III. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

III.

1. A határozott integrál fogalma

1. Osszuk fel a $[0;\ 1]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=2$; *b)* $n=4$; *c)* $n=8$; *d)* $n=100$.

2. Osszuk fel az $[1;\ 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=2$; *b)* $n=4$; *c)* $n=8$; *d)* $n=100$.

3. Osszuk fel a $[0;\ 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x-x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=3$; *b)* $n=6$.

4. Osszuk fel a $[0;\ 8]$ intervallumot n egyenlő részre, és írjuk fel az $x \mapsto 5x^3$ függvénynek az adott felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegét. Igazoljuk, hogy $\lim(S_n) = \lim(s_n)$.

5. Osszuk fel a $[0;\ 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és írjuk fel az f függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegét. Igazoljuk, hogy $\lim(S_n) = \lim(s_n)$.

a) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x) = 4-x^2$;

b) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x) = x^2-4x$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x) = x^2+1$;

d) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x) = x^3+1$.

6. Igazoljuk az alábbi eredményeket a határozott integrál fogalmának a felhasználásával.

a) $\int_1^5 x \mapsto c = 4c \quad (c \in \mathbf{R});$

b) $\int_{-1}^{1} x \mapsto -x = 0;$

c) $\int_{-2}^{2} x \mapsto \frac{1}{4}x^3 = 0;$

d) $\int_0^{\pi} x \mapsto \cos x = 0.$

7. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat a deficínió alapján.

a) $\int_0^2 x \mapsto 5, \quad \int_0^2 x \mapsto x, \quad \int_0^2 x \mapsto 5x;$

b) $\int_0^5 x \mapsto \frac{1}{10}, \quad \int_0^5 x \mapsto x^2, \quad \int_0^5 x \mapsto \frac{1}{10}x^2;$

c) $\int_0^4 x \mapsto 3, \quad \int_0^4 x \mapsto x^3, \quad \int_0^4 x \mapsto 3x^3;$

d) $\int_{-4}^{4} x \mapsto 3, \quad \int_{-4}^{4} x \mapsto x^3, \quad \int_{-4}^{4} x \mapsto 3x^3.$

8. Számítsuk ki a definíció alapján az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények 0-tól 2-ig vett határozott integrálját.

a) $x \mapsto -\frac{1}{3}, \quad x \mapsto -\frac{1}{3}x, \quad x \mapsto -\frac{1}{3}x+3;$

b) $x \mapsto 5, \quad x \mapsto 5x, \quad x \mapsto 5x+1;$

c) $x \mapsto -4, \quad x \mapsto -4x, \quad x \mapsto -4x+10;$

d) $x \mapsto \sqrt{2}, \quad x \mapsto \sqrt{2x}, \quad x \mapsto \sqrt{2}x-4.$

9. Adjunk közelítő értéket az alábbi határozott integrálra a definíció felhasználásával.

a) $\int\limits_{1}^{4} x \mapsto \frac{1}{x};$ *c)* $\int\limits_{1}^{5} x \mapsto x^2-6x+5;$

b) $\int\limits_{1}^{4} x \mapsto \frac{1}{x^2};$ *d)* $\int\limits_{-3}^{1} x \mapsto 3-2x-x^2.$

10. Számítsuk ki a következő határozott integrált a definíció alapján.

a) $\int\limits_{1}^{3} x \mapsto 4x-1;$ *e)* $\int\limits_{0}^{5} x \mapsto 5x-x^2;$

b) $\int\limits_{1}^{2} x \mapsto 6x^2+4;$ *f)* $\int\limits_{0}^{2} x \mapsto 4x^2-x;$

c) $\int\limits_{0}^{2} x \mapsto 6+9x-6x^2;$ *g)* $\int\limits_{-1}^{0,5} x \mapsto 1-x-2x^2;$

d) $\int\limits_{1}^{8} x \mapsto \frac{x}{2}-\frac{1}{4};$ *h)* $\int\limits_{1}^{3} x \mapsto x^2-4x+3.$

11. Számítsuk ki az $\int\limits_{-5}^{5} f$ határozott integrált a definíció felhasználásával.

a) $D_f=\mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x<2 \\ 2x-4, & \text{ha } x \geqq 2 \end{cases};$

b) $D_f=\mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x<0 \\ 2-2x, & \text{ha } x \geqq 0 \end{cases};$

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < -2 \\ 4, & \text{ha } -2 \leqq x \leqq 1 \\ 3+x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < -2 \\ 4, & \text{ha } -2 \leqq x \leqq 1 \\ 5-x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$.

12. Számítsuk ki a definíció felhasználásával az

$$\int_{k}^{k+2} x \mapsto \frac{x}{2} - 1$$

határozott integrált, ha a k értéke -3, 0, 3, 6, 9.

13. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok közelítő értékét.

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x$, $\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto 2 \sin x$;

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos x$, $\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \cos x$;

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \sin x$, $\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x$;

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto 3 \sin x$, $\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto 3 \sin x$.

2. Integrálfüggvény, primitív függvény, határozatlan integrál

14. Adjuk meg az f függvénynek az a és b helyhez tartozó integrálfüggvényét.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 4$; $a=0$, $b=2$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x+5$; $a=1$, $b=-4$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 3-x$; $a=-7$, $b=0$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 2x+10$; $a=-5$, $b=1$.

15. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3$ függvénynek a 0, az 1, a 2 és a 10 helyhez tartozó integrálfüggvényét.

16. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2}{3}x$ függvénynek a -2, a 0, a 2 és a 10 helyhez tartozó integrálfüggvényét.

17. Igazoljuk, hogy az f függvény a helyhez tartozó integrálfüggvénye deriválható, és deriváltja az f függvény!

a) $D_f = [-2; 5]$, $f(x) = 10$; $a=-2$;

b) $D_f = [0; 10]$, $f(x) = 5-2x$; $a=0$;

c) $D_f = [1; +\infty[$, $f(x) = x+1$; $a=1$;

d) $D_f = [a; +\infty[$, $f(x) = kx+l$; $(a, k, l \in \mathbf{R})$.

18. Igazoljuk, hogy az f függvénynek a 0 helyhez tartozó integrálfüggvénye deriválható, és deriváltja az f függvénynek a $[0; +\infty[$ -ra való leszűkítése.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2+5$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

19. Helyes-e az alábbi integrálás?

a) $\int x \mapsto x^5 = x \mapsto 6x^6 + C$;

b) $\int x \mapsto 5x^4 = x \mapsto x^5 + C$;

c) $\int x \mapsto 12x^5 = x \mapsto 2x^6 + C$;

d) $\displaystyle\int x \mapsto (x^5 + 3) = x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + 3 + C$;

e) $\displaystyle\int x \mapsto x^2 = x \mapsto \frac{1}{3}x^3$;

f) $\displaystyle\int x \mapsto x^4 = x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + C$;

g) $\int x \mapsto 5x^4 = x \mapsto 20x^3 + C$;

h) $\int x \mapsto 90x^8 = x \mapsto 10x^9 + C$.

20. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

a) $\displaystyle\int x \mapsto x^6 = x \mapsto \frac{1}{7}x^7 + C$;

b) $\displaystyle\int x \mapsto (x^3 + 2x + 5) = x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 5x + C$;

c) $\displaystyle\int x \mapsto (x^4 + x^2 + 1) = x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + C$;

d) $\displaystyle\int x \mapsto (2x+1)(2x-1) = x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - x + C$;

e) $\int x \mapsto (x+2)^3 = x \mapsto \frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+8x+C;$

f) $\int x \mapsto x^3(1+x)^2 = x \mapsto \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6+C;$

g) $\int x \mapsto (x^2-3x)^2 = x \mapsto \frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+3x^3+C;$

h) $\int x \mapsto \frac{4x-2}{(x^2-x+1)^2} = x \mapsto \frac{x^2-x-1}{x^2-x+1}+C.$

21. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

a) $\int x \mapsto (x^2+5)^7 \cdot 2x = x \mapsto \frac{1}{8}(x^2+5)^8+C;$

b) $\int x \mapsto (3x^3+5x^2-8)(9x^2+10x) = x \mapsto \frac{1}{2}(3x^3+5x^2-8)^2+C;$

c) $\int x \mapsto 3x\sqrt{x^2+6} = x \mapsto (x^2+6)\sqrt{x^2+6}+C;$

d) $\int x \mapsto 16x(2x^2+7)^3 = x \mapsto (2x^2+7)^4+C.$

22. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

a) $\int x \mapsto 2\cos x = x \mapsto 2\sin x+C \quad (x \in \mathbf{R});$

b) $\int x \mapsto \operatorname{tg}^2 x = x \mapsto \operatorname{tg} x - x + C \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right);$

c) $\int x \mapsto \operatorname{ctg}^2 x = x \mapsto -\operatorname{ctg} x - x + C \quad (x \in]0; \pi[);$

d) $\int x \mapsto (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) = x \mapsto \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C \quad \left(x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right).$

23. Hol a hiba az alábbi következtetésben?

$$(x \mapsto \sin^2 x)' = x \mapsto 2 \sin x \cos x$$

és $(x \mapsto -\cos^2 x)' = x \mapsto 2 \sin x \cos x,$

tehát minden valós x esetén $\sin^2 x = -\cos^2 x$.

24. Hol a hiba az alábbi következtetésben?

$$\int x \mapsto \sin x \cos x = x \mapsto \frac{1}{2} \sin^2 x$$

és $\displaystyle\int x \mapsto \sin x \cos x = x \mapsto -\frac{1}{2} \cos^2 x,$

tehát minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x$, vagyis

$\sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

25. Állítsuk elő az alábbi függvények határozatlan integrálját.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5{,}7,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5{,}7x,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5{,}7x^2;$

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5x,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5x^2;$

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3}x,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3}x^2;$

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\dfrac{\sqrt{2}}{3},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\dfrac{\sqrt{2}}{3}x,$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\dfrac{\sqrt{2}}{3}x^2.$

26. Állítsuk elő az alábbi függvények határozatlan integrálját.

a) $[0; +\infty] \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y},$

$[0; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y^2},$

$[0; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y^3};$

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y^2},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y^3};$

c) $[0; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y},$

$[0; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y^2},$

$[0; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y^3};$

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y^2},$

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y^3}.$

27. Állítsuk elő az alábbi $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvény határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto 5x^4;$

b) $x \mapsto 4\sqrt{x^3};$

c) $x \mapsto 8\sqrt[3]{x^5};$

d) $x \mapsto \dfrac{5}{7\sqrt[5]{x^6}};$

e) $x \mapsto \sqrt[3]{\sqrt{x}};$

f) $x \mapsto \sqrt{x\sqrt[3]{x}};$

g) $x \mapsto \sqrt[3]{x\sqrt{x}};$

h) $x \mapsto \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}.$

28. Állítsuk elő az alábbi $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvény határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}x^{-2}}{\sqrt[5]{x}};$

b) $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[10]{\sqrt[4]{x^5}}};$

c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

d) $x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$.

III.

29. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto 2$, $\int x \mapsto (x+2)$, $\int x \mapsto (2-x)$,

$\int x \mapsto (x+2)^2$, $\int x \mapsto (x-2)^2$;

b) $\int x \mapsto (2x+5)$, $\int x \mapsto (x^2-3)$, $\int x \mapsto (x^2-3x)$,

$\int x \mapsto (2x^2+x-1)$, $\displaystyle\int x \mapsto \left(\frac{x}{3}+x^2-2x^3\right)$;

c) $\int x \mapsto 5$, $\int x \mapsto (5x+1)$, $\int x \mapsto (5x^2+x-7)$,

$\int x \mapsto (5x^3+x^2-7x+3)$, $\int x \mapsto (5x^4+x^3-7x^2+3x-4)$;

d) $\int x \mapsto (3-x)$, $\int x \mapsto (3+x)$, $\int x \mapsto (3-x)^2$,

$\int x \mapsto (3+x)^2$, $\int x \mapsto (3-x)^3$.

