

1. A határozott integrál fogalma

1. Osszuk fel a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=2$; b) $n=4$; c) $n=8$; d) $n=100$.

2. Osszuk fel az $[1; 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=2$; b) $n=4$; c) $n=8$; d) $n=100$.

3. Osszuk fel a $[0; 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és határozzuk meg az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x - x^2$ függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegének a különbségét, ha

a) $n=3$; b) $n=6$.

4. Osszuk fel a $[0; 8]$ intervallumot n egyenlő részre, és írjuk fel az $x \mapsto 5x^3$ függvénynek az adott felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegét. Igazoljuk, hogy $\lim(S_n) = \lim(s_n)$.

5. Osszuk fel a $[0; 2]$ intervallumot n egyenlő részre, és írjuk fel az f függvény e felosztáshoz tartozó S_n felső és s_n alsó összegét. Igazoljuk, hogy $\lim(S_n) = \lim(s_n)$.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 4 - x^2$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

6. Igazoljuk az alábbi eredményeket a határozott integrál fogalmának a felhasználásával.

$$a) \int_1^5 x \mapsto c = 4c \quad (c \in \mathbf{R});$$

$$b) \int_{-1}^1 x \mapsto -x = 0;$$

$$c) \int_{-2}^2 x \mapsto \frac{1}{4}x^3 = 0;$$

$$d) \int_0^{\pi} x \mapsto \cos x = 0.$$

7. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat a definíció alapján.

$$a) \int_0^2 x \mapsto 5, \quad \int_0^2 x \mapsto x, \quad \int_0^2 x \mapsto 5x;$$

$$b) \int_0^5 x \mapsto \frac{1}{10}, \quad \int_0^5 x \mapsto x^2, \quad \int_0^5 x \mapsto \frac{1}{10}x^2;$$

$$c) \int_0^4 x \mapsto 3, \quad \int_0^4 x \mapsto x^3, \quad \int_0^4 x \mapsto 3x^3;$$

$$d) \int_{-4}^4 x \mapsto 3, \quad \int_{-4}^4 x \mapsto x^3, \quad \int_{-4}^4 x \mapsto 3x^3.$$

8. Számítsuk ki a definíció alapján az alábbi $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények 0-tól 2-ig vett határozott integrálját.

$$a) x \mapsto -\frac{1}{3}, \quad x \mapsto -\frac{1}{3}x, \quad x \mapsto -\frac{1}{3}x+3;$$

$$b) x \mapsto 5, \quad x \mapsto 5x, \quad x \mapsto 5x+1;$$

$$c) x \mapsto -4, \quad x \mapsto -4x, \quad x \mapsto -4x+10;$$

$$d) x \mapsto \sqrt{2}, \quad x \mapsto \sqrt{2}x, \quad x \mapsto \sqrt{2}x-4.$$

9. Adjunk közelítő értéket az alábbi határozott integrálra a definíció felhasználásával.

$$a) \int_1^4 x \mapsto \frac{1}{x}; \quad c) \int_1^5 x \mapsto x^2-6x+5;$$

$$b) \int_1^4 x \mapsto \frac{1}{x^2}; \quad d) \int_{-3}^1 x \mapsto 3-2x-x^2.$$

10. Számítsuk ki a következő határozott integrált a definíció alapján.

$$a) \int_1^3 x \mapsto 4x-1; \quad e) \int_0^5 x \mapsto 5x-x^2;$$

$$b) \int_1^2 x \mapsto 6x^2+4; \quad f) \int_0^2 x \mapsto 4x^2-x;$$

$$c) \int_0^2 x \mapsto 6+9x-6x^2; \quad g) \int_{-1}^{0.5} x \mapsto 1-x-2x^2;$$

$$d) \int_1^8 x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{4}; \quad h) \int_1^3 x \mapsto x^2-4x+3.$$

11. Számítsuk ki az $\int_{-5}^5 f$ határozott integrált a definíció felhasználásával.

$$a) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < 2, \\ 2x-4, & \text{ha } x \geq 2; \end{cases}$$

$$b) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < 0, \\ 2-2x, & \text{ha } x \geq 0; \end{cases}$$

$$c) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < -2 \\ 4, & \text{ha } -2 \leq x \leq 1, \\ 3+x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$d) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{ha } x < -2 \\ 4, & \text{ha } -2 \leq x \leq 1, \\ 5-x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

12. Számítsuk ki a definíció felhasználásával az

$$\int_k^{k+2} x \mapsto \frac{x}{2} - 1$$

határozott integrált, ha a k értéke $-3, 0, 3, 6, 9$.

13. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálok közelítő értékét.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto 2 \sin x;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \cos x;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \sin x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto 3 \sin x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto 3 \sin x.$$

2. Integrálfüggvény, primitív függvény, határozatlan integrál

14. Adjuk meg az f függvénynek az a és b helyhez tartozó integrálfüggvényét.

$$a) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = 4, \quad a=0, \quad b=2;$$

$$b) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 5; \quad a=1, \quad b=-4;$$

$$c) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = 3 - x; \quad a=-7, \quad b=0;$$

$$d) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = 2x + 10; \quad a=-5, \quad b=1.$$

15. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto 3$ függvénynek a 0, az 1, a 2 és a 10 helyhez tartozó integrálfüggvényét.

16. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2}{3}x$ függvénynek a -2 , a 0, a 2 és a 10 helyhez tartozó integrálfüggvényét.

17. Igazoljuk, hogy az f függvény a helyhez tartozó integrálfüggvénye deriválható, és deriváltja az f függvény!

$$a) D_f = [-2; 5], \quad f(x) = 10; \quad a=-2;$$

$$b) D_f = [0; 10], \quad f(x) = 5 - 2x; \quad a=0;$$

$$c) D_f = [1; +\infty[, \quad f(x) = x + 1; \quad a=1;$$

$$d) D_f = [a; +\infty[, \quad f(x) = kx + l; \quad (a, k, l \in \mathbf{R}).$$

18. Igazoljuk, hogy az f függvénynek a 0 helyhez tartozó integrálfüggvénye deriválható, és deriváltja az f függvénynek a $[0; +\infty[$ -ra való leszűkítése.

$$a) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2;$$

$$b) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 + 5;$$

$$c) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 - 6x;$$

$$d) D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

19. Helyes-e az alábbi integrálás?

$$a) \int x \mapsto x^5 = x \mapsto 6x^6 + C;$$

$$b) \int x \mapsto 5x^4 = x \mapsto x^5 + C;$$

$$c) \int x \mapsto 12x^5 = x \mapsto 2x^6 + C;$$

$$d) \int x \mapsto (x^5 + 3) = x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + 3 + C;$$

$$e) \int x \mapsto x^2 = x \mapsto \frac{1}{3}x^3;$$

$$f) \int x \mapsto x^4 = x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + C;$$

$$g) \int x \mapsto 5x^4 = x \mapsto 20x^3 + C;$$

$$h) \int x \mapsto 90x^8 = x \mapsto 10x^9 + C.$$

20. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

$$a) \int x \mapsto x^6 = x \mapsto \frac{1}{7}x^7 + C;$$

$$b) \int x \mapsto (x^3 + 2x + 5) = x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 5x + C;$$

$$c) \int x \mapsto (x^4 + x^2 + 1) = x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + C;$$

$$d) \int x \mapsto (2x+1)(2x-1) = x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - x + C;$$

$$e) \int x \mapsto (x+2)^3 = x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C;$$

$$f) \int x \mapsto x^3(1+x)^2 = x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + C;$$

$$g) \int x \mapsto (x^2 - 3x)^2 = x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 + C;$$

$$h) \int x \mapsto \frac{4x-2}{(x^2-x+1)^2} = x \mapsto \frac{x^2-x-1}{x^2-x+1} + C.$$

21. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

$$a) \int x \mapsto (x^2+5)^7 \cdot 2x = x \mapsto \frac{1}{8}(x^2+5)^8 + C;$$

$$b) \int x \mapsto (3x^3+5x^2-8)(9x^2+10x) = x \mapsto \frac{1}{2}(3x^3+5x^2-8)^2 + C;$$

$$c) \int x \mapsto 3x\sqrt{x^2+6} = x \mapsto (x^2+6)\sqrt{x^2+6} + C;$$

$$d) \int x \mapsto 16x(2x^2+7)^3 = x \mapsto (2x^2+7)^4 + C.$$

22. Igazoljuk az alábbi integrálás helyességét.

$$a) \int x \mapsto 2 \cos x = x \mapsto 2 \sin x + C \quad (x \in \mathbf{R});$$

$$b) \int x \mapsto \operatorname{tg}^2 x = x \mapsto \operatorname{tg} x - x + C \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right);$$

$$c) \int x \mapsto \operatorname{ctg}^2 x = x \mapsto -\operatorname{ctg} x - x + C \quad (x \in]0; \pi]);$$

$$d) \int x \mapsto (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) = x \mapsto \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C \quad \left(x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

23. Hol a hiba az alábbi következtetésben?

$$(x \mapsto \sin^2 x)' = x \mapsto 2 \sin x \cos x$$

$$\text{és } (x \mapsto -\cos^2 x)' = x \mapsto 2 \sin x \cos x,$$

tehát minden valós x esetén $\sin^2 x = -\cos^2 x$.

