

Bartha Gábor–Bogdán Zoltán–Csúri József–Duró
Lajosné dr.–dr. Gyapjas Ferencné–dr. Kántor
Sándorné–dr. Pintér Lajosné

Matematika feladatgyűjtemény

I.

a középiskolák tanulói számára

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

A kiadvány 2007. 10. 30-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott
a 14789-7/2007 számú határozattal.

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének
[28/2000 (IX.21.)] és az érettségi vizsga követelményeinek
[40/2002 (V.24.)].

Lektorálták:
ELŐD ISTVÁNNÉ
ny. felelős szerkesztő

GÁBOS ADÉL
gimn. vezető tanár

LÁNG HUGÓ
középiskolai tanár

SOLTI LAJOS
középiskolai tanár

Szerkesztette:
FÜLEKI LÁSZLÓNÉ

A rajzokat készítette:
FRIGYESI MIKLÓS és VIDÉKI GUSZTÁV

Fedélrajz:
SAJDIK FERENC

Felelős szerkesztő:
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

© Bartha Gábor–Bogdán Zoltán–Csúri József–Duró Lajosné dr.–
dr. Gyapjas Ferencné–dr. Kántor Sándorné–dr. Pintér Lajosné,
Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, illetve utánközlése
a kiadó engedélye nélkül tilos!

ISBN 978-963-19-4813-4

Tartalom

Előszó	7
I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei ...	11
1. Halmaz, részhalmaz fogalma	11
2. Műveletek halmazokkal	16
3. Halmaz elemeinek száma	23
4. Műveletek tulajdonságai, azonosságok	27
5. Műveletek ítéletekkel (állításokkal) és logikai értékekkel	29
6. Logikai függvények	33
7. Következtetések	35
II. Számelmélet és aritmetika	39
1. Természetes számok	39
2. Osztathóság az egész számok halmazában	44
3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ...	60
4. Diofantoszi problémák	66
5. Számrendszerek	69
6. Racionális számok	76
7. Irracionális számok	82
8. A számfogalom bővítésével kapcsolatos néhány fel- adat	87
9. Komplex számok	89
III. Az algebra elemei	95
1. Műveletek polinomokkal	95
2. Polinomok szorzattá alakítása	111

3. Algebrai törtek	115
4. Negatív egész kitevőjű hatványok	125
5. A négyzetgyökök	128
6. Az n -edik gyökök	143
7. Törtkitevőjű hatványok	149
8. A logaritmus	153
IV. Egyenletek és egyenlőtlenségek	159
1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek	159
2. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek	197
3. Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek	224
4. Nevezetes egyenlőtlenségek és alkalmazásuk	233
5. Exponenciális és logaritmikus egyenletek és egyenlőtlenségek	240
6. Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek	255
V. Egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek	267
1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek	267
2. Másod- és magasabb fokú egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek	305
3. Exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek	322
4. Lineáris programozási feladatok	332
VI. Kombinatorika	337
1. Permutációk	337
2. Variációk	339
3. Kombinációk	342
4. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből	343
5. A permutáció inverziói	367
6. A binomiális együtthatóra vonatkozó összefüggések	369

VII. Gráfelmélet	373
1. Gráfelméleti fogalmak kialakítása: csúcs, szögpont, él, fokszám. Egyszerű gráfok. Irányított gráfok	373
2. Élek, csúcsok és fokszámok közti összefüggések. Gráf komplementere. Gráfok izomorfiaja. Részgráfok	379
3. Gráfok jellemzése mátrixokkal. Szomszédsági mátrix	384
4. Út, vonal, séta (élsorozat). Összefüggő gráfok. Fák, erdők	388
5. Gráf éleinek és csúcsainak bejárása: Euler-vonal, Hamilton-út és Hamilton-kör	395
6. Páros gráfok, teljes részgráfok	405
7. Poliéderek, síkgráfok, Euler-formula	410
8. Színezési feladatok	413
9. Algoritmusok. Játékok	416
10. Vegyes feladatok	423
Útmutatások és eredmények	425
I. Halmazok tulajdonságai és a matematikai logika elemei ..	425
II. Számelmélet és aritmetika	437
III. Az algebra elemei	448
IV. Egyenletek és egyenlőtlenségek	472
V. Egyenletrendszerek, egyenlőtlenség-rendszerek	522
VI. Kombinatorika	547
VII. Gráfelmélet	551