30. Végezzük el a kijelölt integrálást.

a) $\int x \mapsto (6x^2+8x+3)$;

b) $\int x \mapsto (5x^4+3x^3+6x^2-x+2)$;

c) $\displaystyle\int x \mapsto \left(\frac{2}{7}x^5-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{5}x\right)$;

d) $\int x \mapsto (5x-1)^3\,(x+3)$.

31. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto \frac{x+x^{-1}+x^{-2}}{\sqrt{x}}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

b) $\int x \mapsto \frac{x^3+8}{x+2}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

c) $\int x \mapsto \frac{x^2-7x+10}{3x-6}$ $(x \in]2; +\infty[)$;

d) $\int x \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

e) $\int x \mapsto \frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

f) $\int x \mapsto \frac{x}{\sqrt[4]{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{x}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

g) $\int x \mapsto (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$ $(x \in \mathbf{R}^+)$;

h) $\int x \mapsto \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$.

***32.** Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto \sin x$, $\int x \mapsto \cos x$;

b) $\int x \mapsto (3\sin x - 4\cos x)$, $\int x \mapsto \left(\frac{1}{4}\sin x + \frac{2}{3}\cos x\right)$;

c) $\int x \mapsto \sin^2 x$, $\int x \mapsto \cos^2 x$;

d) $\int x \mapsto (\sin^2 x + \cos^2 x)$, $\int x \mapsto (\sin^2 x - \cos^2 x)$;

e) $\int x \mapsto \sin 2x$, $\int x \mapsto \cos 2x$;

f) $\int x \mapsto (x - \sin 2x)$, $\int x \mapsto (5x + \cos 2x)$;

g) $\int x \mapsto \sin x \cos x$, $\int x \mapsto (6x - 8 \sin x \cos x)$;

h) $\int x \mapsto 6 \cos 3x$, $\int x \mapsto \left(2 + x^2 - \sin \frac{x}{3}\right)$.

***33.** Végezzük el a kijelölt integrálást.

a) $\int x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\int x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\int x \mapsto \sin(\pi - 2x)$;

d) $\int x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\int x \mapsto \cos\left(\frac{x}{5} - 2\right)$;

f) $\int x \mapsto \sin\left(4 - \frac{x}{2}\right)$;

g) $\int x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

h) $\int x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

*34. Állítsuk elő az alábbi $]-1; +\infty[\to \mathbf{R}$ függvények határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$;

b) $x \mapsto \dfrac{-1}{(x+1)^2}$;

c) $x \mapsto 1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

d) $x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$;

e) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$;

f) $x \mapsto \dfrac{-1}{(x+1)^3}$;

g) $x \mapsto 1-\dfrac{1}{(x+1)^3}$;

h) $x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2+3x}{(x+1)^3}$.

*35. Állítsuk elő az alábbi függvény határozatlan integrálját.

a) $]2; +\infty[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto (x-2)^{-3}$;

b) $\left]-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{(3x+1)^4}$;

c) $\left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{(1-3x)^5}$;

d) $]-1; 1[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$;

e) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^2}$;

f) $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{30x^2-20x+10}{(x^3-x^2+x-1)^2}$;

g) $]1; +\infty[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{2-8x-6x^2}{(2+x-2x^2-x^3)^2}$;

h) $]1; 2[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{4x^3-10x}{(x^2-1)^2(x^2-4)^2}$.

***36.** Állítsuk elő az alábbi függvény határozatlan integrálját.

a) $[-8; +\infty[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x+8}$;

b) $[2; +\infty[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto (x-2)\sqrt{x-2}$;

c) $]-\infty; 1[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{5}{\sqrt{1-x}}$;

d) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$;

e) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{5x+10}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

f) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{5x+10}{\sqrt{x^2+4x+10}}$.

g) $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{2x^2}{\sqrt{3-5x^3}}$;

h) $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

***37.** Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto \sin^2 x, \qquad \int x \mapsto \cos^2 x$;

III.

b) $\int x \mapsto \sin^3 x$, $\int x \mapsto \cos^3 x$;

c) $\int x \mapsto \sin^4 x$, $\int x \mapsto \cos^4 x$;

d) $\int x \mapsto \sin^5 x$, $\int x \mapsto \cos^5 x$;

e) $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^2 x$, $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^3 x$;

f) $\int x \mapsto \sin^6 x \cos^3 x$, $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^6 x$;

g) $\int x \mapsto \sin^5 x \cos^5 x$, $\int x \mapsto \sin^{15} x \cos^5 x$;

h) $\int x \mapsto \sin^2 x \cos^4 x$, $\int x \mapsto \sin^4 x \cos^2 x$.

***38.** Végezzük el az alábbi integrálást.

a) $\int x \mapsto \sin 5x \cos 3x$;

b) $\int x \mapsto \sin 3x \cos 2x$;

c) $\int x \mapsto \cos 3x \cos x$;

d) $\int x \mapsto \sin 2x \cos 4x$;

e) $\int x \mapsto \sin 10x \sin 15x$;

f) $\int x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3}$;

g) $\int x \mapsto \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}$;

h) $\int x \mapsto \sin x \sin 2x \sin 3x$.

39. Végezzük el az alábbi integrálást.

a) $\int x \mapsto 2x \sin x^2$;

b) $\int x \mapsto \frac{x}{10} \cos(3x^2 + 5)$;

c) $\int x \mapsto (3x^2 - 2) \cos(x^3 - 2x + 1)$;

d) $\int x \mapsto (3x^2 - 2) \sin(x^3 - 2x + 1)$;

e) $\int x \mapsto (2x + 5) \cos (x^2 + 5x + 1)$;

f) $\int x \mapsto -4\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$;

g) $\int x \mapsto 3x^2\cos(x^3-4)$;

h) $\int x \mapsto 7x^2\sin(x^3-4)$.

III.

40. Melyik az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 10x-7$ függvénynek az a primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik az A (1; 5) pontra?

41. Van-e az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 3x^2+2x+1$ függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik a $B(0; 2)$ pontra?

42. Van-e olyan f $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre $f'(x) = 5x^2-7x+4$ és $f(1) = 3$?

43. Határozzuk meg az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 3x^2-4$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek a -1 zérushelye.

44. Határozzuk meg azt a g függvényt, amelyre $g(2) = 50$ és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $g'(x) = 4x^2-9x+5$.

45. Határozzuk meg azt a h függvényt, amelyre $h(1) = 2$ és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $h'(x) = x^3-5x^2+x+1$.

46. Van-e az f függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik a $P(x_0; y_0)$ pontra? Ha van, adjuk meg.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 6x^2-8$; $x_0=2$, $y_0=5$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 3\sin x$; $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $y_0=2$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x+\cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $y_0=0$;

d) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $f(x) = 2+\frac{1}{\cos^2 x}$; $x_0=0$, $y_0=0$.

***47.** Határozzuk meg a

$$]2; +\infty[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{5(x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek az 5 zérushelye!

*48. Határozzuk meg az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto 2x^3 \cos\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvénynek azt a primitív függvényét, amely

a) a 0 helyen a 3 értéket;

b) a 3 helyen a 0 értéket

veszi fel.

3. Határozott integrálok kiszámítása

49. Számítsuk ki a következő határozott integrált.

a) $\int\limits_{1}^{3} x \mapsto (2-3x)$;

b) $\int\limits_{1}^{2} x \mapsto (6x^2+1)$;

c) $\int\limits_{0}^{2} x \mapsto (2x^2-3x-2)$;

d) $\int\limits_{-3}^{2} x \mapsto (6-x-x^2)$;

e) $\int\limits_{0}^{5} x \mapsto (5x-x^2)$;

f) $\int\limits_{0}^{2} x \mapsto (4x^3-x)$;

g) $\int\limits_{1}^{3} x \mapsto (2x^2-8x+6)$;

h) $\int\limits_{-1}^{0,5} x \mapsto (1-x-2x^2)$.

50. Számítsuk ki a következő határozott integrált.

a) $\int\limits_{0}^{1} x \mapsto (x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1);$

b) $\int\limits_{-1}^{1} x \mapsto (2x^5 - x^4 + \sqrt{3}x^3 - 10x^2 + 7x + 1);$

c) $\int\limits_{-24}^{24} x \mapsto (5x^3 + 2x);$

d) $\int\limits_{-2}^{0} x \mapsto (2x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 1).$

51. Számítsuk ki az

$$]1; +\infty[\to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

függvény k-tól l-ig vett határozott integrálját, ha

a) $k=2,\ l=3;$ *c)* $k=5,\ l=10;$

b) $k=2,\ l=5;$ *d)* $k=10,\ l=17.$

52. Számítsuk ki az

$$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{3x+1}$$

függvény 1-től 8-ig vett határozott integrálját.

53. Számítsuk ki az f függvény a-tól b-ig vett határozott integrálját.

a) $D_f =]-1; +\infty[, \qquad f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad a = -\frac{3}{4}, \quad b = -\frac{1}{2};$

b) $D_f =]-1; +\infty[, \qquad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}; \quad a=0, \quad b=1;$

c) $D_f = \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad a=-5, \quad b=5;$

d) $D_f =]-5; 25[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{25-x}}$; $a=0$, $b=24$.

54. Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x$;

b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \mapsto 3 \cos x$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \sin 4x$;

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos 4x$;

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto (3 \sin x - 2 \cos x)$;

f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x \cos^2 x$;

g) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^2 x \cos x$;

h) $\int\limits_0^{\pi} x \mapsto \sin^2 x \cos x$.

***55.** Integráljuk 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig és $-\frac{\pi}{2}$-től $\frac{\pi}{2}$-ig az f, a g, az $f+g$ és az $f-g$ függvényt.

a) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = 5 \sin x$, $g(x) = \frac{1}{4} \cos x$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$.

56. Integráljuk a-tól b-ig az f függvényt.

a) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2 2x}$; $a = \frac{\pi}{8}$; $b = \frac{\pi}{6}$;

b) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$; $a=0$, $b = \frac{\pi}{2}$;

c) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$; $a=0$, $b = \frac{\pi}{2}$;

d) $D_f = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\right)^2 - \frac{1}{\cos^4 x}$; $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$.

***57.** Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

a) $\int\limits_0^{2\pi} x \mapsto \sin^3 x$;

b) $\int\limits_0^{\pi} x \mapsto \cos^3 x$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^5 x$;

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^5 x$.

***58.** Mennyi az $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \sin mx \sin nx$ értéke, ha

a) $m=n=2$;

b) $m=n=3$;

c) $m=2$, $n=4$;

d) $m=5$, $n=3$?

*59. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0, \text{ ha } m \neq n \\ \pi, \text{ ha } m = n \end{cases}.$$

*60. Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos 4x \sin 2x;$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos 2x \sin 2x;$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \cos 3x \sin 4x;$

d) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \sin 3x.$

61. Integráljuk az f függvényt k-tól l-ig, l-től m-ig és k-tól m-ig. Milyen kapcsolat van a három eredmény között?

a) $D_f = [0; 6]$, $f(x) = \sqrt{x}$; $k=0$, $l=3$, $m=6$;

b) $D_f = [0; 4]$, $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$; $k=0$, $l=2{,}5$, $m=4$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 2\cos x$; $k = -\frac{\pi}{4}$, $l=0$, $m = \frac{\pi}{2}$;

d) $D_f =]0; \pi[$, $f(x) = \frac{5}{\sin^2 x}$; $k = \frac{\pi}{4}$, $l = \frac{\pi}{2}$, $m = \frac{3\pi}{4}$.

62. Igazoljuk a határozott integrál definíciója alapján, hogy

$$\int_0^1 f + \int_1^2 f = \int_0^2 f, \text{ ha}$$

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x$;

b) $D_f = [0; 2]$, $f(x) = 3x^2$;

c) $D_f = [0; \pi]$, $f(x) = \sin x$;

d) $D_f = [0; 2]$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x-1)}$.