24. Hol a hiba az alábbi következtetésben?

$$\int x \mapsto \sin x \cos x = x \mapsto \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\text{és } \int x \mapsto \sin x \cos x = x \mapsto -\frac{1}{2} \cos^2 x,$$

tehát minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x$, vagyis

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

25. Állítsuk elő az alábbi függvények határozatlan integrálját.

$$a) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5,7,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5,7x,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5,7x^2;$$

$$b) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5x,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5x^2;$$

$$c) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3}x,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3}x^2;$$

$$d) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{3}x,$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{3}x^2.$$

26. Állítsuk elő az alábbi függvények határozatlan integrálját.

$$a) [0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y},$$

$$[0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y^2},$$

$$[0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt{y^3};$$

$$b) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y^2},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y^3};$$

$$c) [0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y},$$

$$[0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y^2},$$

$$[0; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[4]{y^3};$$

$$d) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y^2},$$

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad y \mapsto \sqrt[5]{y^3}.$$

27. Állítsuk elő az alábbi $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ függvény határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto 5x^4$;

b) $x \mapsto 4\sqrt{x^3}$;

c) $x \mapsto 8\sqrt[3]{x^5}$;

d) $x \mapsto \frac{5}{7\sqrt{x^6}}$;

e) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$;

f) $x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x^3}}$;

g) $x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}$;

h) $x \mapsto \sqrt{x^2\sqrt{x}}$.

28. Állítsuk elő az alábbi $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ függvény határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}x^{-2}}{\sqrt{x}}$;

b) $x \mapsto \frac{x\sqrt[3]{\sqrt[5]{x\sqrt{x}}}}{\sqrt[10]{x^5}}$;

c) $x \mapsto \frac{\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

d) $x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

29. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto 2$, $\int x \mapsto (x+2)$, $\int x \mapsto (2-x)$,
 $\int x \mapsto (x+2)^2$, $\int x \mapsto (x-2)^2$;

b) $\int x \mapsto (2x+5)$, $\int x \mapsto (x^2-3)$, $\int x \mapsto (x^2-3x)$,
 $\int x \mapsto (2x^2+x-1)$, $\int x \mapsto \left(\frac{x}{3}+x^2-2x^3\right)$;

c) $\int x \mapsto 5$, $\int x \mapsto (5x+1)$, $\int x \mapsto (5x^2+x-7)$,
 $\int x \mapsto (5x^3+x^2-7x+3)$, $\int x \mapsto (5x^4+x^3-7x^2+3x-4)$;

d) $\int x \mapsto (3-x)$, $\int x \mapsto (3+x)$, $\int x \mapsto (3-x)^2$,
 $\int x \mapsto (3+x)^2$, $\int x \mapsto (3-x)^3$.

30. Végezzük el a kijelölt integrálást.

a) $\int x \mapsto (6x^2+8x+3)$;

b) $\int x \mapsto (5x^4+3x^3+6x^2-x+2)$;

c) $\int x \mapsto \left(\frac{2}{7}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x\right)$;

d) $\int x \mapsto (5x-1)^3(x+3)$.

31. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

$$a) \int x \mapsto \frac{x+x^{-1}+x^{-2}}{\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$b) \int x \mapsto \frac{x^3+8}{x+2} \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$c) \int x \mapsto \frac{x^2-7x+10}{3x-6} \quad (x \in [2; +\infty]);$$

$$d) \int x \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$e) \int x \mapsto \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$f) \int x \mapsto \frac{x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$g) \int x \mapsto (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) \quad (x \in \mathbf{R}^+);$$

$$h) \int x \mapsto \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \in \mathbf{R}^+).$$

*32. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

$$a) \int x \mapsto \sin x, \quad \int x \mapsto \cos x;$$

$$b) \int x \mapsto (3 \sin x - 4 \cos x), \quad \int x \mapsto \left(\frac{1}{4} \sin x + \frac{2}{3} \cos x \right);$$

$$c) \int x \mapsto \sin^2 x, \quad \int x \mapsto \cos^2 x;$$

$$d) \int x \mapsto (\sin^2 x + \cos^2 x), \quad \int x \mapsto (\sin^2 x - \cos^2 x);$$

$$e) \int x \mapsto \sin 2x, \quad \int x \mapsto \cos 2x;$$

$$f) \int x \mapsto (x - \sin 2x), \quad \int x \mapsto (5x + \cos 2x);$$

$$g) \int x \mapsto \sin x \cos x, \quad \int x \mapsto (6x - 8 \sin x \cos x);$$

$$h) \int x \mapsto 6 \cos 3x, \quad \int x \mapsto \left(2 + x^2 - \sin \frac{x}{3} \right).$$

*33. Végezzük el a kijelölt integrálást.

$$a) \int x \mapsto \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right);$$

$$b) \int x \mapsto \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$c) \int x \mapsto \sin (\pi - 2x);$$

$$d) \int x \mapsto \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$e) \int x \mapsto \cos \left(\frac{x}{5} - 2 \right);$$

$$f) \int x \mapsto \sin \left(4 - \frac{x}{2} \right);$$

$$g) \int x \mapsto \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$h) \int x \mapsto \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right).$$

*34. Állítsuk elő az alábbi $] - 1; + \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ függvények határozatlan integrálját.

a) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2};$

b) $x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2};$

c) $x \mapsto 1 - \frac{1}{(x+1)^2};$

d) $x \mapsto \frac{x^2+2x}{(x+1)^2};$

e) $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3};$

f) $x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^3};$

g) $x \mapsto 1 - \frac{1}{(x+1)^3};$

h) $x \mapsto \frac{x^3+3x^2+3x}{(x+1)^3};$

*35. Állítsuk elő az alábbi függvény határozatlan integrálját.

a) $]2; + \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto (x-2)^{-3};$

b) $\left] - \frac{1}{3}; + \infty \right[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(3x+1)^4};$

c) $\left] - \infty; \frac{1}{3} \right[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(1-3x)^5};$

d) $] - 1; 1[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{2x}{(1-x^2)^2};$

e) $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^2};$

f) $\mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{30x^2-20x+10}{(x^3-x^2+x-1)^2};$

g) $]1; + \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{2-8x-6x^2}{(2+x-2x^2-x^3)^2};$

h) $]1; 2[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{4x^3-10x}{(x^2-1)^2(x^2-4)^2};$

*36. Állítsuk elő az alábbi függvény határozatlan integrálját.

a) $[-8; + \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x+8};$

b) $[2; + \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto (x-2)\sqrt{x-2};$

c) $] - \infty; 1[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{5}{\sqrt{1-x}};$

d) $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3x+1}};$

e) $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{5x+10}{\sqrt{x^2+4x+3}};$

f) $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{5x+10}{\sqrt{x^2+4x+10}};$

g) $\mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{2x^2}{\sqrt{3-5x^3}};$

h) $\mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}};$

*37. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

a) $\int x \mapsto \sin^2 x, \quad \int x \mapsto \cos^2 x;$

- b) $\int x \mapsto \sin^3 x,$ $\int x \mapsto \cos^3 x;$
 c) $\int x \mapsto \sin^4 x,$ $\int x \mapsto \cos^4 x;$
 d) $\int x \mapsto \sin^5 x,$ $\int x \mapsto \cos^5 x;$
 e) $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^2 x,$ $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^3 x;$
 f) $\int x \mapsto \sin^6 x \cos^3 x,$ $\int x \mapsto \sin^3 x \cos^6 x;$
 g) $\int x \mapsto \sin^5 x \cos^5 x,$ $\int x \mapsto \sin^{15} x \cos^5 x;$
 h) $\int x \mapsto \sin^2 x \cos^4 x,$ $\int x \mapsto \sin^4 x \cos^2 x.$

*38. Végezzük el az alábbi integrálást.

- a) $\int x \mapsto \sin 5x \cos 3x;$
 b) $\int x \mapsto \sin 3x \cos 2x;$
 c) $\int x \mapsto \cos 3x \cos x;$
 d) $\int x \mapsto \sin 2x \cos 4x;$
 e) $\int x \mapsto \sin 10x \sin 15x;$
 f) $\int x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3};$
 g) $\int x \mapsto \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3};$
 h) $\int x \mapsto \sin x \sin 2x \sin 3x.$

39. Végezzük el az alábbi integrálást.

- a) $\int x \mapsto 2x \sin x^2;$
 b) $\int x \mapsto \frac{x}{10} \cos(3x^2 + 5);$
 c) $\int x \mapsto (3x^2 - 2) \cos(x^3 - 2x + 1);$
 d) $\int x \mapsto (3x^2 - 2) \sin(x^3 - 2x + 1);$
 e) $\int x \mapsto (2x + 5) \cos(x^2 + 5x + 1);$

f) $\int x \mapsto -4 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right);$

g) $\int x \mapsto 3x^2 \cos(x^3 - 4);$

h) $\int x \mapsto 7x^2 \sin(x^3 - 4).$

40. Melyik az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 10x - 7$ függvénynek az a primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik az $A(1; 5)$ pontra?

41. Van-e az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik a $B(0; 2)$ pontra?

42. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, amelyre $f'(x) = 5x^2 - 7x + 4$ és $f(1) = 3$?

43. Határozzuk meg az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 3x^2 - 4$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek a -1 zérushelye.

44. Határozzuk meg azt a g függvényt, amelyre $g(2) = 50$ és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $g'(x) = 4x^2 - 9x + 5$.

45. Határozzuk meg azt a h függvényt, amelyre $h(1) = 2$ és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $h'(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$.

46. Van-e az f függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik a $P(x_0; y_0)$ pontra? Ha van, adjuk meg.

a) $D_f = \mathbf{R}, f(x) = 6x^2 - 8; x_0 = 2, y_0 = 5;$

b) $D_f = \mathbf{R}, f(x) = 3 \sin x; x_0 = -\frac{\pi}{4}, y_0 = 2;$

c) $D_f = \mathbf{R}, f(x) = \sin x + \cos x; x_0 = \frac{\pi}{4}, y_0 = 0;$

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}, f(x) = 2 + \frac{1}{\cos^2 x}; x_0 = 0, y_0 = 0.$

*47. Határozzuk meg a

$$]2; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{5(x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek az 5 zérushelye!