Előszó

E feladatgyűjtemény a gimnáziumok tanterveinek (a matematika tagozat kivételével), valamint a szakközépiskolák tanterveinek matematika tananyagához illeszkedik. Ez azt jelenti, hogy a jelenlegi tananyag minden témájához – a geometria kivételével – megtalálhatók a gyűjteményben a megértést és gyakorlást szolgáló feladatok (ezek vannak túlsúlyban) és az ötletet igénylő, nehezebb feladatok is. Ez utóbbiakat csillaggal jelöltük. Néhány fejezetben olyan feladatok találhatók, amelyek túlmutatnak a tananyagon. A különböző tantervekhez kapcsolódó feladatokhoz nem tettünk jelzést, így természetes, hogy a más-más tantervek alapján tanulók – felkészültségüktől függetlenül – sem tudhatnak minden feladatot megoldani. Javasoljuk ezért, hogy a diákok – önálló, otthoni munkájukhoz, a feladatok kiválasztásához – kérjenek tanácsot tanáraiktól. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a csillaggal megjelölt feladatok nem azért „nehezebbek”, mert a több órában matematikát tanulók számára ajánlottak, hanem azért, mert a megoldásuk különleges ötlet felhasználását, illetve az ismert összefüggések észrevételét igénylik.

A feladatgyűjtemény végén, az „Útmutatások és eredmények” című részben a tanulók vagy segítséget kapnak a megoldásokhoz, vagy pedig – az eredmények megkeresésével – ellenőrizhetik munkájukat. Nem minden feladat megoldásához adtunk útmutatást vagy eredményt; amikor például a segítséggel már magát a megoldást is közöltük volna.

Ezek után összefoglaljuk azokat a legfontosabb jelöléseket, amelyek az utóbbi években a középiskolai matematikaoktatásban – elsősorban az újabb tankönyvek hatására – elterjedtek. Elöljáró-

ban is hangsúlyozzuk, hogy nem helyes merev, egyedül alkalmazható jelölések rögzítése. A matematikai szakirodalom jelölései soha nem voltak egységesek, különösen nem azok az alkalmazásokban előforduló jelölések. Bizonyos célokra az egyik jelölés, másokra pedig egy másik jelölés lehet egyszerűbb, alkalmasabb, a lényegét jobban megmutató. Érdekes megismerni többféle, a gyakorlatban előforduló jelölést akkor is, ha a matematikaórán esetleg csak egy-fajta használunk.

A feladatgyűjteményben előforduló jelölések közül a szokásosakat, azokat, amelyeket hosszú idő óta változatlanul használnak a középiskolai matematikában, nem soroljuk fel. Így zömmel a halmazok jelöléseivel foglalkozunk. Megemlítünk még néhány, a matematikai logikában használt jelölést. Ahol többféle jelölés is elfogadott, használatos, ott ezeket feltüntetjük akkor is, ha a feladatgyűjteményben ezek közül csak az egyik szerepel.

