*358. Valamely $f\colon \mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ függvényre $f(1)=1$ és minden $a\in\mathbf{Z}$ és $b\in\mathbf{Z}$ esetén

$$f(a-b^2)=f(a)+(b^2-2a)f(b).$$

Mennyi az $f(1987)$?

*359. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto ax+b\quad (a\neq 0),$$

akkor nem lehet az $|f(0)-1|$, az $|f(1)-3|$ és az $|f(2)-9|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

*360. Van-e olyan $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre minden $n\in\mathbf{N}$ esetén

*a)* $f(f(n))=n$;

*b)* $f(f(n))=n+1$;

*c)* $f(f(n))=n+2$;

*d)* $f(f(n))=2n$;

*e)* $f(f(n))=4n$;

*f)* $f(f(n))=n^4$?



# II. FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA, HATÁRÉRTÉKE, DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA



## 1. Folytonos és szakadásos függvények

**1.** Folytonos-e az $f$ függvény a $-2$ helyen?

*a)* $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2}$;

*b)* $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+2}$, ha $x\neq -2$; $f(-2)=0$;

*c)* $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-2\}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+2}$;

*d)* $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+3}$, ha $x\neq -3$; $f(-3)=10$.

**2.** Hol folytonos és hol szakadásos az egészrész-, illetve a törtrész-függvény?

**3.** Hol folytonosak és hol szakadásosak az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények?

*a)* $x\mapsto x+[x]$;

*b)* $x\mapsto [x]+[-x]$;

*c)* $x\mapsto [x]+\sqrt{x-[x]}$;

*d)* $x\mapsto [x]\cdot(x-[x])$.

**4.** Folytonos vagy szakadásos az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0, & \text{ha } |x| = 2{,}5\\ \dfrac{1}{x^2-6{,}25}, & \text{ha } |x| \neq 2{,}5\end{cases}$$

függvénynek a $D$ halmazra való leszűkítése, ha

*a)* $D = \mathbf{R}\setminus\{1; 2; 3\}$;

*b)* $D = \mathbf{Z}$;

*c)* $D = [3; +\infty[$;

*d)* $D = [-3; 2[$?

**5.** Adjuk meg azoknak a valós számoknak a halmazát, amely helyeken az alábbi függvények folytonosak!

*a)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto 2x^2-x+3;$

*b)* $(\mathbf{R}\setminus\{5\})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\dfrac{2x+6}{x-5};$

*c)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{2x+6}{x-5}, & \text{ha } x\neq 5\\ 10, & \text{ha } x=5\end{cases};$

*d)* $[0; +\infty[\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\sqrt{x};$

*e)* $\mathbf{N}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\sqrt{x+2{,}76};$

*f)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\operatorname{tg} x, & \text{ha } x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi; & k\in\mathbf{Z}\\ 0, & \text{ha } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; & k\in\mathbf{Z}\end{cases};$

*g)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{3}{x^2-1}, & \text{ha } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}\\ 1, & \text{ha } x\in\mathbf{Z}\end{cases};$

*h)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & \text{ha } x\in[-1; 2]\\ |3x|-6, & \text{ha } x\in\mathbf{R}\setminus[-1; 2]\end{cases}.$



**6.** Folytonos-e az alábbi függvény a $k$ helyen?

*a)* $\mathbf{Z}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\dfrac{x+\sqrt{5}}{x^2-5};\quad k=5,\ k=\sqrt{5},\ k=0;$

*b)* $(\mathbf{R}\setminus\{4; -2\})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\dfrac{x^2-5x+4}{(x+2)(x-4)};\quad k=1,\ k=2,\ k=4;$

*c)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}|x|, & \text{ha } x\leqq 2\\ -|x|, & \text{ha } x>2\end{cases};\quad k=0,\ k=2;$

*d)* $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0, & \text{ha } x\in\mathbf{Z}\\ \dfrac{2x-1}{x+5}, & \text{ha } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}\end{cases};\quad k=0,\ k=3{,}4,\ k=-5.$

**7.** Megválasztható-e a $p$ értéke úgy, hogy az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény folytonos legyen?