*48. Határozzuk meg az

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^3 \cos\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvénynek azt a primitív függvényét, amely

- a) a 0 helyen a 3 értéket;
b) a 3 helyen a 0 értéket
veszi fel.

3. Határozott integrálok kiszámítása

49. Számítsuk ki a következő határozott integrált.

a) $\int_1^3 x \mapsto (2-3x);$

b) $\int_1^2 x \mapsto (6x^2+1);$

c) $\int_0^2 x \mapsto (2x^2-3x-2);$

d) $\int_{-3}^2 x \mapsto (6-x-x^2);$

e) $\int_0^5 x \mapsto (5x-x^2);$

f) $\int_0^2 x \mapsto (4x^3-x);$

g) $\int_1^3 x \mapsto (2x^2-8x+6);$

h) $\int_{-1}^{0.5} x \mapsto (1-x-2x^2);$

50. Számítsuk ki a következő határozott integrált.

a) $\int_0^1 x \mapsto (x^5-3x^4+2x^3+5x^2-4x+1);$

b) $\int_{-1}^1 x \mapsto (2x^5-x^4+\sqrt{3}x^3-10x^2+7x+1);$

c) $\int_{-24}^{24} x \mapsto (5x^3+2x);$

d) $\int_{-2}^0 x \mapsto (2x^4-x^3+3x^2-7x+1);$

51. Számítsuk ki az

$$]1; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

függvény k -től l -ig vett határozott integrálját, ha

a) $k=2, l=3;$

c) $k=5, l=10;$

b) $k=2, l=5;$

d) $k=10, l=17.$

52. Számítsuk ki az

$$\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3x+1}$$

függvény 1-től 8-ig vett határozott integrálját.

53. Számítsuk ki az f függvény a -tól b -ig vett határozott integrálját.

a) $D_f =]-1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad a = -\frac{3}{4}, \quad b = -\frac{1}{2};$

b) $D_f =]-1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}; \quad a=0, \quad b=1;$

c) $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad a=-5, \quad b=5;$

$$d) D_f =]-5; 25[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-x}}; \quad a=0, \quad b=24.$$

54. Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto 3 \cos x;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \sin 4x;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \cos 4x;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto (3 \sin x - 2 \cos x);$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin x \cos^2 x;$$

$$g) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^2 x \cos x;$$

$$h) \int_0^{\pi} x \mapsto \sin^2 x \cos x.$$

*55. Integráljuk 0-tól $\frac{\pi}{2}$ -ig és $-\frac{\pi}{2}$ -től $\frac{\pi}{2}$ -ig az f , a g , az $f+g$ és az $f-g$ függvényt.

$$a) D_f = D_g = \mathbf{R}, \quad f(x) = 5 \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{4} \cos x;$$

$$b) D_f = D_g = \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x.$$

56. Integráljuk a -tól b -ig az f függvényt.

$$a) D_f = \left[0; \frac{\pi}{6}\right], \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 2x}; \quad a = \frac{\pi}{8}; \quad b = \frac{\pi}{6};$$

$$b) D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}; \quad a=0, \quad b = \frac{\pi}{2};$$

$$c) D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}; \quad a=0, \quad b = \frac{\pi}{2};$$

$$d) D_f = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x}\right)^2 - \frac{1}{\cos^4 x}; \quad a = -\frac{\pi}{4}, \quad b = \frac{\pi}{4}.$$

*57. Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

$$a) \int_0^{2\pi} x \mapsto \sin^3 x;$$

$$b) \int_0^{\pi} x \mapsto \cos^3 x;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^5 x;$$

$$d) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \sin^5 x.$$

*58. Mennyi az $\int_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \sin mx \sin nx$ értéke, ha

$$a) m=n=2;$$

$$c) m=2, n=4;$$

$$b) m=n=3;$$

$$d) m=5, n=3?$$

*59. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n \\ \pi, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

*60. Számítsuk ki az alábbi határozott integrált.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos 4x \sin 2x;$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos 2x \sin 2x;$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \mapsto \cos 3x \sin 4x;$

d) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \sin 3x.$

61. Integráljuk az f függvényt k -től l -ig, l -től m -ig és k -től m -ig. Milyen kapcsolat van a három eredmény között?

a) $D_f = [0; 6], f(x) = \sqrt{x}; \quad k=0, \quad l=3, \quad m=6;$

b) $D_f = [0; 4], f(x) = 6x^2 - 8x + 3; \quad k=0, \quad l=2,5, \quad m=4;$

c) $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = 2 \cos x; \quad k = -\frac{\pi}{4}, \quad l=0, \quad m = \frac{\pi}{2};$

d) $D_f =]0; \pi[, f(x) = \frac{5}{\sin^2 x}; \quad k = \frac{\pi}{4}, \quad l = \frac{\pi}{2}, \quad m = \frac{3\pi}{4}.$