A jelölések és azok magyarázata

- $x \in A$: az x eleme az A halmaznak;
- $A \cup B$: az A és B halmaz egyesítése (uniója);
- $A \cap B$: az A és B halmaz közös része (metszete);
- $A \setminus B$ vagy $A - B$: az A és B halmaz különbsége;
- $A \subset B$ vagy $A \subseteq B$: az A halmaz a B részhalmaza;
- $\emptyset$: üres halmaz;
- $|A|$: az A véges halmaz elemeinek száma (végtelen A halmaz esetén a halmaz számossága);
- $\mathbb{N}$: a természetes (nemnegatív egész) számok halmaza;
- $\mathbb{Z}$: az egész számok halmaza;
- $\mathbb{Q}$: a racionális számok halmaza;
- $\mathbb{R}$: a valós számok halmaza;
- $\mathbb{C}$: a komplex számok halmaza;
- $[a; b]$: az $a \leq x \leq b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az $a; b$ zárt intervallum);
- $]a; b[$ vagy $(a; b)$: az $a < x < b$ feltételt kielégítő valós számok halmaza (az $a; b$ nyílt intervallum).

Számhalmazok jelölésekor gyakran használjuk például a következőt:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$ jelöli azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyek kielégítik a $|$ után álló feltételt, példánkban az egyenlő a $]2; 3[$ intervallummal.

Függvényeket általában a következőképpen jelölünk:

Legyenek A és B adott számhalmazok, ekkor például

$f: A \rightarrow B, x \mapsto 2x$, vagy

$f: A \rightarrow B, f(x) = 2x$ jelöl egy A -n értelmezett, B -beli értékeket felvevő függvényt.

Ha $A = B = \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényről is beszélünk, ekkor nem mindig írjuk ki külön az értelmezési tartományt és a képhalmazt. Ha $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, akkor célszerű alkalmazni azt az egyszerűsítést, hogy egy képlettel definiált függvény esetében – amennyiben A azonos azoknak a valós számoknak a halmazával, amelyre a képletnek értelme van – külön nem írjuk ki az értelmezési tartományt. Például $f: f(x) = \sqrt{x-1}$ jelöli azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $[1; +\infty[$, egy képhalmaza $\mathbb{R}$.

A jól ismert függvények jelölésére önállóan használhatjuk a $\sin$, $\cos$, tg , ctg , $\log_a$ jelöléseket, de ugyanilyen értelemben az $\exp_a$ jelölést is az $x \mapsto a^x$ függvényre, de használatos a rövidebb a^x jelölés is, ha a szövegösszefüggésből világos, hogy függvényről van szó.

A matematikai logika jelöléseiből a következőket használjuk:

$A, B, C, \dots$: állítások (kijelentések); a gyakorlatban az állításokat sokszor azok logikai értékével szoktuk azonosítani.

$\neg A$ vagy $\bar{A}$: A negációja;

$A \wedge B$: A, B konjunkciója;

$A \vee B$: A, B diszjunkciója;

$A \rightarrow B$: A implikáció B ;

$A \leftrightarrow B$: A ekvivalencia B ;

$\exists$: egzisztenciális kvantor („van olyan”);

$\forall$: univerzális kvantor („minden”).

I. HALMAZOK TULAJDONSÁGAI ÉS A MATEMATIKAI LOGIKA ELEMEI

1. Halmaz, részhalmaz fogalma

1. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy-egy halmazt?

1. {osztályunk tanulói};
2. {egy tetszőleges osztály tanulói};
3. {osztályunk fiútanulói};
4. {osztályunk magas tanulói};
5. {Magyarország városai ma};
6. {Arany János versei};
7. {a természetes számok};
8. {a természetes számok halmaza};
9. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet};
10. {az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet valós gyökei};
11. {egy egyenlet gyökei};
12. {az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
13. {az $x^5 - 2x^4 + 1 = 0$ egyenlet valós gyökei};
14. {az elsőfokú egyenletek, osztályunk tanulói};
15. {egy adott egyenlet, melynek 2 az egyik gyöke};
16. {egy olyan egyenlet, melynek egy valós gyöke van};
17. {tetszőleges három egész szám};
18. {a prímszámok};
19. {a legnagyobb prímszám};
20. {néhány prímszám}.

2. Soroljunk fel a következő halmazok elemei közül legalább kettőt:

1. {a 0,5-nél kisebb egész számok};
2. {Petőfi versei};