2. fajtához 2 óra, 2 óra, 1 óra kell, a 3.-hoz 1 óra, 1 óra, 3 óra, a 4.-hez 3 óra, 4 óra, illetve 1 óra. Egy héten Jakab 50 órát, János 60 órát, Dániel 40 órát dolgozik. Az egyes órákon az előbbi sorrendben 6, 4, 5, illetve 8 egység nyereség képződik. Hány darabot gyártsanak az egyes fajtákból hetenként, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen; ha még az is ismeretes, miszerint az 1. és 2. fajtából együtt heti 6 darabnál többet nem tudnak eladni?

VI. KOMBINATORIKA

1. Permutációk

1. Anna, Bea, Csilla és Dóra együtt megy moziba. Hányféleképpen helyezkedhetnek el egymás mellett lévő négy széken? Írjuk le a lehetséges elhelyezkedéseket.

2. Írjuk fel a DIÁK szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

3. Négy labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással. Hányféle sorrendben végezhetnek a csapatok?

4. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

5. Egy futóversenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges?

6. Hány olyan 1-gyel kezdődő ötjegyű számot lehet felírni az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelyeknek az utolsó számjegye 5, ha a felírás során egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk?

7. Hány 15-tel kezdődő ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

8. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

9. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

10. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

11. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

12. Nyolc ember hányféleképpen tud elhelyezkedni egy padon?
 13. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön?

14. Egy nyolc főből álló társaság egy kör alakú asztal körül elhelyezett nyolc széken akar helyet foglalni. Hányféleképpen történhet ez, ha két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző?

15. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

16. Írjuk fel a BABA szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

17. Írjuk fel a TOLL szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

18. Egy dobozba öt cédulát teszünk, melyeken rendre a következő betűk állnak: A , L , M , M , O . Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és helyezzük el azokat egymás mellé a kihúzás sorrendjében. Hány esetben jöhet ki a MALOM szó?

19. A 4, 5, 4, 5, 6 számjegyekből hány 56-tal kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

20. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány 12-vel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

21. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány 21-gyel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

22. A 4, 4, 5, 5, 6 számjegyekből hány 45-tel kezdődő ötjegyű szám készíthető? Írjuk le ezeket.

23. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány 13-mal kezdődő hétjegyű számot lehet készíteni?

24. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány 34-re végződő ötjegyű szám készíthető?

25. Az 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?

26. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető?

27. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az iskola szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I	S	K	O
S	K	O	L
K	O	L	A

28. A MATEMATIKA szó betűinek hány permutációja van?

29. Egy dobozba tíz cédulát teszünk, melyeken rendre a következő betűk állnak: A , A , A , E , I , K , M , M , T , T . Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és helyezzük el egymás mellé a kihúzás sorrendjében. Hány esetben jöhet ki a MATEMATIKA szó?

30. Adott n különböző elem. Mekkora n értéke, ha az egymástól különböző elemek számát 2-vel megnövelve (ezek egymástól és az előbbiektől is különbözők), a permutációk száma 156-szorosára nő?

2. Variációk

31. Írjuk fel a 0, 6, 9 számjegyek felhasználásával képezhető összes háromjegyű

- páros számot;
- páratlan számot;
- 4-gyel osztható számot;
- 3-mal osztható számot;
- 9-cel osztható számot.

32. Hány ötjegyű szám készíthető az 1-es és a 2-es számjegyek felhasználásával? Írjuk fel ezeket.

33. Hány négyjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával? Írjuk fel ezeket.

34. Hány 5-tel osztható négyjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet? Írjuk fel ezeket.

35. Hány háromjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepel?

36. Hány négyjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepel?

37. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani három különböző tárgyat, ha egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat?

38. Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Az első három helyezett kap díjat. Hányféle kimenetele lehet a versenynek?

39. Egy iskolai rendezvényen 150 tombolajegyet adnak el. A tombolajegy-tulajdonosok között 10 különböző nyereményt sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez?

40. Egy 36-os létszámú osztályban egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki azzal a feltétellel, hogy egy tanuló csak egy tárgyat nyerhet. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

41. Egy 30-as létszámú osztály vezetőséget választ: titkárt, titkár-helyettest, kultúrfelelőst, sportfelelőst és gazdasági felelőst. Hányféleképpen történhet ez?

42. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány ötjegyű számot állíthatunk elő, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

43. Egy szabályos játékkockával négyszer dobunk egymás után, és a dobások eredményét a dobások sorrendjében egymás mellé írjuk. Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így?

44. Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat úgy, hogy egy tanuló több tárgyat is kaphat?

45. Hányféleképpen lehet öt tanuló között tíz különböző tárgyat szétosztani?

46. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a TANULÓ szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

T	A	N	U	L	Ó
A	N	U	L	Ó	
N	U	L	Ó		
U	L	Ó			
L	Ó				
Ó					

47. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból az ISKOLAI szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I	S	K	O	L	A	I
S	K	O	L	A	I	
K	O	L	A	I		
O	L	A	I			
L	A	I				
A	I					
I						

48. Csupa páratlan számjegyből hány 1-gyel kezdődő ötjegyű számot készíthetünk?

49. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csupa páratlan számjegyből áll?

50. Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?

51. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

52. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csupa páros számjegyből áll?

53. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5-ös előfordul?

54. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után kihúzzunk 6 lapot. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a kihúzott lapok sorrendje is számít?

a) visszatevés nélkül;

b) és minden húzás után a kihúzott lapot visszatesszük?

55. n elem másodosztályú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 10 : 11. Határozzuk meg n értékét.

3. Kombinációk

56. Egy hatelemű halmaznak hány háromelemű részhalmaza van? Írjuk le ezeket.

57. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei növekvő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg? Írjuk le ezeket.

58. Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?

59. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány ötelemű részhalmaza van?

60. Egy hatelemű halmaznak hány részhalmaza van?

61. Egy nyolcelemű halmaznak hány valódi részhalmaza van?

62. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legalább hételemű?

63. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek negyedosztályú kombinációit.

64. Egy hétszemélyes társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez összesen?

65. Hány egyenest határoznak meg a szabályos tizenkétszög csúcspontjai?

66. Egy pályázatra 15 pályamű érkezett. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 3000 Ft-tal. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha a díjakat megosztani nem lehet?

67. Egy futóverseny előfutamának egyik csoportjában tíz versenyző indul. Az első négy versenyző jut tovább a középdöntőbe. Hányféleképpen alakulhat a továbbjutók csoportja?

68. Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?

69. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben kapunk olyan számötöst, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?

70. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát visszatevés

nélkül. Hány olyan eset van, amelyben az így kapott számötösökben a számok nem csökkenő sorrendben következnek?

71. Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány esetben lesznek a számok növekvő sorrendben a kihúzott számötösökben?

72. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek másodosztályú ismétléses kombinációját.

73. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek harmadosztályú ismétléses kombinációját.

74. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek harmadosztályú ismétléses kombinációját.

75. Egy dobozban tíz cédula van, amelyekre rendre az 1, 2, 3, ..., 10 számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány olyan eset van, amelyben az így kapott számötösökben a számok nem csökkenő sorrendben következnek?

4. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből

76. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{n!}{(n-3)!}; & b) \frac{n!}{n(n-1)}; \\ c) \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}; & d) \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}. \end{array}$$

77. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\begin{array}{ll} a) (n+2) \cdot (n+1)!; & b) \frac{(n-2)!}{n-2}; \end{array}$$

$$c) \frac{n!}{(n-1)!};$$

$$d) \frac{(n-1)!}{(n+1)!};$$

$$e) n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!;$$

$$f) \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!};$$

$$g) \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-2)!};$$

$$h) \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n-1)!}.$$

78. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$a) \frac{(n-2)!}{(n-1)!} - \frac{(n-2)!}{n!};$$

$$b) \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{n!};$$

$$c) n(n-3)! - \frac{1}{(n-1)(n-2)};$$

$$d) \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!};$$

$$e) \frac{(n+3)!}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!};$$

$$f) \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)n!}{(n+2)!}.$$

79. Írjuk fel azokat a négyjegyű számokat, melyeknek számjegyei 7-nél nagyobbak, és egymás mellett nem fordul elő két 9-es.

80. Piros, fehér, zöld és kék színű anyagokból zászlókat készítünk. Minden zászló vízszintes csíkokból áll, és a szomszédos csíkok nem lehetnek azonos színűek. Hány különböző zászlót készíthetünk, ha

- a) egy-egy zászlón négy csíknak kell lennie;
- b) egy-egy zászlón három csíknak kell lennie;
- c) egy-egy zászlón két csíknak kell lennie?

81. Hány átlója van egy konvex húszszögnek?

82. Egy konvex sokszögbe összesen 77 átló húzható. Hány oldalú a sokszög?

83. Néhány labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Hány csapat játszott, ha összesen 45 mérkőzésre került sor? Hányféle sorrendben végezhettek a részt vevő csapatok?

84. 15 labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszott egymással. Átlagosan hány néző volt kint egy-egy mérkőzésen, ha összesen 249 000 ember nézte meg azokat?

85. Egy társaságban mindenki mindenkiel kezét fogott. Hányan voltak a társaságban, ha összesen 136 kézfogás volt?

86. Egy IV. osztályban az érettségi előtt minden tanuló kapott egy-egy fényképet minden társától. Hányan érettségiztek az osztályban, ha összesen 992 fénykép cserélt gazdát?

87. Egy labdarúgó-bajnokságon, amelyen minden csapat egy alkalommal játszott a többi csapattal, 120 mérkőzést játszottak le. Hány csapat vett részt a bajnokságon?

88. Néhány ponton át, amelyek úgy helyezkednek el, hogy közülük bármely három nem illeszkedik egy egyenesre, meghúzzuk a pontokat páronként összekötő egyeneseket. Hány pont van, ha 105 egyenest tudunk húzni?

89. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a BUDAPEST szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

90. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a KIRÁNDULÁS szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

K	I	R	Á	N	D
I	R	Á	N	D	U
R	Á	N	D	U	L
Á	N	D	U	L	Á
N	D	U	L	Á	S

91. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a KIRÁNDULÁS szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük, de minden lépésben irányt változtatunk?

K	I	R	Á	N	D
I	R	Á	N	D	U
R	Á	N	D	U	L
Á	N	D	U	L	Á
N	D	U	L	Á	S

92. Hány olyan 3-mal osztható kétjegyű szám van, amelynek számjegyei páratlan számok?

93. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát négyszer egymás után. A dobások eredményét a dobások sorrendjében írjuk egymás mellé.

- Hányféle négyjegyű számhoz juthatunk így?
- Hányféle 1-re végződő négyjegyű számot kaphatunk?

94. Egy szabályos játékkocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk. Dobjuk fel ezt a játékkockát ötször egymás után és a dobások eredményét írjuk rendre egymás mellé. Hányféle 10-zel osztható ötjegyű számhoz juthatunk így?

95. Egy dobozban 15 cédula van 1-től 15-ig számozva. Kihúzzunk öt cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5-nél?

96. Egy szabályos játékkockával egymás után ötször dobunk. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben legalább egyszer hatost dobunk?

97. Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZOLNOK szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?

```

      S
     Z Z
    O O O
   L L L L
  N N N
 O O
  K

```

98. Hányféleképpen olvasható a következő elrendezésben a SZIGETVÁR szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve jobbra haladhatunk?

```

          S
         Z Z Z
        I I I I I
       G G G G G G G
      E E E E E E E E
        T T T T T T T
          V V V V V
            Á Á Á
              R

```

99. 15 tanuló között hányféleképpen lehet szétosztani 15 különböző tárgyat úgy, hogy:

- egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat;
- egy tanuló több tárgyat is kaphat?

100. Egy 32-es létszámú osztályban klubdelutánt rendeznek, ahol a tanulók között négy tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha:

- a tárgyak egyenlőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet;
- a tárgyak egyenlőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet;
- a tárgyak különbözőek, és egy tanuló legfeljebb egy tárgyat nyerhet;
- a tárgyak különbözőek, és egy tanuló több tárgyat is nyerhet?

101. Egy szabályos játékkockát hatszor egymás után feldobunk. A kapott eredményeket rendre egymás mellé írjuk.

- Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?
- Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike előfordul?

102. Piros, fehér és fekete színű játékkockánk van, amelyeket egy dobozba helyezünk el. Egyet kivesszünk és dobunk vele. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

103. Piros, fehér és fekete játékkockát helyeztünk el egy dobozba. Kettőt kivesszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

104. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek egyik számjegye sem 0?

105. Hány 5-re végződő ötjegyű szám van?

106. Hány olyan 5-re végződő ötjegyű szám van, amely 25-tel is osztható?

107. Gondoltam egy háromjegyű számot, melynek minden számjegye 2-nél nagyobb és 5-nél kisebb. Mi lehet a gondolt szám?

108. Hány olyan n jegyű szám van, amelynek mindegyik számjegye 2-nél nagyobb és 5-nél kisebb?

109. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben

- a) csupa egyenlő;
- b) két különböző;
- c) három különböző

számjegy van? Hogyan lehetne egyszerűen ellenőrizni a kapott eredményeket?

110. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 9-cel osztható

- a) nyolcjegyű;
 - b) kilencjegyű
- számot készíthetünk?

111. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 6-tal osztható

- a) négyjegyű;
 - b) ötjegyű
- számot készíthetünk?

112. Hány hatjegyű 3-mal osztható szám képezhető az 1, 2, 2, 3, 3, 5 számjegyekből?

113. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű számot készíthetünk, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek? Ezek közül hány kezdődik 12-vel? Hány olyan szám van köztük, amelyben az első helyen 1-es és az utolsó helyen 2-es áll?

114. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan különböző számjegyeket tartalmazó négyjegyű számot készíthetünk, amelyben a 3-as számjegy szerepel?

115. Hány hatjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

116. Hány hatjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

117. Hány hatjegyű 4-gyel osztható szám készíthető a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával?

118. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám képezhető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?

119. Egy 32-es létszámú osztály az iskolai küldöttértekezletre hat küldöttet választ. Hányféleképpen történhet ez?

120. Egy 25-ös létszámú közösség háromtagú vezetőséget választ: titkárt és két vezetőségi tagot.

a) Hányféleképpen történhet ez?

b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági legyen a titkár?

c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Nagy Ági tagja legyen a vezetőségnek?

121. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után nem tesszük vissza. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy király?

122. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?

123. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot nem tesszük vissza. Hány esetben lesz mindkét kihúzott lap ász?

124. Egy 25 főből álló társaság tagjai között egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsolnak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha egy személy több tárgyat is nyerhet?

125. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány olyan nyolcjegyű számot készíthetünk, amelyben a 4-esek száma egyenlő az 5-ösök számával?

126. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű szám készíthető?

127. A 4-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány 9-cel osztható nyolcjegyű páros szám készíthető?

128. Hány egyenest határoz meg 25 olyan pont, amelyek közül 3–3 nem esik egy egyenesbe?

129. Hány egyenest határoz meg n olyan pont, amelyek közül 3–3 nem illeszkedik egy egyenesre?

130. Adott a síkban 25 pont, amelyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?

131. Adott a síkban n pont, melyek közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány háromszöget határoznak meg?

132. Hány háromszöget határoz meg 12 olyan, egy síkban fekvő egyenes, amelyek között nincs párhuzamos és közülük bármely három nem illeszkedik egy pontra?

133. Adott a térben 12 pont, amelyek közül bármely négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg?

134. Adott a térben n ($n \geq 4$) pont, melyek közül bármely négy nem illeszkedik egy síkra. Hány tetraédert határoznak meg?

135. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből készíthető ötjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es számjegy, ha egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7. ábra

136. A BKV járművein a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelik, melyek a 7. ábrán látható négyzethálózathoz 2, 3, illetve 4 mezőt kilyukasztanak. Hányféleképpen állíthatók be ezek a lyukasztók a fenti követelményeknek megfelelően?

137. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A , B és C egymás mellett üljön?

138. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a B mellé és C a D mellé ül?

139. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön B mellé?

140. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a pad szélére ül?

141. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A ne kerüljön a pad szélére?

142. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett négy férfi és három nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

143. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett öt férfi és

hat nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

144. Egy padra leül n ember ($n > 4$). Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha A a B mellett és C a D mellett akar ülni?

145. Nyolc ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -val – leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A a B mellett és E az F mellett üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan ember a társaságban, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

146. Egy kerek asztal mellé leül n ember ($n > 4$). Hányféleképpen helyezkedhetnek el az asztal mellett, ha A a B mellett és C a D mellett akar ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van a társaságban legalább egy olyan ember, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

147. Egy kör alakú asztal körül elhelyezett 12 széken hat férfi és hat nő akar helyet foglalni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el (egymáshoz viszonyítva), ha nem ülhet férfi mellé férfi, illetve nő mellé nő?

148. Négy házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el (egymáshoz viszonyítva), ha sem férfiak, sem nők, sem házastársak nem ülhetnek egymás mellé?

149. Hány különböző gyöngyöt lehet készíteni 20 gyöngyszemből, ha van:

- a) 10 fehér és 10 kék;
- b) 5 fehér és 15 kék;
- c) 8 fehér és 12 kék?

Az azonos színű gyöngyszemek teljesen egyformák.

150. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 6 piros és 9 fehér golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

151. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzásokat tekintjük különbözőeknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

152. 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellett legyen?

153. 5 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

154. 7 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

155. 8 piros, 3 fehér és 3 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy két piros golyó ne kerüljön egymás mellé?

156. Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amelyben a kapott pontok összege 8?

157. Dobjunk fel két szabályos játékkockát egymástól függetlenül. Hány esetben lehet az így kapott pontok összege legalább 8?

158. Hány „szót” képezhetünk az A, E, I, O, U magán- és a B, C, D, F mássalhangzókól úgy, hogy minden „szóban” 4 magán- és 3 mássalhangzó legyen, két magán-, illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen?

159. Egy dobozban 1-től 20-ig számozott 20 darab cédula van. Hányféleképpen húzhatunk ki öt cédulát úgy, hogy ezek közül:

- a) egy cédulán meghatározott szám legyen;
- b) három cédulán meghatározott szám legyen;
- c) mind az öt cédulán meghatározott szám legyen?

160. Egy-egy cédulára írjuk fel rendre a 0, 1, 2 számokat. A cédulákat tegyük egy dobozba. Húzzunk ki egy cédulát, és jegyezzük fel a kihúzott számot. Ezután tegyük vissza a cédulát és ismételjük meg az eljárást még négyszer. Hány esetben lehet az ötödik húzás után a kihúzott számok összege:

- a) éppen 6;
- b) 6-nál nagyobb?

161. Az 1, 2, 3, ..., 15 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben

- a) az 1, 2 számok;
 - b) az 1, 2, 3 számok
- csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?

162. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az

- a) 1, 2, 3, ..., 10 számok;
 - b) az 1, 2, 3, ..., 15 számok
- egymás mellé kerülnek növekvő sorrendben?

163. Az 1, 2, 3, ..., 25 számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az

- a) 1, 2, 3, ..., 10 számok;
 - b) 1, 2, 3, ..., 15 számok
- egymás mellé kerülnek?

164. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az

- a) 1, 2, 3 számok;
 - b) 1, 2, 3, ..., k számok ($k < n$)
- növekvő sorrendben egymás mellé kerülnek, ha $n > 3$?

165. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az

- a) 1, 2, 3, 4, 5 számok;
 - b) 1, 2, 3, ..., k számok ($k < n$)
- egymás mellé kerülnek, ha $n > 5$?

166. Az iskolában rendezett matematika-háziverseny döntőjébe a IV. évfolyam tanulói közül hatan kerülnek: Anna, Béla, Csilla, Dezső, Endre és Ferenc. Egy-egy első, második és harmadik díjat adnak ki.

a) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a helyezések szempontjából?

b) Hány esetben lehet lány az első helyezett?

c) Hány esetben lehet Ferenc az első helyezett?

d) Hány esetben lehet Anna a helyezették között?

167. Adott egy síkban 10 egyenes. Az egyenesek közül legfeljebb kettő metszi egymást egy pontban. Hány metszéspontjuk van, ha:

- a) nincs köztük párhuzamos;
- b) az egyenesek közül 4 párhuzamos;
- c) az egyenesek közül 5 párhuzamos;
- d) az egyenesek közül 8 párhuzamos?

168. 15 fehér, illetve 18 kék cédulát megszámoztunk 1-től 15-ig, illetve 1-től 18-ig. Dobjunk fel egy pénzérmét; fej dobása esetén a fehér, írás dobása esetén a kék cédulák közül húzzunk egyet ki. Ismételjük meg az eljárást még kilencszer. Az így kapott tíz cédulát a húzás sorrendjében tegyük az asztalra. Hányféle sorozatot kaphatunk így?

169. Hány 5-tel osztható hétjegyű szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?

170. Hány hétjegyű páratlan szám készíthető az 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 számjegyekből?

171. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány olyan hétjegyű számot lehet készíteni, amelyben a kettes számjegyek egymás mellett állnak?

172. Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 számjegyekből?

173. A 0, 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből hány hatjegyű páros szám képezhető?

174. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki találomra öt lapot. Hány esetben lesz a kihúzott öt lap közül három hetes?

175. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát négy játékos között szétosztani úgy, hogy mindegyik nyolc lapot kapjon?

176. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani öt lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között:

- a) ne legyen alsó, felső, király és ász;
- b) 2 ász és egy király legyen?

177. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy ász és piros is legyen a kiválasztott lapok között?

178. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy

- a) legalább egy zöld színű lap;
- b) legfeljebb három hetes;
- c) a zöld hetes

a kiválasztott lapok között legyen?

179. Egy rejtjeles lakaton hat forgatható közös tengelyű korong van, amelyek mindegyikén a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek találhatók. A zár csak a korongok bizonyos állásánál nyílik ki, amikor a korongokon egy bizonyos „hatjegyű” szám (kezdődhet 0-val is) a meghatározott helyzetbe van állítva.

- a) Hányféle nyitási lehetőség adható meg?
- b) Hányféle nyitási utasítás adható, amelyben legalább egy 9-es szerepel?

180. Hány rendszám tábla készíthető 26 betű és a 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám két betűből és az utána következő „négyjegyű” számból (a 0-val kezdődő számokat is megengedjük) áll?

181. Egy hegy csúcsára hat út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint nem különböztetjük meg és:

- a) egy-egy utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer;
- b) egy-egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;
- c) mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?

182. Egy hegy csúcsára hat út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint is megkülönböztetjük és:

- a) egy-egy utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer;
- b) egy-egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;
- c) mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?

183. Hány olyan különböző számjegyekből álló négyjegyű szám van, melyben két páros és két páratlan számjegy szerepel?

184. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő:

- a) egy számjegy felhasználásával;
- b) két különböző számjegy felhasználásával;
- c) három különböző számjegy felhasználásával;
- d) négy különböző számjegy felhasználásával?

185. Hány olyan hatjegyű szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de e három számjegy mindegyikét legalább egyszer?

186. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is osztjuk két csoportba az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, legalább az egyik csoportban van két olyan szám, melyek különbsége is ugyanabban a csoportban van.

187. Egy dobozban 100 cédula van, rendre 1-től 100-ig megszámozva. Hányféleképpen lehet ezek közül kiválasztani nyolc cédulát úgy, hogy

- a) egyiken se legyen;
- b) négy cédulán legyen;
- c) nyolc cédulán legyen páratlan szám?

188. Egy dobozban 20 cédula van, rendre 1-től 20-ig megszámozva. Kihúzzunk öt cédulát úgy, hogy minden húzás után a kihúzott cédulát visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

189. Egy dobozban 10 cédula van, rendre 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekkel megjelölve. Egymás után négy cédulát húzzunk ki úgy, hogy a kihúzott cédulákat a húzás után nem tesszük vissza. A kihúzott cédulákon lévő számjegyeket a kihúzás sorrendjében írjuk egymás mellé. Hány esetben kapunk:

- páratlan négyjegyű számot;
- 10-zel osztható négyjegyű számot;
- 25-tel osztható négyjegyű számot?

190. 16 csapatot területi alapon két nyolcas csoportba osztottak. Az egyes csoportok első, második, illetve harmadik helyezettje játszik az első-második, harmadik-negyedik, illetve ötödik-hatodik helyért a döntőben. Hányféle döntő lehetséges?

191. 15 csapatot egy nyolcas és egy hetes csoportba osztottak. Mindegyik csoportban körmérkőzésekkel döntik el a sorrendet. A döntőben a csoportgyőztesek mérkőznek az első-második, a csoportmásodikok a harmadik-negyedik, a csoportharmadikok az ötödik-hatodik és végül a csoportnegyedikek a hetedik-nyolcadik helyért. Adott csoportbeosztás esetén hányféle döntő jöhet létre?

192. 16 csapatot sorsolással 4 négyes csoportba osztanak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kerülnek a négyes döntőbe, ahol újabb egyfordulós körmérkőzéssel döntik el az első három helyezést.

- Hányféle összetételű döntő lehetséges?
- Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

193. 16 csoportot sorsolással 4 négyes csoportba osztanak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kerülnek a négyes döntőbe, ahol kieséses rendszerben folytatják a küzdelmet. A párosítás sorsolás útján történik. A két győztes csapat játszik az első-második, s a két vesztes a harmadik-negyedik helyért.

- Hányféle összetételű döntő jöhet létre?