III.

63. Igazoljuk a határozott integrál geometriai jelentését felhasználva, hogy

$$\int_g^k x \mapsto (4x-1) = \int_g^h x \mapsto (4x-1) + \int_h^k x \mapsto (4x-1), \text{ ha}$$

a) $g=1$, $h=2$, $k=3$;

b) $g=0{,}4$, $h=0{,}5$, $k=1$;

c) $g=-3$, $h=-2$, $k=0$;

d) $g=-5$, $h=\dfrac{1}{4}$, $k=5\dfrac{1}{2}$.

64. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

a) $\int_{-1}^{2} x \mapsto 2|x|$;

c) $\int_{4}^{7} x \mapsto |5-x|$;

b) $\int_{0}^{3} x \mapsto |5-x|$;

d) $\int_{4}^{6} x \mapsto |5-x|$.

65. Ábrázoljuk az

$$f: [0; 4] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2-4x+8, & \text{ha } x \in [0; 2] \\ 4x-x^2, & \text{ha } x \in]2; 4] \end{cases}$$

függvényt.

a) Differenciálható-e az f függvény?

b) Számítsuk ki az $\int_0^4 f$ értékét.

66. Ábrázoljuk a

$$g: [-2; 2] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 8-2x^2, & \text{ha } |x| \in [1; 2] \\ x^2+5, & \text{ha } |x| \in [0; 1[\end{cases}$$

függvényt!

a) Differenciálható-e a g függvény?

b) Számítsuk ki az $\int\limits_{-2}^{2} g$ értéket..

c) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

67. Differenciálható-e a

$$h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} -x^2-2x, & \text{ha } x \leqq -1 \\ x^2+2x+4, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

függvény?

a) Számítsuk ki az $\int\limits_{-2}^{2} h$ értéket.

b) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

68. Differenciálható-e a

$$k: [-3; 3] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^3-9x, & \text{ha } x \in [-3; 0[\\ -x^2-9x, & \text{ha } x\ [0; 3] \end{cases}$$

függvény?

a) Számítsuk ki az $\int\limits_{-3}^{3} k$ értéket.

b) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

69. Állapítsuk meg, differenciálható-e az

$$f: [-2; 8] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \in [-2; 3] \\ 6x-x^2, & \text{ha } x \in]3; 8] \end{cases}$$

függvény? Számítsuk ki az $\int\limits_{k}^{l} f$ értéket, ha

a) $k=0$, $l=1$;

b) $k=-2$, $l=3$;

c) $k=3$; $l=8$;

d) $k=2$, $l=8$.

70. Számítsuk ki az f függvény a-tól b-ig vett határozott integrálját.

a) $D_f=\mathbf{R}$, $\qquad f(x) = |x^2-1|$; $\qquad a = -\dfrac{1}{2}$, $b=5$;

b) $D_f = [-\pi; \pi]$, $\quad f(x) = |\sin x|$; $\quad a = -\frac{\pi}{2}$, $b=\pi$;

c) $D_f = [-2; 3]$, $\quad f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ ha } x \in [-2; 1] \\ \frac{1}{x^2}, \text{ ha } x \in]1; 3] \end{cases}$; $\quad a=-2$, $b=3$;

d) $D_f = \left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ ha } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \\ \cos x, \text{ ha } x \in \left]\frac{\pi}{4}; \pi\right[\end{cases}$;

$$a = -\frac{\pi}{4}, b=\pi.$$

***71.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$[a; b] \subset D_f \quad \text{és} \quad f(x) = Ax+B \quad (a, b, A, B \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\int_a^b f = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

***72.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$[a; b] \subset D_f \quad \text{és} \quad f(x) = Ax^2+Bx+C \quad (a, b, A, B, C \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

73. Az integrálszámítás középértéktétele azt mondja ki, hogy ha az f: $[a; b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor van olyan $k \in]a; b[$, hogy

$$\int_a^b f = (b-a) f(k).$$

Az $f(k)$ számot az f függvény $[a; b]$-re vonatkozó *integrálközepének* nevezzük. Határozzuk meg az f függvény $[a; b]$-ra vonatkozó integrálközepét, ha

$a)$ $f(x) = \sin x;$ $a=0,$ $b=\pi;$

$b)$ $f(x) = x^2;$ $a=1,$ $b=5;$

$c)$ $f(x) = 2x^3;$ $a=-5,$ $b=-1;$

$d)$ $f(x) = \frac{1}{4}x^3;$ $a=-2,$ $b=2.$

***74.** Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

$a)$ $\int\limits_0^3 x \mapsto e^x,$ $\int\limits_1^3 x \mapsto e^x,$ $\int\limits_{-2}^2 x \mapsto e^x;$

$b)$ $\int\limits_0^3 x \mapsto 2^x,$ $\int\limits_1^3 x \mapsto 2^x,$ $\int\limits_{-2}^2 x \mapsto 2^x;$

$c)$ $\int\limits_0^3 x \mapsto \frac{1}{2^x},$ $\int\limits_1^3 x \mapsto \frac{1}{2^x},$ $\int\limits_{-2}^2 x \mapsto \frac{1}{2^x};$

$d)$ $\int\limits_0^3 x \mapsto (5^x+5^{-x}),$ $\int\limits_1^3 x \mapsto (5^x+5^{-x}),$ $\int\limits_{-2}^2 x \mapsto (5^x+5^{-x}).$

75. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

$a)$ $\int\limits_1^5 x \mapsto \frac{1}{x},$ $\int\limits_1^6 x \mapsto \frac{1}{x},$ $\int\limits_5^6 x \mapsto \frac{1}{x};$

$b)$ $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{3}} x \mapsto \frac{1}{x},$ $\int\limits_{-3}^{-1} x \mapsto \frac{1}{x},$ $\int\limits_{-3}^{-\frac{1}{3}} x \mapsto \frac{1}{x};$

$c)$ $\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 x \mapsto \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^2},$ $\int\limits_{\frac{1}{e}}^e x \mapsto \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^2};$

$d)$ $\int\limits_{-5}^5 x \mapsto \frac{2x}{x^2+3},$ $\int\limits_{-5}^5 x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}.$

76. Határozzuk meg a k valós számot, ha

a) $$\int_{\frac{1}{4}}^{1} x \mapsto \frac{1}{x} = \int_{1}^{k} x \mapsto \frac{1}{x};$$

b) $$5\int_{1}^{2} x \mapsto \frac{1}{x} = \int_{1}^{k} x \mapsto \frac{1}{x};$$

c) $$5\int_{1}^{2} x \mapsto \frac{1}{x} = \int_{2}^{k} x \mapsto \frac{1}{x};$$

d) $$5\int_{1}^{2} x \mapsto \frac{1}{x} = \int_{\frac{1}{8}}^{k} x \mapsto \frac{1}{x}.$$

77. Hogyan kell megválasztanunk a k és az l valós számot ahhoz, hogy létezzék az

$$\int_{k}^{l} x \mapsto \frac{1}{|x|} - \int_{k}^{l} x \mapsto \frac{1}{|x-3|}$$

különbség? Számítsuk ki az adott különbséget, ha

a) $k=5, \quad l=6;$ *c)* $k=-4, \quad l=-1;$

b) $k=1, \quad l=2;$ *d)* $k=0{,}1, \quad l=2{,}9.$

***78.** Hogyan kell megválasztanunk a k és a l valós számot ahhoz, hogy létezzék és az ln függvény felhasználásával kiszámítható legyen az alábbi határozott integrál?

a) $$\int_{k}^{l} x \mapsto \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-3|}\right);$$

III.

$$b)\ \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x-3|}\right);$$

$$c)\ \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x-3}\right);$$

$$d)\ \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}\right).$$

***79.** Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

$$a)\ \int_{-1}^{1} x \mapsto 5xe^{x^2}, \qquad \int_0^1 x \mapsto 5xe^{x^2}, \qquad \int_{-1}^{0} (x \mapsto 5xe^{x^2});$$

$$b)\ \int_0^1 x \mapsto (e^{3-2x}+3x), \qquad \int_0^1 x \mapsto (e^{3+2x}+3x);$$

$$c)\ \int_{-2}^{0} x \mapsto \frac{3+2x}{4-3x-x^2}, \qquad \int_{-3}^{0} x \mapsto \frac{3+2x}{4-3x-x^2};$$

$$d)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \mapsto \operatorname{tg} x, \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \operatorname{ctg} x.$$

4. Területszámítási feladatok

80. Melyik síkidom területét adják meg az alábbi határozott integrálok?

$$a)\ \int_0^1 x \mapsto 4x, \qquad \int_0^4 x \mapsto 4x, \qquad \int_1^4 x \mapsto 4x;$$

b) $\int\limits_0^1 x \mapsto x^2$, $\int\limits_0^4 x \mapsto x^2$, $\int\limits_1^4 x \mapsto x^2$;

c) $\int\limits_0^1 x \mapsto (4x-x^2)$, $\int\limits_0^4 x \mapsto (4x-x^2)$, $\int\limits_1^4 x \mapsto (4x-x^2)$;

d) $\int\limits_0^1 x \mapsto (4x+x^2)$, $\int\limits_0^4 x \mapsto (4x+x^2)$, $\int\limits_1^4 x \mapsto (4x+x^2)$.

III.

81. Melyik síkidom területét adják meg az alábbi határozott integrálok?

a) $\int\limits_0^2 x \mapsto (x^2+1)$, $\int\limits_0^2 x \mapsto (x^2+4)$;

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x \mapsto 4x^3$, $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x \mapsto (4x^3+2)$;

c) $\int\limits_0^3 x \mapsto (3x-x^2)$, $\int\limits_0^3 x \mapsto (5+3x-x^2)$;

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos x$, $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto (2+\cos x)$.

82. Szemléltethetők-e valamely síkidom területével az alábbi határozott integrálok?

a) $\int\limits_{-2}^{-1} x \mapsto (x^2-1)$, $\int\limits_{-1}^{0} x \mapsto (x^2-1)$,

$\int\limits_0^1 x \mapsto (x^2-1)$, $\int\limits_1^2 x \mapsto (x^2-1)$;

b) $\int\limits_{-2}^{-1} x \mapsto (1-x)$, $\int\limits_{-1}^{0} x \mapsto (1-x)$,

$\int\limits_0^1 x \mapsto (1-x)$, $\int\limits_1^2 x \mapsto (1-x)$;

c) $\int_{-2}^{-1} x \mapsto (1+\sin x)$, $\int_{-1}^{0} x \mapsto (1+\sin x)$,

$\int_{0}^{1} x \mapsto (1+\sin x)$, $\int_{1}^{2} x \mapsto (1+\sin x)$;

d) $\int_{-2}^{-1} x \mapsto (x^2-4)$, $\int_{-1}^{0} x \mapsto (x^2-4)$,

$\int_{0}^{1} x \mapsto (x^2-4)$, $\int_{1}^{2} x \mapsto (x^2-4)$.

83. Számítsuk ki elemi úton és a határozott integrál segítségével is az alábbi egyenletű egyenesekkel közrefogott síkidom területét.

a) $y=0$, $y=2x$, $x=10$;

b) $y=0$, $y=3x-1$, $x=1$, $x=2$;

c) $y=0$, $y=2-2x$, $x=0$, $x=2$;

d) $y=0$, $y=4x+2$, $x=0$, $x=2$;

e) $2x-3y=1$, $5x-2y=4$, $3x+y=18$;

f) $y=2$, $x-y+3=0$, $x+2y-15=0$;

g) $3x+2y-21=0$, $x-y+3=0$, $x-6y+13=0$;

h) $3x+4y-21=0$, $5x-2y-9=0$, $x-3y-7=0$.