*a)* $x\mapsto\begin{cases}x^2, & \text{ha } x\leqq 3\\ x+p, & \text{ha } x>3\end{cases};$

*b)* $x\mapsto\begin{cases}2x-5, & \text{ha } x\geqq 3\\ p-x, & \text{ha } x<3\end{cases};$

*c)* $x\mapsto\begin{cases}2x^2+1, & \text{ha } x\leqq 1\\ p-x, & \text{ha } 1<x<3\\ 3x-4, & \text{ha } x\geqq 3\end{cases};$

*d)* $x\mapsto\begin{cases}x^2+3, & \text{ha } x\leqq 1\\ p-x, & \text{ha } 1<x<3\\ 2x-4, & \text{ha } x\geqq 3\end{cases}.$

**8.** Válasszuk meg a $p$ értékét úgy, hogy az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{3x+3}, & \text{ha } x<-1\\ px, & \text{ha } x\geqq -1\end{cases}$$

függvény folytonos legyen.

**9.** Válasszuk meg a $p$ értékét úgy, hogy az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény folytonos legyen.

$$a)\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{2x+8}, & \text{ha } x\neq -4\\ p, & \text{ha } x=-4\end{cases};$$

$$b)\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{3x^3-3}{x-1}, & \text{ha } x\neq 1\\ p, & \text{ha } x=1\end{cases};$$

$$c)\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{2x+4}, & \text{ha } x\neq -2\\ p, & \text{ha } x=-2\end{cases};$$

$$d)\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{3x-6}, & \text{ha } x\neq 2\\ p, & \text{ha } x=2\end{cases}.$$

**10.** Adjuk meg az összes olyan $a$ és $b$ valós számot, amelyre az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}3x-5, & \text{ha } x\leqq 5\\ ax+b, & \text{ha } x>5\end{cases}$$

függvény folytonos.

**11.** Hány olyan rendezett valós $(a;\,b)$ számpár található, amelyre az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény folytonos?

$$a)\quad x\mapsto\begin{cases}x^2, & \text{ha } x\leqq 3\\ ax+b, & \text{ha } x>3\end{cases};$$

$$b)\quad x\mapsto\begin{cases}2x-5, & \text{ha } x\geqq 3\\ ax+b, & \text{ha } x<3\end{cases};$$

$$c)\quad x\mapsto\begin{cases}2x^2+1, & \text{ha } x\leqq 1\\ ax+b, & \text{ha } 1<x<3\\ 3x-4, & \text{ha } x\geqq 3\end{cases};$$



$$d)\quad x\mapsto\begin{cases}x^2+3, & \text{ha } x\leqq 1\\ ax+b, & \text{ha } 1<x<3\\ 2x-4, & \text{ha } x\geqq 3\end{cases}.$$



**12.** Megválasztható-e úgy az $(a;\,b)$ rendezett valós számpár, hogy az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+3}{x-3}, & \text{ha } x\neq 3\\ b, & \text{ha } x=3\end{cases}$$

függvény folytonos legyen?

**13.** Az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények közül melyik folytonos, melyik nem?

$f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-x}$, ha $x\neq 3$, $f(3)=0$,

$g(x)=\dfrac{9-x^2}{3+x}$, ha $x\neq -3$, $g(-3)=6$,

$h(x)=\dfrac{3-x}{9-x^2}$, ha $x\neq \pm 3$, $h(\pm 3)=\dfrac{1}{6}$,

$k(x)=\dfrac{3-x}{9-x^2}$, ha $x\leqq -4$,

$k(x)=\dfrac{9-x^2}{3-x}$, ha $-4<x<3$,

$k(x)=6$, ha $x\geqq 3$.