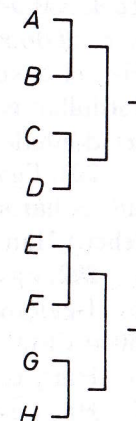
- Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

194. 16 csapatot – területi alapon – 4 négyes csoportba (A, B, C, D) osztottak. Az egy csoportba került csapatok egyfordulós körmérkőzést játszanak egymással. A csoportgyőztesek kieséses rendszerben folytatják a küzdelmet. Az A és B csoport, illetve a C és D csoport első helyezettjei játszanak egymással. A győztesek jutnak a döntőbe és a vesztesek mérkőznek a harmadik helyért.

- Hányféle összetételű döntő lehetséges?
- Az első három helyezést tekintve hányféleképpen végződhet a verseny?

195. 8 röplabdacsapat (A, B, C, D, E, F, G, H) kieséses rendszerben játszik egymással. A párosítást a 8. ábra mutatja.

- Hányféle döntő lehetséges?
- Hányféleképpen alakulhat ki a döntő párosítása?



8. ábra

196. Egy sakkversenyen az egyik versenyzőnek az ötödik forduló után 3 pontja van. Hányféleképpen érhetette el a versenyző ezt a 3 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el eredményeit? (A sakkversenyen győzelem esetén 1, döntetlen esetén 0,5 pontot kapnak.)

197. Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra, összesen 123-ra került sor. Az egész körmérkőzésen 253 játszma volt. Hány játékos indult az egyik és mennyi a másik iskolából?

198. Valamely sakkversenyen egy játékosnak a hatodik forduló után 4 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyert játszma 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vesztes játszma 0 pont.)

199. Két sakkozó, A és B játszik egymás ellen a következő szabályok szerint: ha valamelyik legfeljebb 6 játszmából több mint 3 pontot szerez, akkor a játékot az első ilyen esetben befejezik, és az illető nyert. Ha az első hat játszma során ez nem következik be, akkor mindannyiszor két partit játszanak, míg valamelyikük több pontot szerez. Hányféleképpen jöhet létre az

a) $3,5 : 2,5$; b) $4,5 : 3,5$

végeredmény?

200. Egy szabályos játékkocka szemközti oldalain rendre a , b , illetve d betű szerepel. Ketten játszanak: A és B . Aszerint, hogy a kockával a -t vagy b -t dobunk, A 1 és B 0, illetve B 1 és A 0 pontot kap; d dobása esetén mindketten 0,5 pontot kapnak. Hatszor dobják fel a kockát és az győz, aki több pontot kap. Hány esetben fordulhat elő:

a) döntetlen eredmény; b) A győzelme?

201. Egy pályázatra 20 pályamunka érkezett. Egy első, két második és három harmadik díjat adnak ki. (A díjakat megosztani nem lehet.) Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni?

202. Egy pályázatra 20 pályamű érkezett, amelyek közül 9-et nők és 11-et férfiak küldtek be. Három pályamunkát díjaznak, egyenként 5000 Ft-tal. (A díjakat megosztani nem lehet.)

a) Hány eset lehetséges a díjazás szempontjából?

b) Hány esetben lehet a díjazottak között egy nő?

c) Hány esetben lehet a díjazottak között három férfi?

203. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben mindhárom páratlan számjegy szerepel legalább egyszer?

204. Három szabályos játékkockával dobunk. Hány esetben lesz a kapott pontok összege 10?

205. Hány olyan különböző számjegyekből álló hatjegyű szám van, amelyben:

a) négy páratlan számjegy szerepel;

b) legalább négy páratlan számjegy szerepel;

c) legfeljebb négy páratlan számjegy szerepel?

206. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet szétosztani három egyenlő tárgyat úgy, hogy egy tanuló:

a) legfeljebb egy tárgyat kaphat;

b) több tárgyat is kaphat;

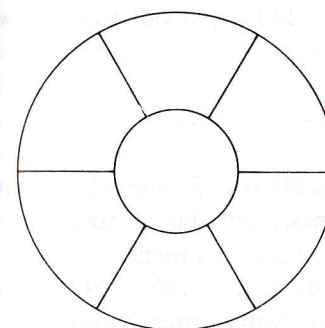
c) legfeljebb két tárgyat kaphat?

207. Egy dobozban hat különböző tárgy van. Találomra kivesszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy egyet sem, vagy lehet mindet is). Hány különböző eset jöhet létre?

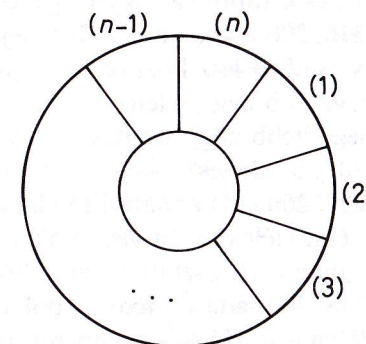
208. Egy dobozban 15 különböző tárgy van. Találomra kivesszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre?

209. Egy dobozban n különböző tárgy van. Találomra kivesszünk a dobozból néhányat (lehet, hogy mindet, lehet, hogy egyet sem). Hány különböző eset jöhet létre? Határozzuk meg az eredményt kétféle úton és az eredményeket hasonlítsuk össze.

210. Hányféleképpen színezhajjuk ki a 9. ábrán látható alakzatot három színnel, ha a szomszéd tartományokat nem színezhajjuk ki azonos színnel?



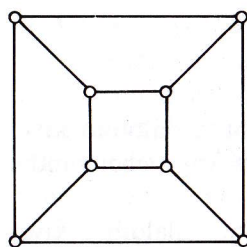
9. ábra



10. ábra

211. Hányféleképpen színezhajjuk ki a 10. ábrán látható alakzat három színnel, ha a szomszédos tartományokat nem színezhajjuk ki azonos színnel?

212. Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka nyolc csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?



213. Hány olyan ponthármas lehet kiválasztani a 11. ábrán megadott alakzatról, melyben nincs olyan kék-két pont, amely össze lenne kötve?

11. ábra

214. 12 cédulára írjuk fel rendre 1-től 12-ig a számokat.

- Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy egyenlő paritású számok ne kerüljenek egymás mellé?
- Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy az első hat helyen csak páros szám álljon?
- Hány különböző hetes csoport alkotható úgy, hogy a csoportban három páros szám társul négy páratlannal?

215. Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc különböző tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt és a többi egy-egy tárgyat kapjon?

216. 200 csavar közül 20 selejtes. A 200 csavarból tizet kivéve, hány esetben lesz köztük:

- legalább négy selejtes;
- legfeljebb négy selejtes;
- 20%-a selejtes?