62. Igazoljuk a határozott integrál definíciója alapján, hogy

$$\int_0^1 f + \int_1^2 f = \int_0^2 f, \text{ ha}$$

a) $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x;$

b) $D_f = [0; 2], \quad f(x) = 3x^2;$

c) $D_f = [0; \pi], \quad f(x) = \sin x;$

d) $D_f = [0; 2], \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2(x-1)}.$

63. Igazoljuk a határozott integrál geometriai jelentését felhasználva, hogy

$$\int_g^k x \mapsto (4x-1) = \int_g^h x \mapsto (4x-1) + \int_h^k x \mapsto (4x-1), \text{ ha}$$

a) $g=1, \quad h=2, \quad k=3;$

b) $g=0,4, \quad h=0,5, \quad k=1;$

c) $g=-3, \quad h=-2, \quad k=0;$

d) $g=-5, \quad h=\frac{1}{4}, \quad k=5\frac{1}{2}.$

64. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

a) $\int_{-1}^2 x \mapsto 2|x|;$ c) $\int_{-4}^7 x \mapsto |5-x|;$

b) $\int_0^3 x \mapsto |5-x|;$ d) $\int_4^6 x \mapsto |5-x|.$

65. Ábrázoljuk az

$$f: [0; 4] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4x + 8, & \text{ha } x \in [0; 2] \\ 4x - x^2, & \text{ha } x \in [2; 4] \end{cases}$$

függvényt

a) Differenciálható-e az f függvény?

b) Számítsuk ki az $\int_0^4 f$ értékét.

66. Ábrázoljuk a

$$g: [-2; 2] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 8 - 2x^2, & \text{ha } |x| \in [1; 2] \\ x^2 + 5, & \text{ha } |x| \in [0; 1] \end{cases}$$

függvényt!

a) Differenciálható-e a g függvény?

b) Számítsuk ki az $\int_{-2}^2 g$ értéket.

c) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

67. Differenciálható-e a

$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{ha } x \leq -1 \\ x^2 + 2x + 4, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

függvény?

a) Számítsuk ki az $\int_{-2}^2 h$ értéket.

b) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

68. Differenciálható-e a

$$k: [-3; 3] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^3 - 9x, & \text{ha } x \in [-3; 0] \\ -x^2 - 9x, & \text{ha } x \in [0; 3] \end{cases}$$

függvény?

a) Számítsuk ki az $\int_{-3}^3 k$ értéket.

b) Mi ennek az integrálnak a geometriai jelentése?

69. Állapítsuk meg, differenciálható-e az

$$f: [-2; 8] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \in [-2; 3] \\ 6x - x^2, & \text{ha } x \in [3; 8] \end{cases}$$

függvény? Számítsuk ki az $\int_k^l f$ értéket, ha

a) $k=0, l=1$;

c) $k=3, l=8$;

b) $k=-2, l=3$;

d) $k=2, l=8$.

70. Számítsuk ki az f függvény a -tól b -ig vett határozott integrálját.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = 5$;

b) $D_f = [-\pi; \pi]$, $f(x) = |\sin x|$; $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \pi$;

c) $D_f = [-2; 3]$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \in [-2; 1] \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \in [1; 3] \end{cases}$; $a = -2$, $b = 3$;

d) $D_f = \left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x}, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \\ \cos x, & \text{ha } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \end{cases}$;
 $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \pi$.

*71. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$[a; b] \subset D_f \quad \text{és} \quad f(x) = Ax + B \quad (a, b, A, B \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\int_a^b f = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

*72. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$[a; b] \subset D_f \quad \text{és} \quad f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a, b, A, B, C \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

73. Az integrálszámítás középértéktétele azt mondja ki, hogy ha az $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor van olyan $k \in]a; b[$, hogy

$$\int_a^b f = (b-a)f(k).$$

Az $f(k)$ számot az f függvény $[a; b]$ -re vonatkozó *integrálközepének* nevezzük. Határozzuk meg az f függvény $[a; b]$ -ra vonatkozó integrálközepét, ha

- a) $f(x) = \sin x$; $a=0$, $b=\pi$;
 b) $f(x) = x^2$; $a=1$, $b=5$;
 c) $f(x) = 2x^3$; $a=-5$, $b=-1$;
 d) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$; $a=-2$, $b=2$.