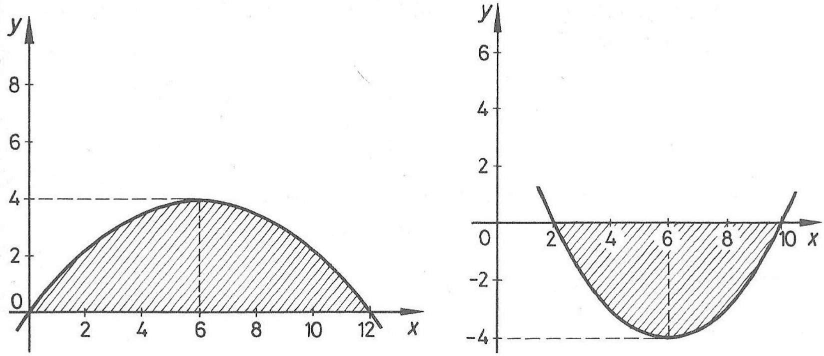
84. Határozzuk meg az 5. *ábrán* látható parabolaszeletek területét.

85. Igazoljuk, hogy egy parabola és a tengelyére merőleges szelő által közrefogott parabolaszelet területe egyenlő a szelet köré írható téglalap területének $\frac{2}{3}$ részével.

86. Mekkora területű síkidomot határol az $y=ax^2$ egyenletű parabola, valamint az $y=k$ és az $y=l$ egyenletű egyenes, ha

a) $a=1$, $k=1$, $l=4$;

b) $a=1$, $k=4$, $l=25$;



5. *ábra*

c) $a=\frac{1}{5}$, $k=1$, $l=4$;

d) $a=\frac{1}{5}$, $k=4$, $l=25$?

87. Mekkora területű síkidomot határol az $y=ax^2$ $(a\in \mathbf{R}^+)$ egyenletű parabola és két, az x tengellyel párhuzamos szelője?

88. Legyen $A(a_1;\ a_2)$ és $B(b_1;\ b_2)$ az $y=kx^3$ egyenletű görbe két pontja $(k\in \mathbf{R}^+,\ b_1>a_1\in \mathbf{R}^+)$, A_x és B_x, illetve A_y és B_y pedig az A és a B pont vetülete az x, illetve az y tengelyen.
a) Mekkora az A_xB_xBA síkidom területe?
b) Mekkora a B_yA_yAB síkidom területe?

89. Mekkora az x tengely és az alábbi egyenletű parabola által közrefogott parabolaszelet területe?

a) $y = x^2+2x$; *c)* $y = -x^2+2x$;

b) $y = x^2-2x$; *d)* $y = -x^2-2x$.

90. Mekkora az x tengely és az alábbi egyenletű görbe által közrefogott síkidom területe?

a) $y = 4-x^2$; *c)* $y = x^2+4x-5$;

b) $y = 3-2x-x^2$; *d)* $y = 6x-x^2$.

91. Mekkora területű síkidomot fog közre az alábbi egyenletű görbe és az x tengely?

a) $y = 3x - x^2$; *c)* $y = (x-2)(x-3)^2$;

b) $y = x - x^3$; *d)* $y = -x^2 + 7x - 10$.

92. Mekkora területű síkidomokat határol az x tengely és a

a) sinusgörbe; *b)* cosinusgörbe?

93. Mekkora területű síkidomot zár körül az $y^2 = \frac{1}{2}x$ egyenletű görbe és az $x = 2$ egyenletű egyenes?

94. Legyen $A(a_1; 1)$ és $B(b_1; 3)$ az $y = 3x^2$ egyenletű parabola két pontja. Mekkora területű síkidomot fog közre az adott parabola és az AB egyenes?

95. Mekkora az $y = kx^2$ egyenletű parabola és az $y = mx$ egyenletű egyenes által közrefogott síkidom területe, ha

a) $k = m = 1$; *c)* $k = 1$, $m = -2$;

b) $k = 1$, $m = 2$; *d)* $k = \frac{1}{4}$, $m = 5$?

96. Igazoljuk, hogy az $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ egyenletű görbe, az $x = 1$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes $\frac{1}{n+1}$ területű síkidomot fog közre.

97. Mekkora területű síkidomot fog közre az $y = kx^n$ $(k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}^+)$ egyenletű görbe, az $x = a$ $(a \in \mathbf{R}^+)$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes?

98. Mekkora területű síkidomot fog közre az f és a g, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = 0$;

b) $f(x) = x(x-1)(x-2)$, $g(x) = 0$;

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$;

d) $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - x^2$.

99. Mekkora az alábbi egyenletű görbék által közrefogott síkidom területe?

a) $y^2 = 2(x-4)$, $x=5$;

b) $y^2 = \frac{1}{3}x$, $x-2y = 0$;

c) $y^2 = 9x$, $3x-y = 6$;

d) $y^2 = x$, $x^2=y$.

100. Számítsuk ki az $y^2=ax$ és az $x^2=by$ ($a, b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$) egyenletű parabolák által közrefogott síkidom területét.

101. Mekkora területű síkidomot fog közre az $y = (x+2)^2$ egyenletű parabola és a két koordinátatengely?

102. Mekkora területű síkidomot vág ki az első, illetve a második síknegyedből az $y = -x^2-3x+4$ egyenletű parabola?

103. Mekkora területű síkidomot vág ki az első, illetve a második síknegyedből az $y = -3x^2-x+4$ egyenletű parabola?

104. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = 2-x-x^2$ egyenletű parabola és a tengelypontján áthaladó, 2 iránytangensű egyenes fog közre?

105. Mekkora területű síkidomot fog közre az f és a g $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3-x^2$;

b) $f(x) = x+3$, $g(x) = x^2+3x$;

c) $f(x) = x^2-4$, $g(x) = x+2$;

d) $f(x) = x+3$, $g(x) = x^3+3x^2$;

e) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 4-x^2$;

f) $f(x) = x^2-5$, $g(x) = -x^2+4x+1$;

g) $f(x) = 2x+4$, $g(x) = 3x^2-5x+8$;

h) $f(x) = 3x-x^2$, $g(x) = 3x^2-x$.

III.

106. Hány síkidomot fog közre az x tengely és az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

függvény grafikonja? Számítsuk ki e síkidomok területét.

107. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomok területét.

a) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

b) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$;

c) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 8$;

d) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 1$;

e) $y = x^3$, $x = y$;

f) $x = y^3$, $x = 8$, $y = 1$;

g) $x = y^3$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$;

h) $x = y^3$, $x = y$.

108. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomok területét.

a) $y^2 = 1 - x$, $\qquad x + 3 = 0$;

b) $4y = x^2$, $\qquad 4x = y^2$;

c) $y^2 + 2 = x$, $\qquad 2y^2 = x$;

d) $y = \sqrt{x - 2}$, $\qquad y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, $y = 0$.

***109.** Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő egyenletű görbéket! Mekkora területű síkidomot fognak közre?

a) $y^2 = x^3$, $\qquad x = 4$;

b) $y^2 = (x - 4)^3$, $\qquad x = 8$;

c) $(y - 4)^2 = x^3$, $\qquad x = 4$;

d) $(y - 4)^2 = (x - 4)^3$, $\qquad x = 8$.

110. Mekkora területű síkidomokat határolnak az alábbi egyenletű görbék?

a) $y = 2x^3$, $\quad y = \sqrt{\dfrac{x}{8}}$;

b) $y = 2 - x^2$, $\quad x^2 = y^3$;

c) $y = 4 - x^3$, $\quad y = 3x^3$, $x = -1$;

d) $y = x^2$, $\quad y = x^3$.

III.

111. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által határolt síkidomok területét.

a) $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$;

b) $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$, $\quad x = 0$;

c) $y = \sin x$, $\quad y = \cos x$, $\quad x = \pi$;

d) $y = \sin x$, $\quad y = \sin 2x$.

112. Mekkora területű síkidomot fog közre az

$$f\colon [0;\, \pi] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2} \sin 2x$$

és a

$$g\colon [0;\, \pi] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sin x(1 + \cos x)$$

függvény grafikonja?

113. Válasszuk meg a c valós számot úgy, hogy az $y = f(x)$ egyenletű görbe és az x tengely 10 egység területű síkidomot fogjon közre.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = c - x^2$;

b) $D_f = [0;\, \pi]$, $\quad f(x) = c \sin x$;

c) $D_f = [0;\, +\infty[$, $\quad f(x) = cx - x^2$;

d) $D_f = [0;\, +\infty[$, $\quad f(x) = c^2x - cx^2$.

114. Egy parabola illeszkedik az origóra, tengelypontja a $T(2; 5)$ pont, tengelye merőleges az x tengelyre. Mekkora területű síkidomot fog közre a parabola, a parabola tengelye és az x tengely?

***115.** Az $x^2-9x+y+8=0$ egyenletű parabolát az $y=1-x$ egyenletű egyenes az $A(1; 0)$ és a $B(b_1; b_2)$ pontban metszi.

a) Mekkora területű síkidomot fog közre az AB szakasz és az AB parabolaív?

b) Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a prabola A-beli érintője, az AB egyenes és az $x=b_1$ egyenletű egyenes határoz meg?

c) Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a parabola A-beli és B-beli érintője, valamint az AB egyenes határoz meg?

***116.** Az $x^2+ax+by+c=0$ egyenletű parabola illeszkedik az origóra és a $P(6; 1)$ pontra, a P-beli érintő iránytangense -1.

a) Határozzuk meg a-t, b-t és c-t.

b) Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a parabola, a P-beli érintő és az y tengely fog közre?

c) Mekkora területű síkidomot fog közre ez a parabola és az $y=x$ egyenletű egyenes?

117. Az $x^2-8x+y+7=0$ egyenletű parabola, a 2 abszcisszájú pontjához tartozó érintő és az x tengely két síkidomot fog közre. Számítsuk ki mindkettőnek a területét.

118. Számítsuk ki annak a kisebbik síkidomnak a területét, amelyet az $x^2-9x+y+8=0$ egyenletű parabola, az x_0 abszcisszájú pontjához tartozó érintő és az x tengely fog közre, ha

a) $x_0=7$; *b)* $x_0=5$; *c)* $x_0=4{,}5$; *d)* $x_0=2$.

119. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy az x tengely helyett az y tengelyt szerepeltetjük!

120. Az $x^2-6x+y+5=0$ egyenletű parabolához az x tengelyre illeszkedő pontjaiban érintőket húzunk. Mekkora a parabola és a két érintő által közrefogott síkidom területe?

121. Mekkora területű síkidomot fog közre az $x-2y+2=0$ egyenletű egyenes és az a $T(0; 5)$ tengelypontú parabola, amelynek a tengelye párhuzamos az x tengellyel és egyik pontja a $P(4; 3)$ pont?

***122.** Az $x^2+ax+by+c=0$ egyenletű parabola illeszkedik az $O(0;0)$ és az $A(6;0)$ pontra; az O-beli érintő iránytangense 1. A parabola 5 abszcisszájú pontja B.

a) Határozzuk meg a-t, b-t és c-t.

b) Mekkora a parabola és az OB egyenes által közrefogott síkidom területe?

c) Mekkora területű háromszöget fog közre az OB egyenes, a parabola O-beli és B-beli érintője?

123. Az $x^2-8x-y+15=0$ egyenletű parabola az x tengelyt a k és az l ($k, l \in \mathbb{R}$, $k<l$) abszcisszájú pontokban metszi.

a) Határozzuk meg a parabola $\frac{k}{2}$ abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét!

b) Mekkora területű síkidomot fog közre ez az érintő, az x tengely és a parabola?

c) Mekkora területű síkidomot fog közre ez az érintő, az y tengely és a parabola?