217. 200 láda almából 150 láda I. osztályú és 50 láda II. osztályú áru. Hányféleképpen vehetünk olyan negyvenládás mintát, hogy e mintában a II. osztályú áru a 20%-ot ne haladja meg?

218. 200 láda őszibarackból 120 láda I. osztályú és 80 láda II. osztályú áru. Hányféleképpen vehetünk olyan harmincládás mintát, hogy e mintában a II. osztályú áru az 50%-ot meghaladja?

219. Egy 11 egység hosszúságú szakasz tíz csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra vannak. A csuklós szerkezetet hajlítsuk meg két pontban úgy, hogy háromszöget kapjunk. Hány háromszög jöhet létre ily módon? (Az egybevágókat csak egyszer számoljuk!)

220. Egy 12 egység hosszúságú szakasz tizenegy csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra van-

nak. A csuklós szerkezetet hajlítsuk meg két pontjában úgy, hogy háromszöget kapjunk.

- Hány egyenlő szárú háromszög jöhet létre ily módon?
- Hány hegyes-, tompaszögű háromszöget kaphatunk így?

221. Pontból és vízszintes vonalakból hány jelet állíthatunk össze, ha a jelek összeállítására legfeljebb három pontot és három vonalat használhatunk fel?

222. Egy szabályos játékkockát tízszer egymás után feldobunk. A kapott eredményeket a dobások sorrendjében írjuk le. Hány olyan dobássorozat lehetséges, melyben egytől hatig minden szám előfordul?

Oldjuk meg a feladatot általánosan is!

223. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

egyenletet.

224. Egy osztály klubdelutánt rendez. A klubdelutánon 15 leány és 15 fiú vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol, és a lányok egymással, illetve a fiúk egymással nem táncolnak?

225. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Testnevelési órán kettesével sorakoznak 15 különböző eszközért úgy, hogy két leány, illetve két fiú nem állhat egymás mellé. Az eszközöket meghatározott sorrendben osztják ki, és minden pár egyet kap. Hányféleképpen történhet a szétosztás?

226. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Kettesével ülnek le a padokba. Hányféle ülésrend készíthető, ha két lány, illetve két fiú nem ülhet egymás mellé? (A kétszemélyes padokat tekintsük egyetlen oszlopban elhelyezve.)

227. Hányféleképpen helyezkedhet el 15 tanuló három darab ötszemélyes csónakban, ha egy-egy csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?

228. 11 tanuló három csónakot bérel: egy kétüléssel, egy négyüléssel és egy ötüléssel.

- Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló egy csónakba akar kerülni?

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha öt tanuló szeretne egy csónakba kerülni?

(A csónakokon belüli elhelyezkedés közömbös.)

229. Egy osztályból 15 tanuló kirándulni megy két napra. Az éjszakát egy turistaházban töltik, ahol három négyszemélyes és egy háromszemélyes szobát kapnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?

b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést is figyelembe vesszük?

230. Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn valaki úgy megy fel, hogy minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép egyszerre. Határozzuk meg a lehetséges felmenetek számát, ha a lépcsőfokok száma: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

231. Egy n lépcsőfokból álló lépcsőn valaki úgy megy fel, hogy minden lépésben egy vagy két lépcsőfokot lép egyszerre. Jelölje $f(n)$ a lehetséges felmenetek számát

a) Határozzuk meg $f(n)$ -t.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 2$, akkor

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

232. Mekkora azoknak a különböző számjegyeket tartalmazó háromjegyű számoknak az összege, amelyeket a 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek felhasználásával képezhetünk?

233. Kettőnek hányadik hatványával osztható:

a) 8!; b) 14!; c) 30!; d) 75!; e) 85!; f) 100!.

234. Háromnak hányadik hatványával osztható:

a) 5!; b) 11!; c) 25!; d) 50!; e) 75!; f) 100!.

235. Hány nullára végződik:

a) 5!; b) 15!; c) 23!; d) 60!; e) 100!; f) 170!.

236. Hány pozitív osztója van:

a) 540-nek; b) 41 580-nak.

237. Hány pozitív osztója van:

a) 2730-nak;

b) 30 030-nak.

238. Az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből hány 25-tel osztható négyjegyű szám képezhető, ha egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel? Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét.

239. Hány néggyel osztható ötjegyű szám képezhető az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden „megadott számjegyet” csak egyszer használhatunk fel? Számítsuk ki ezek összegét.

240. Az 1, 3, 5 számjegyek felhasználásával hány 5-re végződő ötjegyű szám képezhető? Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét.

241. Határozzuk meg azoknak az ötjegyű számoknak az összegét, amelyeknek minden számjegye páratlan.

242. Egy játékkockával négyszer dobunk egymás után és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé írjuk. Így egy négyjegyű számot kapunk. Határozzuk meg az így nyerhető négyjegyű számok összegét.

243. Egy árusító automatában öt oszlop mindegyikében nyolc-nyolc tárgy van egymásra helyezve. Mindig csak a legalsót lehet kivenni. Hányféleképpen lehet kiüríteni az automatát?

244. A minden lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány

a) kéttalálatos;

b) háromtalálatos;

c) négytalálatos;

d) öttalálatos

szelvény van?

245. Töltsünk ki gondolatban minden lehetséges módon egy lottószelvényt, amelyen 90 szám közül ötöt kell megjelölni. Hány öt-, négy-, illetve háromtalálatos szelvényünk lesz ezek között, ha a lottósorsoláson tíz számot húznak ki?

246. 150 darab készülék között öt darab hibás van. Hányféleképpen lehet húsz készüléket úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott készülékek között

a) nulla;

b) egy;

c) négy;

d) öt

hibás legyen?

247. 200 csavar közül nyolc selejtes. Hányféleképpen választhatunk ki közülük öt csavart úgy, hogy:

- a) ne legyen köztük egyetlen selejtes csavar sem;
 b) egy selejtes és négy hibátlan legyen;
 c) két selejtes és három hibátlan legyen;
 d) mind az öt selejtes legyen?

248. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül ötöt húznak ki. Tekintsük az összes így képezhető számötöst. Adjuk össze az egy-egy számötösben szereplő számokat. Mi lesz ezeknek az összegeknek az átlaga?

249. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt. Tekintsük az így keletkezett számötösöket. Ezek hány százalékában fordul elő egy rögzített szám?

250. A következő táblázat azt adja meg, hogy a 648-adik lottóhúzás után melyik számot milyen gyakorisággal húzták ki. Számítsuk ki a táblázat alapján, hogy átlagosan mennyi az egy héten kihúzott lottószámok összege. Hasonlítsuk össze a **248.** feladat eredményével.