*74. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

- a) $\int_0^3 x \mapsto e^x$, $\int_1^3 x \mapsto e^x$, $\int_{-2}^2 x \mapsto e^x$;
 b) $\int_0^3 x \mapsto 2^x$, $\int_1^3 x \mapsto 2^x$, $\int_{-2}^2 x \mapsto 2^x$;
 c) $\int_0^3 x \mapsto \frac{1}{2^x}$, $\int_1^3 x \mapsto \frac{1}{2^x}$, $\int_{-2}^2 x \mapsto \frac{1}{2^x}$;
 d) $\int_0^3 x \mapsto (5^x + 5^{-x})$, $\int_1^3 x \mapsto (5^x + 5^{-x})$, $\int_{-2}^2 x \mapsto (5^x + 5^{-x})$.

75. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

- a) $\int_1^5 x \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_1^6 x \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_5^6 x \mapsto \frac{1}{x}$;
 b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{-1} x \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_{-3}^{-1} x \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_{-\frac{1}{3}}^{-3} x \mapsto \frac{1}{x}$;
 c) $\int_{\frac{1}{2}}^2 x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2}$, $\int_{\frac{1}{e}}^e x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2}$;
 d) $\int_{-5}^5 x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 3}$, $\int_{-5}^5 x \mapsto \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$.

76. Határozzuk meg a k valós számot, ha

- a) $\int_{\frac{1}{4}}^1 x \mapsto \frac{1}{x} = \int_1^k x \mapsto \frac{1}{x}$;
 b) $5 \int_1^2 x \mapsto \frac{1}{x} = \int_1^k x \mapsto \frac{1}{x}$;
 c) $5 \int_1^2 x \mapsto \frac{1}{x} = \int_2^k x \mapsto \frac{1}{x}$;
 d) $5 \int_1^2 x \mapsto \frac{1}{x} = \int_{\frac{1}{8}}^k x \mapsto \frac{1}{x}$.

77. Hogyan kell megválasztanunk a k és az l valós számot ahhoz, hogy létezzék az

$$\int_k^l x \mapsto \frac{1}{|x|} - \int_k^l x \mapsto \frac{1}{|x-3|}$$

különbség? Számítsuk ki az adott különbséget, ha

- a) $k=5$, $l=6$; c) $k=-4$, $l=-1$;
 b) $k=1$, $l=2$; d) $k=0,1$, $l=2,9$.

*78. Hogyan kell megválasztanunk a k és a l valós számot ahhoz, hogy létezzék és az \ln függvény felhasználásával kiszámítható legyen az alábbi határozott integrál?

- a) $\int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-3|} \right)$;

$$b) \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x-3|} \right);$$

$$c) \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x-3} \right);$$

$$d) \int_k^l x \mapsto \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} \right).$$

*79. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

$$a) \int_{-1}^1 x \mapsto 5xe^{x^2}, \quad \int_0^1 x \mapsto 5xe^{x^2}, \quad \int_{-1}^0 (x \mapsto 5xe^{x^2});$$

$$b) \int_0^1 x \mapsto (e^{3-2x} + 3x), \quad \int_0^1 x \mapsto (e^{3+2x} + 3x);$$

$$c) \int_{-2}^0 x \mapsto \frac{3+2x}{4-3x-x^2}, \quad \int_{-3}^0 x \mapsto \frac{3+2x}{4-3x-x^2};$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \mapsto \lg x, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x \mapsto \operatorname{ctg} x.$$

4. Területszámítási feladatok

80. Melyik síkidom területét adják meg az alábbi határozott integrálok?

$$a) \int_0^1 x \mapsto 4x, \quad \int_0^4 x \mapsto 4x, \quad \int_1^4 x \mapsto 4x;$$

$$b) \int_0^1 x \mapsto x^2, \quad \int_0^4 x \mapsto x^2, \quad \int_1^4 x \mapsto x^2;$$

$$c) \int_0^1 x \mapsto (4x-x^2), \quad \int_0^4 x \mapsto (4x-x^2), \quad \int_1^4 x \mapsto (4x-x^2);$$

$$d) \int_0^1 x \mapsto (4x+x^2), \quad \int_0^4 x \mapsto (4x+x^2), \quad \int_1^4 x \mapsto (4x+x^2).$$

81. Melyik síkidom területét adják meg az alábbi határozott integrálok?

$$a) \int_0^2 x \mapsto (x^2+1), \quad \int_0^2 x \mapsto (x^2+4);$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^1 x \mapsto 4x^3, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x \mapsto (4x^3+2);$$

$$c) \int_0^3 x \mapsto (3x-x^2), \quad \int_0^3 x \mapsto (5+3x-x^2);$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto \cos x, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \mapsto (2+\cos x).$$