***124.** Az $x^2+ax+by+c=0$ egyenletű parabola az x tengelyt az $O(0;0)$ és az A pontban metszi, tengelypontja a $T(3;2)$ pont.

a) Határozzuk meg a parabola O-beli és A-beli érintőjének az M metszéspontját!

b) Mekkora az OAM háromszög területe?

c) Mekkora az OM szakasz, az AM szakasz és az OA parabolaív által határolt síkidom területe?

***125.** Egy parabola tengelye párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontja a $T(2;5)$, egyik pontja az $A(4;0)$ pont. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a parabolához a -2, illetve a 4 abszcisszájú pontjában húzott érintő és a parabola zár közre?

126. Két parabola illeszkedik az $A(-2;3)$ és a $B(4;3)$ pontra, tengelyük párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontjuk ordinátája 6, illetve 1. Mekkora az általuk közrefogott síkidom területe?

127. Két parabola illeszkedik a $P\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ és a $Q\left(3;\frac{5}{2}\right)$ pontra, tengelyük párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontjuk ordinátája $\frac{13}{2}$, illetve 4. Mekkora az általuk közrefogott síkidom területe?

*128. Az $y = ax^2+bx+c$ egyenletű parabola az y tengelyt a $P(0;\ -10)$ pontban metszi, az $y = 3x^2$ egyenletű parabolát pedig az $E(1;\ 3)$ pontban érinti. Mekkora területű síkidomot zár közre ez a két parabola és az x tengely?

129. Adjuk meg a k^2 számot úgy, hogy az $y = k^2-4x^2$ és az $y = 1-\dfrac{4x^2}{k^2}$ egyenletű parabola közül az egyik háromszor akkora területű síkidomot fogjon közre az x tengellyel, mint a másik.

130. Válasszuk meg a k számot úgy, hogy az $y = x^2+3x+4k$ és az $y = kx^2+3x+4$ egyenletű parabola T területű síkidomot fogjon közre, ha

a) $T=32$; *b)* $T = 5\frac{1}{3}$, *c)* $T=10$; *d)* $T=1$.

*131. Válasszuk meg a $k<2$ számot úgy, hogy az x^3+3x^2-5x+ $+y = 10$, az $x^3+3x^2+y = 20$ és az $x=k$ egyenletű görbék 2,5 egységnyi területű síkidomot fogjanak közre.

132. Az $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^3-9x^2+23x-15$ függvény egyik zérushelye 1. Mekkora területű síkidomot határol az f függvény grafikonja és az x tengelynek az f másik két zérushelye közötti szakasza?

133. Az $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x^3-3x+3$ függvény minimumhelye k, maximumhelye l. Mekkora területű síkidomot fog közre az x tengely, az $x=k$, az $x=l$ egyenletű egyenes és az $y = f(x)$ egyenletű görbe?

134. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \dfrac{1}{x^2}$ egyenletű görbe, az $x=k$, az $x=l$ és az $y=0$ egyenletű egyenes fog közre?

a) $k=1$, $l=4$; *c)* $k=0{,}25$, $l=1$;

b) $k=1$, $l=10^6$; *d)* $k=10^{-6}$, $l=1$.

135. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \dfrac{1}{x^3}$ egyenletű görbe, az $x=k$, az $x=l$ és az $y=0$ egyenletű egyenes fog közre?

$a)$ $k=1$, $l=4$; $c)$ $k=0{,}25$, $l=1$;

$b)$ $k=1$, $l=10^6$; $d)$ $k=10^{-6}$, $l=1$.

136. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe, az $x=k$, az $x=l$ és az $y=0$ egyenletű egyenes fog közre?

III.

$a)$ $k=1$, $l=4$; $c)$ $k=0{,}25$, $l=1$;

$b)$ $k=1$, $l=10^6$; $d)$ $k=10^{-6}$, $l=1$.

137. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ egyenletű görbe, az $x=k$, az $x=l$ és az $y=0$ egyenletű egyenes fog közre?

$a)$ $k=1$, $l=4$; $c)$ $k=0{,}25$, $l=1$;

$b)$ $k=1$, $l=10^6$; $d)$ $k=10^{-6}$, $l=1$.

***138.** Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az alábbi egyenletekkel megadott görbék fognak közre.

$a)$ $y = e^x$, $x=0$, $x=5$, $y=0$;

$b)$ $y = e^x$, $x=\ln 2$, $x=\ln 25$, $y=0$;

$c)$ $y = e^x$, $x=\ln\frac{1}{4}$, $x=-\ln 2$, $y=0$;

$d)$ $y = xe^{x^2}$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$;

$e)$ $y = xe^{x^2}$, $x=0$, $x=\ln 15$, $y=0$;

$f)$ $y = (1+x)e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;

$g)$ $y = \left(\frac{1}{7}+\frac{x}{7}\right)e^x$, $x=\ln 2$, $x=\ln 8$, $y=0$;

$h)$ $y = (2x+3)e^{x^2+3x}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

5. Térfogatszámítási feladatok

139. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenletű görbékkel határolt síkidomot. Mekkora a síkidom területe és mekkora a keletkező forgástest térfogata?

a) $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 5;$

b) $y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad x = 5;$

c) $y = x^3, \quad y = 2x^3, \quad x = 5;$

d) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x = 5.$

140. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenletű görbékkel határolt síkidomot. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

a) $y = 3x^2, \quad y = 2x;$

b) $y = \frac{1}{4}x^2, \quad x+2y = 12, \quad x = 0;$

c) $y = 2-\frac{1}{4}x^2, \quad y = 0;$

d) $y = -x^2, \quad x+y+2 = 0.$

141. Mekkora térfogatú forgástest keletkezik, ha az alábbi egyenletű görbék által közrefogott síkidomot megforgatjuk az x tengely körül?

a) $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1;$

b) $y = x^3, \quad y = x;$

c) $y = \frac{1}{8}x^3, \quad y = x;$

d) $y = \frac{1}{8}x^3, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$

e) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$

$f)\ y = \dfrac{1}{x}, \qquad y = \dfrac{6}{x}, \qquad x=1, \qquad x=6;$

$g)\ y = \dfrac{1}{x+2}, \qquad y = \dfrac{6}{x+2}, \qquad x=-1, \qquad x=4;$

$h)\ y = \dfrac{1}{x}+2, \qquad y = \dfrac{6}{x}+2, \qquad x=1, \qquad x=6.$

III.

142. Ábrázoljuk az

$$f\colon [0;\,14] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 3-|x-3|, \text{ ha } x \in [0;\,4] \\ 6-|x-8|, \text{ ha } x \in \,]4;\,14] \end{cases}$$

függvényt.

a) Mekkora az $y = f(x)$ egyenletű görbe és az x tengely által határolt síkidom területe?

b) Mekkora a fenti síkidom x tengely körüli forgatásával létrejött test térfogata?

143. Forgassuk meg a következő egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomot az x tengely körül, és számítsuk ki az előálló forgástest térfogatát.

$a)\ y = \sin x, \qquad y = 2\sin x, \qquad (x \in [\pi\ 2\pi]);$

$b)\ y = \sin x, \qquad y = 3\sin x \qquad (x \in [\pi;\, 2\pi]);$

$c)\ y = \cos x, \qquad y = 2\cos x, \qquad \left(x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right]\right);$

$d)\ y = \cos x, \qquad y = 5\cos x, \qquad \left(x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right]\right);$

$e)\ y = \sin x, \qquad y = \sin 2x, \qquad \left(x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{2}\right]\right);$

$f)\ y = \sin x + 1, \qquad y = \sin 2x, \qquad x=0, \qquad x = \dfrac{\pi}{2};$

$g)\ y = \cos x, \qquad y = \cos 2x, \qquad x = \dfrac{\pi}{4}, \qquad \left(x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]\right);$

h) $y = 2\cos x, \qquad y = \cos 2x, \qquad x = \frac{\pi}{4}, \qquad x = -\frac{\pi}{4}.$

144. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a parabolaszeletet, amelyet az $y = 18 - \frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabola és az $y = k$ egyenletű egyenes fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

a) $k=0$; *b)* $k=2$; *c)* $k=10$; *d)* $k=16$?

145. Forgassuk meg az x tengely körül azt a parabolaszeletet, amelyet az x tengely és az $y = ax - x^2$ egyenletű parabola fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

a) $a=10$; *b)* $a=4$; *c)* $a=1$; *d)* $a=\frac{5}{6}$?

146. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet az $y = x^3 + 8$ egyenletű görbe és a két koordinátatengely által határolt síkidom
a) x tengely körüli; *b)* y tengely körüli
forgatásával kapunk?

147. Az $y = \frac{6}{x}$ egyenletű görbe két pontja: $P(1; p)$ és $Q(4; q)$. Forgassuk meg
a) az x tengely körül; *b)* az y tengely körül
azt a síkidomot, amelyet az adott görbe és a PQ szakasz határol. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

148. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $y=x^2$ és az $y=\sqrt{x}$ egyenletű görbe által határolt síkidom
a) x tengely körüli; *b)* y tengely körüli
forgatásával keletkezik?

149. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $y = \frac{1}{2}x^2$ és az $y=\sqrt{x}$ egyenletű görbe által határolt síkidom

a) x tengely körüli; *b)* y tengely körüli
forgatásával keletkezik?

150. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; \pi] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{\sin x}$$

függvény grafikonja és az x tengely $[0; \pi]$ szakasza határol. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

III.

151. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; k] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sin x$$

függvény grafikonja, az x tengely $[0; k]$ szakasza és az $x=k$ egyenletű egyenes fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

a) $k=\frac{\pi}{4}$; *b)* $k=\frac{\pi}{2}$; *c)* $k=\frac{3\pi}{4}$; *d)* $k=\frac{5\pi}{6}$?

152. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; \pi] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

függvény grafikonja és a két koordinátatengely fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

153. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ egyenletű ellipszis

a) x tengely körüli; *b)* y tengely körüli
forgatásával létrejövő forgástest térfogatát.

154. Forgassuk meg a $2a$ nagytengely-, illetve $2b$ kistengelyhosszúságú ellipszist a nagytengelyének az egyenese körül. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

a) $a=5$, $b=4$; *c)* $a=60$, $b=30$;

b) $a=5$, $b=3$; *d)* $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{2}$?

155. Az $x^2-y^2 = 25$ egyenletű hiperbola és az $x=13$ egyenletű egyenes egy síkidomot fog közre. Mekkora térfogatú test keletkezik, ha ezt a síkidomot megforgatjuk az

a) x tengely körül; *b)* y tengely körül?

156. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott síkidomokat, és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

a) $y^2 \leqq 10x, \quad x \leqq 10;$

b) $x^2+y^2 \leqq 25,$

c) $xy \leqq 10, \quad 1 \leqq x \leqq 10, \quad y \geqq 0;$

d) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} \geqq 1, \quad 4 \leqq x \leqq 5.$

157. Az x tengely $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ szakasza, az $x = \dfrac{\pi}{4}$ egyenletű egyenes és az $y=f(x)$ egyenletű görbe egy síkidomot zár közre. Forgassuk meg ezt a síkidomot az x tengely körül és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

a) $D_f = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \qquad f(x) = \operatorname{tg} x;$

b) $D_f = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \qquad f(x) = \operatorname{tg} x \cos x;$

c) $D_f = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \qquad f(x) = \operatorname{tg} x \cos^2 x;$

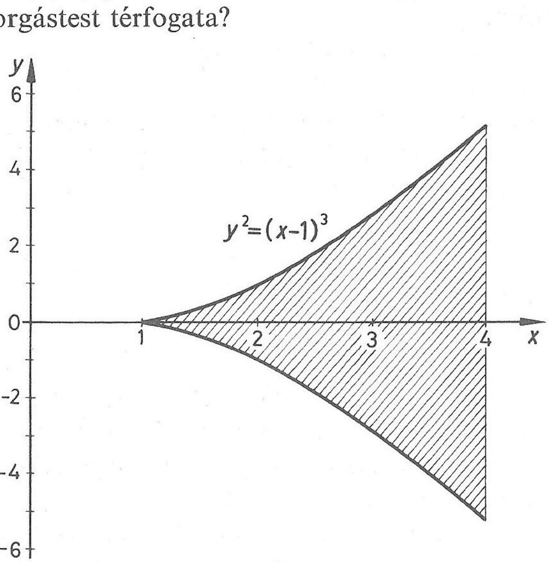
d) $D_f = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \qquad f(x) = \operatorname{tg} x \sin x.$

158. Forgassuk meg az $y^2=x^3$ egyenletű görbe és az $x=1$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot

a) az x tengely körül; *b)* az y tengely körül,

és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

159. Forgassuk meg az $y^2 = (x-1)^3$ egyenletű görbét *(6. ábra)* az x tengely körül, majd a keletkező felületet metsszük el az x tengelyre a $P(4; 0)$ pontban állított merőleges síkkal. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?