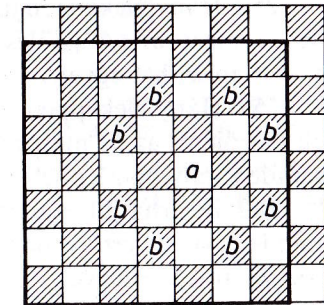
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
43	28	46	32	34	40	38	29	36	34	30	48	41	41	34
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
27	32	37	35	33	36	33	43	41	34	36	29	40	42	26
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
29	30	41	43	37	38	41	43	33	29	35	45	32	30	36
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
35	40	32	46	35	47	24	38	29	31	37	28	26	31	34
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
31	29	31	36	42	36	46	35	47	41	48	31	40	40	46
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
35	40	34	30	30	33	41	38	46	35	42	32	25	30	37

251. A **250.** feladat táblázata alapján számítsuk ki, hogy egy számot átlagosan hányszor húztak ki. Egy rögzített számot átlagosan az esetek hány százalékában húztak ki? A kapott eredményt hasonlítsuk össze a **249.** feladat eredményével.

252. Egy 8×8 -as sakktáblán hány bástyát lehet elhelyezni úgy, hogy egyik se üthesse a másikat? Hány ilyen elhelyezés lehetséges? (A bástya sor-oszlop mentén mozoghat.)

253. A 64 mezőből álló sakktáblából letakarjuk az egyik szélső sort és az egyik szélső oszlopot. Bejárhatjuk-e a le nem takart részt

egyetlen huszárral lóugrásokban úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk, és az utolsónak érintett mező lóugrásnyira legyen attól a mezőtől, amelyről indultunk? (A **12. ábrán** pl. az *a*-val megjelölt mezőtől a *b*-vel megjelöltek a lóugrásnyira fekvők.)

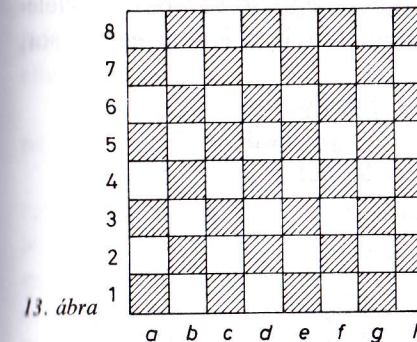


12. ábra

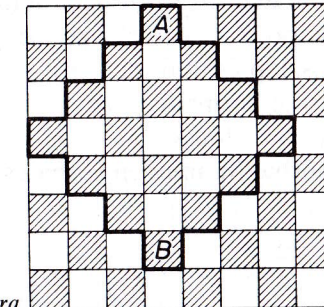
254. A sakktábla bal alsó sarokmezőjéről hányféleképpen juthatunk el a jobb felső sarokba lóugrásokkal, ha minden sorba pontosan egyszer lépünk? (A lóugrásokat a **12. ábra** mutatja.)

255. Eljuthatunk-e huszárral a sakktábla *a1* mezőjéről
 a) az *a8* mezőre; b) az *e8* mezőre,
 ha minden lépésnél a következő sorba lépünk? (A jelölést a **13. ábra** mutatja, a huszár mozgását pedig a **12. ábra**.)

256. A sakktábla *d8* mezőjéről hányféleképpen juthat hét lépésben a futár az *e1* mezőre, minden lépéssel a célhoz közeledve? (A futár csak átlósan mozoghat. A jelölést a **13. ábra** mutatja.)



13. ábra



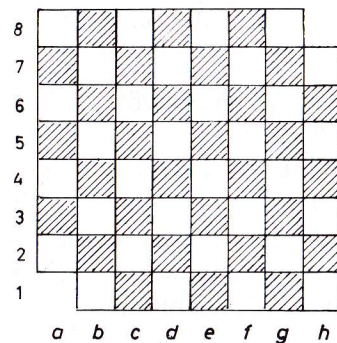
14. ábra

257. A sakktábla *A*-val jelölt mezőjéről hányféleképpen juthat el a király hat lépésben a *B*-vel jelölt mezőre, ha csak a kijelölt részen mozoghat? (A király bármilyen irányba léphet egyet; sor, oszlop és átlós irányban egyaránt.) A kijelölt részt a **14. ábra** mutatja.

258. Hányféleképpen juthat el a király két lépésben a c8 mezőről az e1 mezőre? (A jelölést a 13. ábra mutatja. A király minden irányban léphet egyet.)

259. Hányféleképpen juthat el a király hét lépésben a sakktábla c8 mezőjéről az f1 mezőre? (A jelölést a 13. ábra mutatja. A király minden irányban léphet egyet.)

260. Bejárhatjuk-e a királlyal a sakktábla sötét mezőit úgy, hogy minden sötét mezőre pontosan egyszer lépünk? (A király minden irányban léphet egyet.)

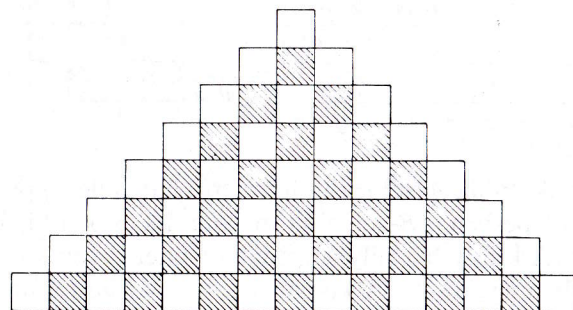


261. A 8×8 -as sakktáblából elvesszük a „bal alsó” és a „jobb felső” sarokmezőt. (A 15. ábra mutatja.) Lefedhető-e a megcsontított sakktábla hézagmentesen és egyrétűen 1×2 -es dominókkal, ha azt sem engedjük meg, hogy a dominók túlnyúljanak a táblán?

15. ábra

262. A 16. ábrán látható „sakktábla” legfelső sorából hányféleképpen juthat el egy király (minden irányban léphet egyet; sor, oszlop és átló mentén)

- a) a harmadik; b) a negyedik;
c) az ötödik; d) a nyolcadik
- sorba, ha minden sorba csak egyszer léphet.



16. ábra

5. A permutáció inverziói

263. Határozzuk meg az ISKOLA szóban az inverziót alkotó elempárok számát, ha alapsorrendnek az ábécé sorrendet vesszük.

264. Határozzuk meg a ZOLTÁN szóban az inverziók számát, ha alapsorrendnek az ábécé sorrendet vesszük.

265. Határozzuk meg a következő számokban az inverziót alkotó elempárok számát, ha alapsorrendnek a növekvő sorrendet tekintjük:

- a) 14 352; b) 106 327; c) 765 123;
d) 12 345; e) 123 450; f) 9 876 543 210.