**14.** Az alábbi függvények közül melyiknek hol van szakadása?

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x^2-1$,

$g:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$, $\quad x\mapsto x^2-1$,

$h:(\mathbf{R}\setminus\{5\})\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x^2-1$,

$k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\begin{cases}x^2-1, & \text{ha } x\in\mathbf{R}\setminus\{-5;\,0;\,5\}\\ -1, & \text{ha } x\in\{-5;\,0;\,5\}\end{cases}.$

**15.** Az alábbi függvények közül melyiknek van az **R** halmazon folytonos kiterjesztése?

$$f:(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{x^2-3x}{x-3},$$

$$g:(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{x-3}{x^2-3x},$$

$$h:(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{x^2+3}{x+3},$$

$$k:(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{x+3}{x^2+3}.$$

**16.** Az alábbi függvények közül melyiknek van az **R** halmazon folytonos kiterjesztése?

$$D_f=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1},$$

$$D_g=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad g(x)=\frac{x^2-2x+1}{|x-1|},$$

$$D_h=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad h(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+1},$$

$$D_k=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad k(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{|x-1|},$$

$$D_l=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad l(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{|x^2-2x+1|},$$

$$D_m=\mathbf{R}\setminus\{1\},\qquad m(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

**17.** Legyen az $f$ értelmezési tartománya az **R**-nek az a lehető legbővebb részhalmaza, amelyen az $f(x)$-nek értelme van. Ábrázoljuk az $f$ függvényt, és ha lehet, terjesszük ki folytonosan az **R** halmazra.





$$a)\ f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+2};$$

$$b)\ f(x)=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+2};$$

$$c)\ f(x)=\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2+3x+2};$$

$$d)\ f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^3+6x^2+11x+6}.$$

**18.** Igazoljuk, hogy a

$$3x^3-x^2-6x+2=0$$

egyenletnek van gyöke a $[0;\,1]$ intervallumban és határozzuk meg ennek a közelítő értékét két tizedesjegy pontossággal.

**19.** Alkalmazzuk a Bolzano-féle felezési eljárást az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto x^3-8x^2+3x+5$$

függvényre és a $[0;\,4]$ intervallumra! Milyen becslést kapunk három, illetve öt lépés alapján az

$$x^3-8x^2+3x+5=0$$

egyenlet egyik gyökére?

**20.** Határozzuk meg a $2x^4-7x^3+1=0$ egyenlet egyik gyökét tizedpontossággal.

**21.** Igazoljuk, hogy az

$$]1;\,2[\,\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{x^6+1}{x-2}$$

függvénynek van zérushelye! Határozzuk meg e zérushely értékét tizedpontossággal!

**22.** Algebrai átalakítások nélkül igazoljuk, hogy az

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0$$

egyenletnek van gyöke a $]-2;\,-1[$ és a $]-3;\,-2[$ intervallumban is.

**29.** Igazoljuk, hogy az $f$ függvénynek a 2 helyen van véges határértéke! Számítsuk ki ezt a határértéket!

*a)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$;

*b)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$;

*c)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}$;

*d)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3-2x^2+x-2}$.

**30.** Számítsuk ki az $f$ függvény $a$-beli és $b$-beli határértékét.

*a)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$, $\quad f(x) = \dfrac{5x+2}{2x+3}$; $\quad a=4$, $b=0$;

*b)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0; 3\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; $\quad a=-3$, $b=3$;

*c)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2; 4\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$; $\quad a=2$, $b=5$;

*d)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$; $\quad a=4$, $b=1$.

**31.** Számítsuk ki az $\dfrac{f}{g}$ és a $\dfrac{g}{f}$ függvény $a$-beli határértékét!

*a)* $D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \{\pm 3\}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$; $\quad a=3$;

*b)* $D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $\quad g(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$; $\quad a=2$.





**32.** Számítsuk ki az $f$ függvény jobb oldali és bal oldali határértékét az $a$ helyen.

*a)* $D_f = [1; 10]$, $\quad f(x) = [x]$; $\quad a=4$;

*b)* $D_f = [1; 10]$, $\quad f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$; $\quad a=4$;

*c)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = [\sin x]$; $\quad a=\dfrac{\pi}{2}$;

*d)* $D_f = ]0; \pi[$, $\quad f(x) = \left[\dfrac{1}{\sin x}\right]$; $\quad a=\dfrac{\pi}{2}$.

**33.** Hol van és hol nincs véges határértéke az $f$, a $g$, az $f+g$, az $fg$, az $\dfrac{f}{g}$ és a $\dfrac{g}{f}$ függvénynek?