6. *ábra*

160. Forgassuk meg az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemzett síkidomokat az y tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgástestek térfogatát.

a) $y^2 \leqq 6x, \quad 0 \leqq x \leqq 2;$

b) $y^2 \leqq 4-x, \quad x \geqq 0;$

c) $x^2 \geqq y^2, \quad 0 \leqq x \leqq 4;$

d) $x^2 \geqq y^2, \quad -4 \leqq x \leqq -2.$

***161.** Forgassuk meg az $y^2 = 24x$ és az $x = 6$ egyenletű görbékkel határolt síkidomot

a) az x tengely;

b) az y tengely;

c) az $y=12$ egyenletű egyenes;
d) az $x=6$ egyenletű egyenes
körül, és számítsuk ki az előálló forgástest térfogatát.

162. A cosinusgörbe és az $y=-1$ egyenletű egyenes a $[-\pi; \pi]$ intervallumon egy síkidomot fog közre.
a) Mekkora e síkidom területe?
b) Forgassuk meg e síkidomot az $y=-1$ egyenletű egyenes körül és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát!

***163.** Forgassuk meg az $y^2 = 4(2-x)$ egyenletű parabola és az y tengely által határolt síkidomot
a) az x tengely;
b) az y tengely;
c) az $y=\sqrt{8}$ egyenletű egyenes;
d) az $x=2$ egyenletű egyenes
körül, és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

164. Egy téglalap oldalainak hossza a és b. Megforgatjuk a téglalapot az egyik, majd a másik oldal egyenese körül. Hogyan aránylik egymáshoz a két előálló test térfogata?

165. Egy derékszögű háromszög befogóinak a hossza a és b. Megforgatjuk a háromszöget az egyik, majd a másik befogó egyenese körül. Hogyan aránylik egymáshoz a két előálló test térfogata?

166. Egy a alapú, h magasságú parabolaszeletet megforgatunk
a) a tengelye körül;
b) az alapegyenese körül;
c) a csúcsérintője körül;
d) egy, a síkjában a tengelytől $\frac{a}{2}$ távolságra levő egyenes körül.

Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

167. Egy forgásparaboloidból a tengelyére merőleges, a tengelyponttól h távolságra lévő sík R sugarú kört metsz ki. Számítsuk ki a keletkező test térfogatát, ha

a) $h=4, \quad R=2;$

b) $h=6, \quad R=12;$

c) $h=3, \quad R=3;$

d) $h=10, \quad R=1.$

168. Egy vízzel telt, forgáshenger alakú pohárba tengelypontjával lefelé olyan forgásparaboloidot állítanak, amelynek r cm-es sugara és h cm-es magassága megegyezik a poháréval. Mennyi víz marad a pohárban, ha

a) $h=10, \quad r=5;$

b) $h=12, \quad r=3;$

c) $h=16, \quad r=8;$

d) $h=20, \quad r=2.$

III.

169. Számítsuk ki az r cm sugarú gömb h cm magasságú szeletének a térfogatát, ha

a) $r=10, \quad h=3;$

b) $r=10, \quad h=10;$

c) $r=10, \quad h=17;$

d) $r=4{,}6, \quad h=2{,}3.$

170. Az $x^2+y^2 \leqq 81$ egyenlőtlenséggel megadott körlemezt az $x=\pm 3$ egyenletű egyenesek három részre bontják. Forgassuk meg mindhármat az x tengely körül. Mekkora az egyes részek térfogata?

171. Az $x^2+y^2 \leqq 100$ egyenlőtlenséggel megadott körlemezt az $x=\pm 2$ és az $x=\pm 6$ egyenletű egyenesek öt részre osztják. Forgassuk meg valamennyit az x tengely körül. Mekkora a keletkező gömbszeletek és gömbrétegek térfogata?

172. Forgassuk meg az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ egyenletű ellipszis, az $x=k$ és az $x=l$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot az x tengely körül. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

a) $k=0, \quad l=2;$

b) $k=0, \quad l=3;$

c) $k=2, \quad l=3;$

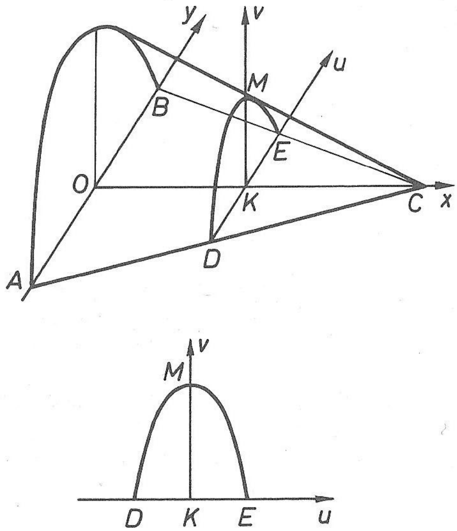
d) $k=-2, \quad l=1?$

173. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a; $b\in\mathbf{R}^+$) egyenletű ellipszisnek

a) a nagytengely egyenese; *b)* a kistengely egyenese

körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata?

***174.** A 7. *ábrán* lévő testnek az $x-y$ koordinátasíkban levő lapja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 21 cm, az ehhez tartozó magassága 30 cm hosszúságú. A test keresztmetszetei parabolaszeletek. (Valamennyi ugyanolyan széles mint amilyen magas, vagyis az MK és a DE szakasz egyenlő hosszúságú.) Határozzuk meg a test térfogatát.



7. *ábra*

***175.** Egy test alap-, illetve fedőlapja egy koordináta-rendszer abszcisszatengelyére az $A(1;\ 0)$, illetve a $B(3;\ 0)$ pontban állított merőleges síkban van; az ezekkel párhuzamos síkmetszetek területe fordítottan arányos a sík és az origó távolságának a négyzetével. A 2 abszcisszához tartozó síkmetszet területe 27. Mekkora a test térfogata?

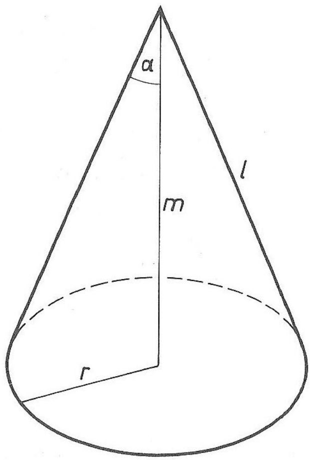
6. Forgásfelületek felszíne

176. Számítsuk ki a 8. *ábrán* látható forgáskúp felszínét, ha

a) $r=3$, $m=4$; *c)* $l=18$, $\alpha=30°$;

b) $r=7$, $l=25$; *d)* $l=29$, $m=20$.

III.



8. *ábra*

177. Forgassuk meg a

$$[0;\ 14]\to\mathbf{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}3-|x-3|, & \text{ha}\quad x\in[0;\ 4]\\ 6-|x-8|, & \text{ha}\quad x\in\,]4;\ 14]\end{cases}$$

függvény grafikonját az x tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét.

178. Forgassuk meg az x tengely körül az

$$f\colon [0;\ 8]\to\mathbf{R},\qquad x\mapsto 2\sqrt{x}$$

függvény grafikonját. Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét az

$$A = 2\pi \int_a^b x \mapsto f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$$

képletnek megfelelően.

179. Forgassuk meg az x tengely körül az

$$f: \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto x^3$$

függvény grafikonját. Mekkora a keletkező forgásfelület felszíne?

180. Forgassuk meg az $x^2+y^2 = r^2$ egyenletű kört az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkező gömb felszínét a forgásfelületekre vonatkozó képlet felhasználásával.

181. Számítsuk ki egy 12 cm sugarú gömb 3 cm magasságú gömbsüvegének a felszínét.

182. Forgassuk meg az x tengely körül az $x^2+y^2 = 100$ egyenletű körnek az $x \in [a;\ b]$ intervallumhoz tartozó ívét. Számítsuk ki az előálló gömböv felszínét, ha

a) $a=0$, $b=4$; *c)* $a=-3$, $b=1$;

b) $a=4$, $b=8$; *b)* $a=-9$, $b=-5$.

***183.** Vezessünk le képletet adott gömböv és gömbsüveg felszínének kiszámítására.

7. Az integrálszámítás fizikai alkalmazásai

184. Egy egyenes pályán mozgó pont sebességfüggvénye

$$v: [0;\ 10] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 8t+10.$$

Mekkora utat tesz meg ez a pont? (Az időt s-ban, a sebességet m/s-ban mérjük.)

185. Egy egyenes pályán mozgó pont sebességfüggvénye

$$v: [0;\ 12] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 5-gt,$$

ahol g (m/s^2) a nehézségi gyorsulás, az időt s-ban, a kitérést m-ben mérjük. Mekkora a pont kitérése?

186. Egy pont a [0; 20] időintervallumban egyenes vonalú mozgást végez, sebessége minden egyes t időpontban $12-2t$.

a) Melyik időpontban maximális a pontnak a kezdőponttól való távolsága?

b) Mekkora ez a maximális távolság?

187. Egy egyenes pályán mozgó test sebességfüggvénye:

$$v\colon [0;\,60] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto t^2-3t+5,$$

a 0 időpontban a kitérés 8. Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.

188. Határozzuk meg annak az egyenes vonalú mozgásnak az s kitérésfüggvényét, amelynél v a sebességfüggvény, és a mozgás időtartama a [0; 20] intervallum, ha

a) $s(0)=25, \quad v(t) = 7;$

b) $s(0)=10, \quad v(t) = 5+2t;$

c) $s(6)=13, \quad v(t) = \dfrac{13}{5} - \dfrac{t}{5};$

d) $s(0)=0, \quad v(t) = t^2-2t.$

189. Egy pont egyenes pályán mozog a [−10; 10] időintervallumban. Kitérésfüggvénye az s, sebességfüggvénye a v. Határozzuk meg az s függvényt, ha

a) $s(0)=0, \quad v(t) = 2t-1;$

b) $s(-10)=0, \quad v(t) = 5-\dfrac{1}{2}t;$

c) $s(1)=5{,}3, \quad v(t) = 2{,}4t^2-6t+1;$

d) $s(2)=50, \quad v(t) = 12–16t^3.$

190. Egy egyenes pályán a [0; 15] időintervallumban a v sebességfüggvény szerint mozgó pont kitérésfüggvénye s. Mekkora a 2 és a 12 időpontbeli helyzet távolsága, ha *a)* $s(1)=-1$, $v(t) = 2t-2$;

b) $s(6)=2$, $v(t) = 14-2t$;

c) $s(2)=7$, $v(t) = 3t^2$;

d) $s(7)=-5$, $v(t) = 0{,}4t-2{,}8$.

191. Melyik felesleges az előző feladat adatai közül?

192. Egy pont egyenes pályán a [0; 20] időintervallumban 8 m/s^2 gyorsulással mozog, kezdősebessége 100 m/s. A 10 s időpontban a kezdőponttól 800 m távolságra van.

a) Írjuk fel a mozgás sebességfüggvényét.
b) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.
c) Mely időpontokban 0 a kitérés?
d) Mekkora a [7; 18] időintervallumhoz tartozó kitérés?