266. Van-e az $1, 2, 3, \dots, n$ elemeknek olyan permutációja, amelyben bármely két elem inverzióban van egymással, s hány ilyen permutáció van? (Az alapsorrend a számok növekvő sorrendje.)

267. Határozzuk meg az $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ permutáció inverzióinak a számát, ha az alapsorrend a számok növekvő sorrendje.

268. Bizonyítsuk be, hogy ha n különböző elem egy permutációjában két szomszédos elemet felcserélünk, akkor az inverziók számának paritása ellenkezőre változik.

269. Bizonyítsuk be, hogy ha n különböző elem egy permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziók számának paritása ellenkezőre változik.

270. Bizonyítsuk be, hogy n különböző elem ($n \geq 2$) páros és páratlan permutációinak a száma megegyezik.

271. A 17. ábrán látható 4×4 -es keretben 15 darab 1-től 15-ig számozott fémlapocskát helyezünk el tetszés szerinti elrendezésben. Így valamelyik négyzet üresen marad. Az üres négyzet melletti fémlapok bármelyikét szabad arra átcusztatni. Ha az első, második, harmadik és negyedik sor elemeit – az elemek sorrendjének megváltoztatása nélkül – rendre egymás mellé írjuk, ak-

2	5	3	1
4	7		8
6	14	10	13
12	15	11	9

17. ábra

kor az 1, 2, 3, ..., 15 elem egy permutációját kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha a fémlapocska az átcusztatással:

- a) ugyanabban a sorban marad, akkor a fent meghatározott permutációban az inverziók száma nem változott;
b) a szomszédos sorba kerül, akkor az így kapott permutációban az inverziók száma az előzőhöz viszonyítva páratlan számmal változik meg.

272. A 271. feladatban leírt játékban a fémlapocskákat helyezzük úgy el, hogy a 16-odik négyzet maradjon üresen. A játék célja, hogy a megengedett mozgásokkal a lapocskákat a 18. ábrán látható helyzetbe hozzuk.

- a) Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor oldható meg, ha a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

18. ábra

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

19. ábra

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

20. ábra

2	7	4	5
9	1	8	3
6	12	11	13
10	14	15	

21. ábra

megadott elrendezéshez tartozó permutációban az inverziók száma páros.

- b) Hogyan lehet eldönteni azt, hogy a játék megoldható-e, ha az üres négyzet nem a 16-odik mező?
c) Átrendezhetők-e a 18. ábrán látható elrendezésbe a lapocskák, ha az ábrán látható elrendezésben a 14-es lapocskát felcseréljük a 15-össel?
d) Megoldható-e a feladat a 19., 20. és a 21. ábrán látható elrendezés esetén?

6. A binomiális együtthatóra vonatkozó összefüggések

273. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

274. Igazoljuk algebrai úton, hogy:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

275. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$;
b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

276. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \frac{3\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} + \dots + \frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{n}.$$

277. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}.$$

278. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k-2} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+3}{k+1}.$$

279. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n.$$

280. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0.$$

281. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2} + \dots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k}.$$

282. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

283. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n-1}{k-1}$ osztható k -val, ha n és k relatív prímszámok.

284. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Vizsgáljuk meg, mit ad az összefüggés $k=1$ esetén.

285. Számítsuk ki a következő összegeket:

- a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 9$;
- b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 97 \cdot 98 \cdot 99 + 98 \cdot 99 \cdot 100$;
- c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$;
- d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$.

286. Számítsuk ki a következő összegeket:

- a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$;
- b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + \dots + 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$;
- c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3)$;
- d) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

287. Legyen $\alpha_k(n) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} + \dots$; $0 \leq k \leq l$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\alpha_k(n+1) = \begin{cases} \alpha_{k-1}(n) + \alpha_k(n), & \text{ha } k \geq 1; \\ \alpha_{l-1}(n) + \alpha_0(n), & \text{ha } k=0. \end{cases}$$

288. Az úgynevezett Pascal-háromszög képzési szabálya a következő: minden sor első és utolsó eleme 1, és a második sortól kezdve a közbülső elemeket úgy kapjuk, hogy a rézsút fölötté levő két elem összegét vesszük.

0. sor					1																														
1. sor						1		1																											
2. sor							1		2		1																								
3. sor								1		3		3		1																					
4. sor									1		4		6		4		1																		
5. sor										1		5		10		10		5		1															
6. sor											1		6		15		20		15		6		1												
7. sor														1		7		21		35		35		21		7		1							
8. sor																			1		8		28		56		70		56		28		8		1

Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög n -edik sorában rendre az

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ binomiális együtthatók állnak.

289. Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög (288. feladat) n -edik sorának első, harmadik, ötödik, ... elemének összege 2^{n-1} .

VII. GRÁFELMÉLET

1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok.

1. Egy klubesten a fiúk és a lányok feljegyezték, hogy hány partnerrel táncoltak.

a) Igaz-e, hogy a fiúk által feljegyzett számok összege egyenlő a lányok által feljegyzett számok összegével?

b) Mi a válasz ugyanerre a kérdésre, ha mindenki azt jegyezte fel, hogy hányszor táncolt a klubesten?

2. Egy térképen pontokkal vannak feltüntetve a városok, amelyek páronkénti távolságai mind különbözőek. Mindegyik várost összekötjük a hozzá legközelebbi várossal (egy szakasszal).

a) Mutassuk meg, hogy nem jöhet létre zárt töröttvonal.

b) Mutassuk meg, hogy két szakasz nem metszheti egymást.

c) Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan város, amelyik ötnél több másikkal össze lenne kötve.

3. Öt város között telefon-összeköttetést akarunk létesíteni. Ennek érdekében bizonyos városok telefonközpontjai között kábelt fektetünk.

a) Legalább hány kábelt kell fektetni, hogy bármelyik városból bármelyik másikba lehessen telefonálni?

b) Legalább hány kábelt kell fektetnünk akkor, ha biztonsági okokból azt akarjuk, hogy bármely két város között legalább két független (közös kábel nélküli) vonalon is lehessen telefonálni?

Készítsünk tervrajzokat a hálózatok építéséhez.

4. Rajzoljuk meg a családfánkat ötödízigen visszamenőleg, és döntsük el, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazon személyek-e. (Feltesszük, hogy felmenő ágon legalább ötödízigen nem volt rokonházasság.)