*a)* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x-4$;

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2-4$;

*b)* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2-x$;

$g\colon (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

*c)* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x$;

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x$;

*d)* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x$;

$g\colon \left(\mathbf{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\right\}\right) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x$.

**34.** Mennyi $\lim\limits_{0} f$?

*a)* $f\colon [-1; 1] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{7x-8}{2x+8}$;

b) $f\colon (\mathbf{R}\setminus\{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^3-7x}{x}$;

c) $f\colon (\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{6x}{x^2+2x}$;

d) $f\colon (\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{5x^2+3x^4}{2x^3-x^2}$.

**35.** Számítsuk ki (alkalmas algebrai átalakítás után) az

$$(\mathbf{R}\setminus\{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$$

függvény 0-beli határértékét.

**36.** Van-e a 0 helyen véges határértéke az

$$(\mathbf{R}\setminus\{0;-1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x+2\sqrt{|x^3|}}{5\sqrt{|x+x^2|}}$$

függvénynek?

**37.** Számítsuk ki az $f$ függvény $a$-beli határértékét.

a) $(\mathbf{R}\setminus\{a\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$;

b) $(\mathbf{R}\setminus\{a\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$;

c) $(\mathbf{R}\setminus\{a\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^3-a^3}{x-a}$;

d) $(\mathbf{R}\setminus\{a\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{(x^2-3x)-(a^2-3a)}{x-a}$.

**38.** Értelmezzünk függvényt a valós számok lehető legbővebb részhalmazán az $x \mapsto f(x)$ hozzárendelési szabállyal! Van-e a kapott függvénynek helyettesítési értéke, és van-e határértéke a 0, a $\dfrac{\pi}{2}$ és a $\pi$ helyen? Ha van, határozzuk meg.

a) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$; b) $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$.

**39.** Számítsuk ki az alábbi függvények határértékét a 0 helyen.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin x$;

b) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{5}\right\}\right) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} \quad (k \in \mathbf{Z})$;

c) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{\beta}\right\}\right) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad (k \in \mathbf{Z};\ \alpha, \beta \in \mathbf{N}^+)$;

d) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}\right) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{\alpha}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{\beta}} \quad (k \in \mathbf{Z};\ \alpha, \beta \in \mathbf{N}^+)$.

**40.** Számítsuk ki az $f$ függvény határértékét az $a$ helyen.

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}; \quad a = \dfrac{\pi}{3}$;

b) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad f(x) = \dfrac{3x}{\sin\dfrac{x}{2}}; \quad a = 0$;

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}, \quad f(x) = \dfrac{\sin 4x}{3x}; \quad a = 0$;

d) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{k\cdot\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}; \quad a = 0$;

$e)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{5x}$; $a=0$;

$f)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x-4+\sin(4x-8)}{x-2}$; $a=2$;

$g)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+\sin x}-\sqrt{5-\sin x}}{x}$; $a=0$;

$h)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{4};\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sin x - \cos x}$; $a=\dfrac{\pi}{4}$.

***41.** Számítsuk ki az $f$, $(\mathbf{R} \setminus \{a\}) \to \mathbf{R}$ függvény határértékét az $a$ helyen, ha

$a)$ $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$;

$b)$ $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$.

**42.** Számítsuk ki az $f$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$ függvény határértékét a 0 helyen, ha

$a)$ $f(x) = \dfrac{(2+x)^3-2^3}{x}$;

$b)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$;

$c)$ $f(x) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sin\dfrac{\pi}{4}}{x}$;

$d)$ $f(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)-\cos\dfrac{2\pi}{3}}{x}$.





**43.** Határozzuk meg a $k \in \mathbf{R}$ értékét úgy, hogy az

$$f: (\mathbf{R} \setminus \{2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2+kx+6}{x-2}$$

függvénynek létezzék a 2 helyen véges határértéke.

**44.** Határozzuk meg a $k$ értékét úgy, hogy az $f$ függvénynek létezzék a 3 helyen véges határértéke.

$a)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \dfrac{x^3-9x^2+kx-27}{x^2-6x+9}$;

$b)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $f(x) = \dfrac{2x^2-kx+8}{2x-6}$;

$c)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $f(x) = \dfrac{5x^3-k}{x-3}$;

$d)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $f(x) = \dfrac{x^6+k}{x^2-9}$.