193. Egy pont a [0; 20] időintervallumban egyenes pályán mozog, kitérésfüggvénye s, sebességfüggvénye v, gyorsulásfüggvénye

$$a\colon [0; 20]\to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto kt+l.$$

Határozzuk meg az s és a v függvényt, ha

a) $k=0$, $l=3$, $s(0)=0$, $v(0)=0$;

b) $k=4$, $l=0$, $s(0)=5$, $v(0)=0$;

c) $k=6$, $l=4$, $s(0)=5$, $v(0)=-10$;

d) $k=-36$, $l=20$, $s(0)=200$, $v(0)=75$.

194. Egy egyenes pályán, a

$$v\colon [t_0; 4\pi]\to \mathbf{R}, \qquad t\mapsto -4\sin t$$

sebességfüggvénnyel mozgó pont az időmérés kezdetekor 2 m távolságra volt kiindulási helyétől.

a) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét!
b) Határozzuk meg a t_0 számot, ha $-\pi<t_0<0$.
c) Mekkora a pont maximális kitérése?
d) Mekkora a kezdő és a véghelyzet távolsága?

195. Egy egyenes pályán a

$$v\colon [0; 3]\to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 9t^2+4$$

sebességfüggvénnyel mozgó pont a 2 s időpontban a kiindulási ponttól 24 m távolságra volt.

a) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.

b) Határozzuk meg a gyorsulásfüggvényt.

c) Mekkora a pont maximális kitérése?

d) Mekkora a kezdő és a véghelyzet távolsága?

196. A 9. *ábrán* látható függőleges lemez ϱ sűrűségű folyadékba merül. Számítsuk ki a rá ható hidrosztatikai nyomóerőt az

$$F = \varrho g \int_a^b x \mapsto xf(x)$$

képlettel, ha a folyadék felszínét a koordináta-rendszer y tengelye jelzi, és

a) $\varrho g = 10, \quad a = 0, \quad b = 6, \quad f(x) = x+2;$

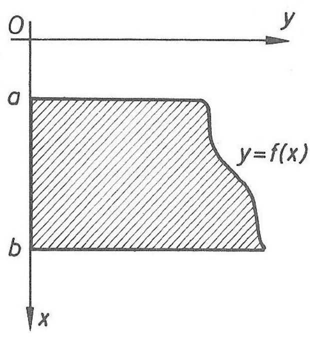
b) $\varrho g = 10, \quad a = 2, \quad b = 6, \quad f(x) = x+2;$

c) $\varrho g = 12, \quad a = 1, \quad b = 4, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2;$

d) $\varrho g = 12, \quad a = 1, \quad b = 4, \quad f(x) = \sqrt{x};$

e) $\varrho g = 10, \quad a = 1, \quad b = 6, \quad f(x) = \frac{6}{x};$

f) $\varrho g = 10, \quad a = 0, \quad b = 6, \quad f(x) = x^2 - 6x + 10;$



9. *ábra*

g) $\varrho g = 10$, $a=0$, $b=6$, $f(x) = 6x - x^2$;

h) $\varrho g = 10$, $a=0$, $b=6$, $f(x) = \sqrt{36-x^2}$.

197. Egy téglalap úgy merül vízbe, hogy az a hosszúságú oldala a víz felszínén van, a b hoszúságú pedig függőleges.

a) Mekkora a téglalapra ható hidrosztatikai nyomóerő?

b) Bontsuk a téglalapot két részre a függőleges középvonalával. Mekkora a két részre ható nyomóerő?

c) Bontsuk a téglalapot két részre a vízszintes középvonalával! Mekkora a két részre ható nyomóerő?

d) Bontsuk a téglalapot két részre az egyik átlójával! Mekkora a két részre ható nyomóerő?

e) Bontsuk a téglalapot négy részre a két átlójával! Mekkora az egyes részekre ható nyomóerő?

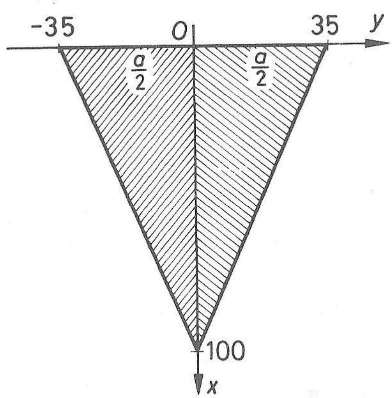
f) Bontsuk a téglalapot nyolc részre az átlóival és a középvonalaival! Mekkora az egyes részrekre ható nyomóerő?

g) Bontsuk fel a téglalapot egy vízszintes egyenessel két részre úgy, hogy a részekre egyenlő hidrosztatikai nyomóerő hasson.

h) Ellenőrizzük, hogy a fenti esetekben a hidrosztatikai nyomóerő egyenlő a súlypont mélységének és a területnek a szorzatával.

198. Számítsuk ki azt a nyomóerőt, amelyet a víz gyakorol egy 8 m széles, 6 m magas, téglalap alakú zsilipkapura, ha a víz

a) a kapu felső széléig ér; *b)* a kapu fele magasságáig ér.

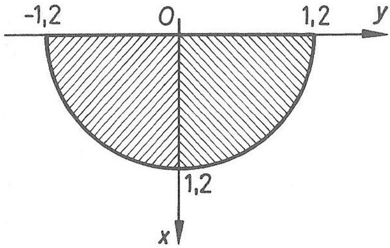


10. *ábra*

199. Mekkora erővel nyomja a víz azt a függőleges, egyenlő szárú háromszöget, amelynek a 70 cm-es alapja a víz felszínén van, magassága pedig 1 m (10. *ábra*)?

200. Egy félkör alakú függőleges lemez úgy merül a vízbe, hogy 2,4 m-es átmérője a víz felszínén helyezkedik el (11. *ábra*). Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő?

III.

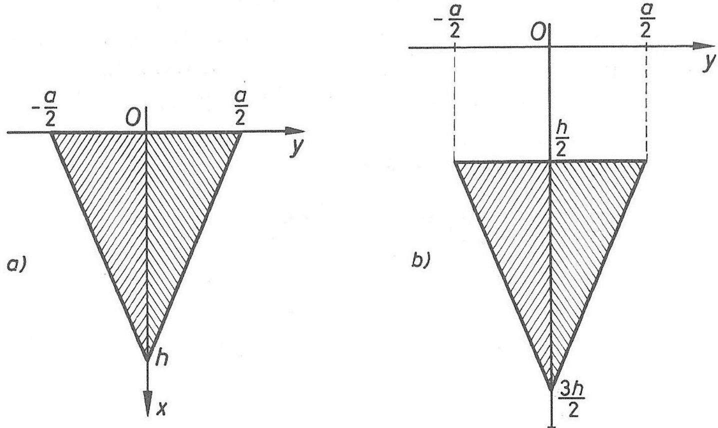


11. *ábra*

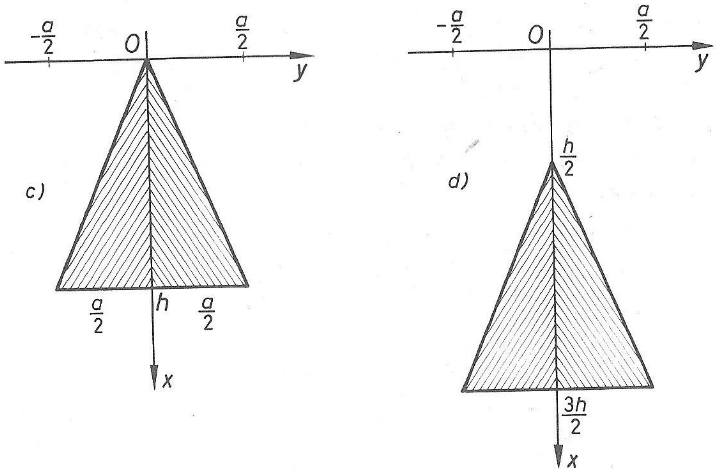
201. Mekkora hidrosztatikai nyomóerő hat az a alapú, h magasságú, egyenlő szárú háromszög alakú függőleges lemezre, amelynek a tengelye merőleges a víz felszínére (12. *ábra*) és

a) alapja a víz felszínén, csúcsa h mélységben van;

b) alapja $\frac{h}{2}$, csúcsa $\frac{3h}{2}$ mélységben van;



12. *ábra*



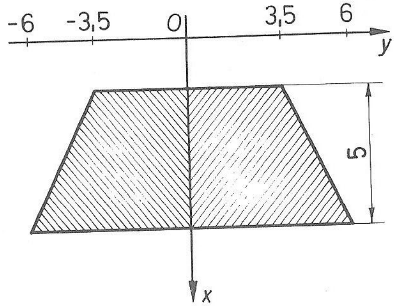
12. *ábra*

c) csúcsa a víz felszínén, alapja h mélységben van;

d) csúcsa $\frac{h}{2}$, alapja $\frac{3h}{2}$ mélységben van?

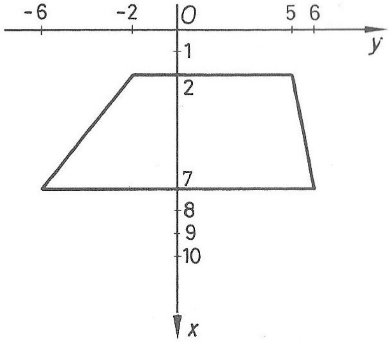
202. Egy víztároló zárófala trapéz alakú, felső alapja 20 m, az alsó 10 m hosszúságú, a trapéz magassága 6 m. Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő, ha a tartály tele van vízzel?

203. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza 7 cm és 12 cm, magassága 5 cm. A trapéz függőlegesen folyadékba merül úgy, hogy a felső, rövidebb alapja 2 cm mélységben van (13. *ábra*). Mekkora a rá ható nyomóerő, ha a folyadék sűrűsége 1,17 kg/dm^3?



13. *ábra*

204. A 14. *ábrán* az y tengely folyadékfelszínt jelez, az x tengely függőleges és az $x-y$ síkban levő trapéz a folyadékba merül (1 egység = 1 dm). Mekkora a rá ható nyomóerő, ha a folyadék sűrűsége 1,17 kg/dm³?



14. *ábra*

205. Egy félellipszis úgy merül függőlegesen a vízbe, hogy 4 cm-es kistengelye a víz felszínén van. Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő, ha az ellipszis nagytengelyének hossza 8 cm?

206. Egy benzintartály álló henger alakú, átmérője 3 m, magassága 3,5 m. Mekkora a tartály alap- és oldalfalára ható nyomóerő, ha a benzin sűrűsége 700 kg/m³ és a benzinoszlop magassága

a) 1 m; *b)* 2 m; *c)* 3 m; *d)* 3,5 m?

207. Egy anyagi pont az F erő hatása alatt az x tengelyen x_1-ből x_2-be mozdul el. F az $[x_1; x_2]$-on nemnegatív és folytonos. Számítsuk ki a végzett munkát a

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F$$

képlet alapján, ha

a) $D_F = \mathbf{R}$, $F(x) = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 24$;

b) $D_F = \mathbf{R}^+$, $F(x) = x$; $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;

c) $D_F = \mathbf{R}$, $F(x) = x^2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;

d) $D_F = \mathbf{R}$, $F(x) = x^2$; $x_1 = -10$, $x_2 = 10$;

e) $D_F=\mathbf{R}^+$, $F(x) = x^3$; $x_1=1$, $x_2=10$;

f) $D_F=[-30; 10]$, $F(x) = x+30$; $x_1=-5$, $x_2=5$;

g) $D_F=[-2,8]$, $F(x) = 16+6x-x^2$; $x_1=-2$, $x_2=8$;

h) $D_F=[-4; 1]$, $F(x) = 4-3x-x^2$; $x_1=-4$, $x_2=1$.