***45.** Van-e véges határértéke az $f$ függvénynek az $a$ helyen? Ha van, határozzuk meg.

$a)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $a=0$;

$b)$ $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = e^{3x^2-5x+4}$; $a=-2$;

$c)$ $D_f = ]0; \pi[$, $f(x) = xe^{\operatorname{ctg} x}$; $a=\dfrac{\pi}{2}$;

$d)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = e^{\frac{4-x}{x^5}}$; $a=0$.

**46.** Határozzuk meg az $f$ függvény $a$-beli határértékét.

$a)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = 10^{\frac{2x+5}{x+1}}$; $a=-2{,}5$;

$b)$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2; 1\}$, $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; $a=0$;

*c)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2; 1\}$, $\quad f(x) = \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; $\quad a=1$;

*d)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm 6\}$, $\quad f(x) = 2^{\frac{x^2+6x}{x^2-36}}$; $\quad a=-6$.

## 3. Véges határérték a végtelenben

**47.** Igazoljuk a határérték definíciója alapján, hogy $\lim\limits_{+\infty} f = A$, ha

*a)* $D_f = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{2-5x^2}{x^2}$ és $A=-5$;

*b)* $D_f = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{6x-1}{4x+3}$ és $A = \dfrac{3}{2}$.

**48.** Mely küszöbszámnál nagyobb $x \in \mathbf{R}$ számokra igaz, hogy $|f(x)| < \dfrac{1}{1000}$?

*a)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x}{x^2+3}$;

*b)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{2}{5x+1}$;

*c)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{3-x}{x^2}$;

*d)* $f: [10; +\infty[ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-6x}{x^3-5x^2-6x}$.

**49.** Az alábbi függvények közül melyiknek van a $+\infty$-ben véges határértéke?

*a)* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5x-4$,



$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{5x-4}{x^2+1}$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5x^2-4x$,

$(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \to \dfrac{5x-4}{x}$;

*b)* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \to [x]$,

$[1; +\infty[ \to \mathbf{R}$, $\quad x \to \dfrac{1}{[x]}$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \to x-[x]$,

$(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x-[x]}$;

*c)* sin, cos, tg, ctg;

*d)* $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x}$,

$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x}}$,

$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |x|$,

$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$.

**50.** Mennyi $\lim\limits_{+\infty} f$?

*a)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{5x-2}{3x}$;

*b)* $f: [1; +\infty[ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{3x^2-2x}{3x^2-1}$;

*c)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{2x+1}$;

*d)* $f: [10; +\infty[ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1-3x}{x^2-2x}$.

**51.** Számítsuk ki az alábbi függvények $+\infty$-beli határértékét:

*a)* $D_f = D_g = D_h = [10; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{5x^3-6x+3}{2x^3+x-1}, \quad g(x) = \frac{5x^2-6x+3}{2x^3+x-1}, \quad h(x) = \frac{5x^3-6x+3}{2x^2+x-1};$$

*b)* $D_f = D_g = D_h = [10; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x-1}{2-x}, \quad g(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}, \quad h(x) = \frac{5x^2-7x}{5x^3-7x^2};$$

*c)* $D_f = D_g = D_h = [10; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}, \quad h(x) = \frac{3x^2-1}{\sqrt{3x^4+5x+2}};$$

*d)* $D_f = D_g = D_h = [10; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x-6}}{\sqrt{2x^3+1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{2x^3+1}}, \quad h(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^3+1}}.$$

**52.** Van-e $f$-nek véges határértéke a $+\infty$-ben vagy a $-\infty$-ben?

*a)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{5x}{\sqrt{x+3}};$

*b)* $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{5x}.$

***53.** Mennyi $\lim\limits_{+\infty} f$ és $\lim\limits_{-\infty} f$?

*a)* $D_f = \mathbf{R} \setminus [-10; 10]$, $f(x) = \sqrt{x^2+x-3} - \sqrt{x^2+3x-1}$;

*b)* $D_f = \mathbf{R} \setminus [-10; 10]$, $f(x) = \sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3}$;

*c)* $D_f = \mathbf{R} \setminus [-10; 10]$, $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2-2x+2}$;

*d)* $D_f = \mathbf{R} \setminus [-10; 10]$, $f(x) = \sqrt{x^2-15} - \sqrt{x^2-6x}$.





***54.** Van-e véges határértéke az $f$ függvénynek a $+\infty$-ben?

*a)* $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$;

*b)* $D_f = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = e^{\sqrt{x^3}}$;

*c)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = e^{2x^2+x+5}$;

*d)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = e^{x^3-2x+3}$.

***55.** Van-e véges határértéke az $f$ függvénynek a $-\infty$-ben?

*a)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = e^{5-x^2}$;

*b)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = e^{x^3-2x+3}$;

*c)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^4+3x^2-x+1}$;

*d)* $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = e^{x^2+x-12}$.

***56.** Van-e a

$$[2; +\infty[ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

függvénynek a $+\infty$-ben véges határértéke?

***57.** Van-e az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 0{,}02^{x^3-5x^2}$$

függvénynek a $+\infty$-ben vagy a $-\infty$-ben véges határértéke?

# 4. Végtelen határérték

**58.** Hol van véges, hol van végtelen határértéke az $f$ függvénynek, és mely valós helyen nincs határértéke?

*a)* $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{2x-6}{5x^2-15x};$

*b)* $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{5x^2-15x}{2x-6};$

*c)* $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1};$

*d)* $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \left|\dfrac{5}{2x^2-18}\right|.$

**59.** Hol van véges és hol van végtelen határértéke az $f$ függvénynek?

*a)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}, \quad f(x) = \log_3 |x|;$

*b)* $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & \text{ha } x>0 \\ 1, & \text{ha } x=0; \\ \log_3(-x), & \text{ha } x<0 \end{cases}$

*c)* $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = 3^{|x|};$

*d)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}, \quad f(x) = \dfrac{8-2x}{4x^2-x^3}.$

**60.** Van-e az $f$ függvénynek (véges vagy végtelen) határértéke az $a$ helyen?

*a)* $f:(\mathbf{R}\setminus\{3\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}; \quad a=3;$

*b)* $f:(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}; \quad a=4;$

*c)* $f:(\mathbf{R}\setminus\{m\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x+m}{x-m}; \quad a=m;$

*d)* $f:(\mathbf{R}\setminus\{2m\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2-mx-2m^2}{x^2-4mx+4m^2}; \quad a=2m.$



**61.** Van-e az $f$ függvénynek (véges vagy végtelen) határértéke a 0 helyen?

*a)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\{4\}, \quad f(x) = \dfrac{7x+2}{2x-8};$

*b)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0; -2\}, \quad f(x) = \dfrac{x^3-7x}{x^2+2x};$

*c)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{0; -\dfrac{1}{2}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x^3+x^2};$

*d)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}, \quad f(x) = \dfrac{x^3-3x}{x^5+4x^3}.$

# 5. Pontbeli derivált

**62.** Írjuk fel az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény $f(k+1)-f(k)$ növekményét, ha $k$
*a)* 0, 1, 2, 3, 99;
*b)* $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, $-100$;
*c)* $-0{,}5$.

**63.** Írjuk fel az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ függvény $f(k+1)-f(k)$ növekményét, ha $k = -5$, $-1$, $-0{,}5$, 0, 0,5, 1, 4!

**64.** Írjuk fel az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x+3$ függvény $f(a+5)-f(a)$ növekményét. Általánosítsuk megfigyelésünket.

**65.** Határozzuk meg az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ függvény $f(x_2)-f(x_1)$ növekményét, ha
*a)* $x_1=0$, $\quad x_2=0{,}001$;
*b)* $x_1=8$, $\quad x_2=-1$;
*c)* $x_1=-1$, $\quad x_2=27$;
*d)* $x_1=a$, $\quad x_2=a+h$.

**66.** Határozzuk meg az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény $f(k)-f(1)$ növekményét, ha $k=2$, 1,1, 1,01, $1+h$, ahol