208. Egy pont az x tengelyen x_1-től x_2-ig mozog, az F erő hat rá. Mekkora a végzett munka, ha

a) $D_F=]0; 3]$, $F(x) = 8x+\dfrac{5}{x^2}$; $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$;

b) $D_F=[0; \pi]$, $F(x) = 10\sin x$; $x_1=0$, $x_2=\pi$;

c) $D_F=\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $F(x) = 3\sin x\cos x$; $x_1=\pi$, $x_2=\dfrac{3\pi}{2}$;

d) $D_F=[-\pi; \pi]$, $F(x) = |x|+\sin x$; $x_1=-\pi$, $x_2=\pi$?

209. Egy anyagi pont az x tengelyen az

$$F\colon [0,2; 10]\to\mathbf{R}, \qquad x\mapsto 3\sqrt{5x-1}$$

erő hatása alatt mozog. Mekkora a végzett munka, amíg a pont x_1-ből az x_2-be mozdul el, ha

a) $x_1=0,2$, $x_2=1$;

b) $x_1=1$, $x_2=2$;

c) $x_1=2$, $x_2=5$;

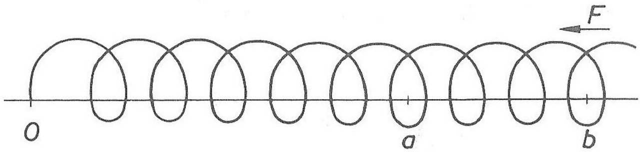
d) $x_1=2$, $x_2=10$?

***210.** Egy fémrugó összenyomásához szükséges erő arányos a rugó rövidülésével. Mekkora munkát végzünk, ha 30 cm-rel nyomjuk össze azt a rugót, amelynél a szükséges erő minden 2 cm rövidülés után 50 N-nal nő?

***211.** Mekkora munkát végzünk, ha 4 cm-rel nyújtunk meg egy olyan rugót, amely 10 N terhelés hatására 1 cm-rel nyúlik meg?

***212.** Mekkora munkát végzünk, ha 6 cm-rel nyújtunk meg egy olyan rugót, amelyet 2 N erő 1 cm-rel nyújt meg?

***213.** Egy rugó O végpontját rögzítettük, a másik végén levő tömegpontot a rugó az O pont felé húzza (15. *ábra*). A húzóerő arányos az O-tól való távolsággal. Mekkora munka szükséges ahhoz, hogy a pontnak az O-tól való távolsága b-ről a-ra csökkenjen?



15. *ábra*

***214.** Az e_1 pozitív és az e_2 negatív elektromos töltés távolsága r, a közöttük levő vonzóerő $F(r) = k\frac{e_1 e_2}{r^2}$ $(k \in \mathbb{R})$. Mekkora a végzett munka, miközben a két töltés távolsága r_1-ről r_2-re csökken?

215. Mekkora munka szükséges ahhoz, hogy egy, a Föld felszínén levő m tömegű testet sugárirányban a Földtől $\frac{R}{k}$ távolságra elmozdítsunk, ha R a Föld sugara? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el.)

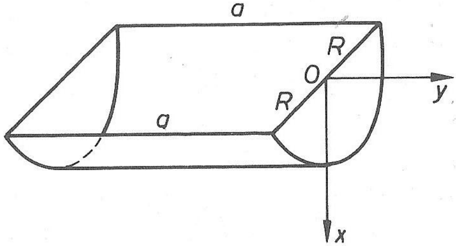
a) $k=10^6$; *b)* $k=10^3$; *c)* $k=2$; *d)* $k=1$.

***216.** Mekkora munkát végzünk, ha egy R sugarú félgömbből kiszivattyúzzuk a vizet?

***217.** Egy henger alakú víztartály átmérője 1 m, a víz 2,8 m magasan áll benne. A vízkivezető-nyílás 3 m-rel a víz felszíne fölött helyezkedik el. Számítsuk ki azt a munkát, amellyel a víz a tartályból kiszivattyúzható.

***218.** Mekkora munkát végzünk, amikor egy vízzel telt forgáskúpból kiszivattyúzzuk a vizet, ha a kúp fedőkörének sugara R és a mélysége H?

*219. Egy vályú félbevágott forgáshenger alakú, hossza a, sugara R. Mekkora munkával lehet kiszivattyúzni a vályút megtöltő víz-mennyiséget (16. *ábra*)?



16. *ábra*

*220. Egy vízzel teli katlan forgásparaboloid alakú. Mélysége 0,5 m, fedőkörének sugara 0,4 m. Számítsuk ki a víz kiszivattyúzásához szükséges munkát.

221. Egy vízzel teli, henger alakú edény alapterülete $T=420$ (cm^2), magassága $h=40$ (cm). Az alján t(cm^2) területű nyílás van. Mennyi idő alatt folyik ki a nyíláson az egész vízmennyiség, ha

a) $t=2$; *b)* $t=1$; *c)* $t=10$; *d)* $t=100$?

(Útmutatás: A kifolyási sebességet a $v = \mu\sqrt{2gx}$ képlet adja, ahol x (cm) a folyadékoszlop magassága, μ pedig konstans, amit a folyadék minősége, a nyílás alakja stb. határoz meg. Vegyük itt a $\mu=0,6$ értéket.)

222. Határozzuk meg az f: $[a; b]\to\mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenesek által közrefogott síkidom S $(s_1; s_2)$ súlypontját az

$$s_1 = \frac{\int\limits_a^b x\mapsto xf(x)}{\int\limits_a^b x\mapsto f(x)}, \qquad s_2 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b x\mapsto f^2(x)}{\int\limits_a^b x\mapsto f(x)}$$

képletnek megfelelően, ha

a) $a=0,\quad b=8,\quad f(x)=\frac{1}{2}x+8;$

b) $a=0,\quad b=1,\quad f(x)=x^2;$

c) $a=0,\quad b=1,\quad f(x)=\sqrt{x};$

d) $a=-1,\quad b=1,\quad f(x)=1-x^2.$

223. Határozzuk meg az $y=x^2+1$, $x=a$, $x=b$ és $y=0$ egyenletű görbékkel határolt síkidom súlypontját, ha

a) $a=0$, $b=1$; *c)* $a=2$, $b=3$;

b) $a=1$, $b=2$; *d)* $a=-2$, $b=2$.

224. Hol van az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott síkidom súlypontja?

a) $y\leqq 2x-x^2,\quad y\geqq 0;$ *c)* $y\leqq 4-x^2,\quad y\geqq 0,\quad x\geqq 0;$

b) $y\leqq 4-x^2,\quad y\geqq 0,$ *d)* $y\leqq x^3-1,\quad y\geqq 0,\quad 2\leqq x\leqq 5.$

225. Határozzuk meg egy adott
a) félkör; *b)* negyedkör
súlypontját.

226. Forgassuk meg a koordináta-rendszer abszcisszatengelye körül azt a síkidomot, amelyet az $f\colon [a;b]\to\mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenletű egyenesek fognak közre. Határozzuk meg a keletkező forgástest $S\ (s_1;\ s_2)$ súlypontját az

$$s_1=\frac{\int\limits_a^b x\mapsto xf^2(x)}{\int\limits_a^b x\mapsto f^2(x)},\qquad s_2=0$$

képleteknek megfelelően, ha

a) $a=0,\quad b=8,\quad f(x)=5;$

b) $a=-2,\quad b=10,\quad f(x)=x+4;$

c) $a=1,\quad b=5,\quad f(x)=5-x;$

d) $a=0,\quad b=4,\quad f(x)=\sqrt{x};$

e) $a=0,\quad b=2,\quad f(x)=x^2;$

f) $a=-1,\quad b=0,\quad f(x)=5x^3;$

g) $a=-9,\quad b=3,\quad f(x)=\begin{cases} x+9, & \text{ha } x\in[-9;\,0] \\ 9-x^2, & \text{ha } x\in\,]0;\,3] \end{cases};$

h) $a=0,\quad b=7,\quad f(x)=\begin{cases} 4-|x-2|, & \text{ha } x\in[0;\,3] \\ 5-|x-5|, & \text{ha } x\in\,]3;\,7] \end{cases}.$

227. Határozzuk meg egy forgáskúp súlypontját!

228. Határozzuk meg egy félgömb súlypontját!

229. Határozzuk meg egy félellipszoid súlypontját!

230. Határozzuk meg egy forgásparaboloid súlypontját!

231. Határozzuk meg az f: $[a;\,b]\to\mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenesek által közrefogott, ϱ sűrűségű lemeznek az x, illetve az y tengelyre vonatkozó I_x, illetve I_y tehetetlenségi nyomatékát az

$$I_x=\frac{1}{3}\varrho\int_a^b x\mapsto f^3(x),\qquad I_y=\varrho\int_a^b x\mapsto x^2f(x)$$

képleteknek megfelelően, ha

a) $a=0,\quad b=10,\quad f(x)=4;$

b) $a=3,\quad b=10,\quad f(x)=4;$

c) $a=2,\quad b=9,\quad f(x)=4;$

d) $a=0,\quad b=6,\quad f(x)=x+1;$

e) $a=-1,\quad b=1,\quad f(x)=1-x^2;$

f) $a=0,\quad b=1,\quad f(x)=1-x^2;$

g) $a=0,\quad b=1,\quad f(x)=\sqrt{x};$

h) $a=1,\quad b=4,\quad f(x)=4-|x-3|.$

232. Határozzuk meg egy téglalapnak az oldalegyeneseire vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

233. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúak. Mekkora a háromszögnek

a) a szimmetriatengelyére; *b)* az alapegyenesére

vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

234. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a, illetve b. Mekkora a háromszögnek az egyes befogók egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

235. Egy h magasságú parabolaszelet alapjának a hossza a. Vágjuk el a parabolaszeletet a szimmetriatengelyével. Mekkora a fél parabolaszeletnek az alap egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

236. Forgassuk meg a koordináta-rendszer x tengelye körül azt a síkidomot, amelyet az f: $[a; b]\to\mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenletű egyenesek fognak közre. Határozzuk meg a keletkező, ϱ sűrűségű forgástestnek a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát az

$$I=\frac{\varrho\pi}{2}\int_a^b x\mapsto f^4(x)$$

képlet szerint, ha

a) $a=0$,	$b=10$,	$f(x)=3$;
b) $a=2$,	$b=10$,	$f(x)=3$;
c) $a=0$,	$b=10$,	$f(x)=\frac{1}{5}x$;
d) $a=-1$,	$b=6$,	$f(x)=x+2$;
e) $a=0$,	$b=1$,	$f(x)=\sqrt{x}$;
f) $a=0$,	$b=100$,	$f(x)=\sqrt{x}$;
g) $a=0$,	$b=1$,	$f(x)=x^2$;
h) $a=0$,	$b=1$,	$f(x)=x^3$.

III.

237. Számítsuk ki az r sugarú, h magasságú

a) forgáshengernek;

b) forgáskúpnak;

c) forgásparaboloidnak

a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

238. Igazoljuk, hogy

a) a forgáshengernek;

b) a forgáskúpnak;

c) a forgásparaboloidnak

a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos a test tömegével és a sugár négyzetével.

239. Számítsuk ki az R sugarú gömbnek egy átmérője egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát (ϱ legyen 27).

240. Igazoljuk, hogy egy gömbnek az egyik átmérő egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a tömeg $\frac{2}{5}$ részének és a sugár négyzetének a szorzatával egyenlő.

241. Igazoljuk, hogy ha egy $2a$ nagytengelyű, $2b$ kistengelyű ellipszist a nagytengely egyenese körül megforgatunk, akkor a keletkező testnek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos a test tömegével és a b^2-tel. Számítsuk ki ezt a tehetetlenségi nyomatékot.