82. Szemléltethetők-e valamely síkidom területével az alábbi határozott integrálok?

$$a) \int_{-2}^{-1} x \mapsto (x^2-1), \quad \int_{-1}^0 x \mapsto (x^2-1),$$

$$\int_0^1 x \mapsto (x^2-1), \quad \int_1^2 x \mapsto (x^2-1);$$

$$b) \int_{-2}^{-1} x \mapsto (1-x), \quad \int_{-1}^0 x \mapsto (1-x),$$

$$\int_0^1 x \mapsto (1-x), \quad \int_1^2 x \mapsto (1-x);$$

$$\begin{array}{ll} c) \int_{-2}^{-1} x \mapsto (1 + \sin x), & \int_{-1}^0 x \mapsto (1 + \sin x), \\ \int_0^1 x \mapsto (1 + \sin x), & \int_1^2 x \mapsto (1 + \sin x); \\ d) \int_{-2}^{-1} x \mapsto (x^2 - 4), & \int_{-1}^0 x \mapsto (x^2 - 4), \\ \int_0^1 x \mapsto (x^2 - 4), & \int_1^2 x \mapsto (x^2 - 4). \end{array}$$

83. Számítsuk ki elemi úton és a határozott integrál segítségével is az alábbi egyenletű egyenesekkel közrefogott síkidom területét.

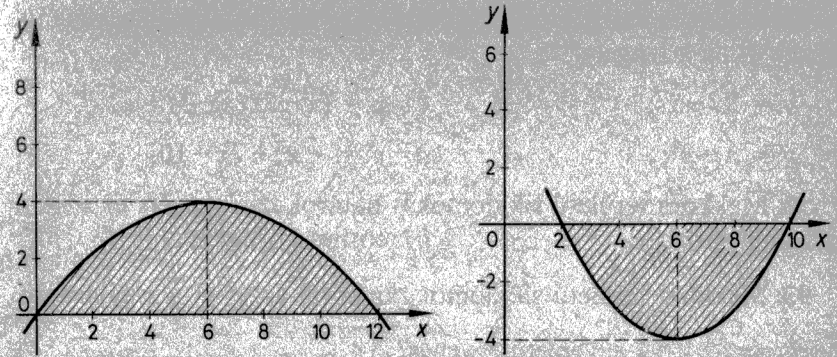
- a) $y=0, y=2x, x=10;$
 b) $y=0, y=3x-1, x=1, x=2;$
 c) $y=0, y=2-2x, x=0, x=2;$
 d) $y=0, y=4x+2, x=0, x=2;$
 e) $2x-3y=1, 5x-2y=4, 3x+y=18;$
 f) $y=2, x-y+3=0, x+2y-15=0;$
 g) $3x+2y-21=0, x-y+3=0, x-6y+13=0;$
 h) $3x+4y-21=0, 5x-2y-9=0, x-3y-7=0.$

84. Határozzuk meg az 5. ábrán látható parabolaszemek területét.

85. Igazoljuk, hogy egy parabola és a tengelyére merőleges szelő által közrefogott parabolaszemet területe egyenlő a szelet köré írható téglalap területének $\frac{2}{3}$ részével.

86. Mekkora területű síkidomot határol az $y=ax^2$ egyenletű parabola, valamint az $y=k$ és az $y=l$ egyenletű egyenes, ha

- a) $a=1, k=1, l=4;$
 b) $a=1, k=4, l=25;$



5. ábra

- c) $a = \frac{1}{5}, k=1, l=4;$
 d) $a = \frac{1}{5}, k=4, l=25?$

87. Mekkora területű síkidomot határol az $y=ax^2$ ($a \in \mathbf{R}^+$) egyenletű parabola és két, az x tengellyel párhuzamos szelője?

88. Legyen $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ az $y=kx^3$ egyenletű görbe két pontja ($k \in \mathbf{R}^+, b_1 > a_1 \in \mathbf{R}^+$), A_x és B_x , illetve A_y és B_y pedig az A és a B pont vetülete az x , illetve az y tengelyen.

- a) Mekkora az $A_x B_x B_1 A$ síkidom területe?
 b) Mekkora a $B_y A_y A B$ síkidom területe?

89. Mekkora az x tengely és az alábbi egyenletű parabola által közrefogott parabolaszemet területe?

- a) $y = x^2 + 2x;$ c) $y = -x^2 + 2x;$
 b) $y = x^2 - 2x;$ d) $y = -x^2 - 2x.$

90. Mekkora az x tengely és az alábbi egyenletű görbe által közrefogott síkidom területe?

- a) $y = 4 - x^2;$ c) $y = x^2 + 4x - 5;$
 b) $y = 3 - 2x - x^2;$ d) $y = 6x - x^2.$

91. Mekkora területű síkidomot fog közre az alábbi egyenletű görbe és az x tengely?

a) $y = 3x - x^2$; c) $y = (x-2)(x-3)^2$;
 b) $y = x - x^3$; d) $y = -x^2 + 7x - 10$.

92. Mekkora területű síkidomokat határol az x tengely és a

a) sinusgörbe; b) cosinusgörbe?

93. Mekkora területű síkidomot zár körül az $y^2 = \frac{1}{2}x$ egyenletű görbe és az $x=2$ egyenletű egyenes?

94. Legyen $A(a_1; 1)$ és $B(b_1; 3)$ az $y = 3x^2$ egyenletű parabola két pontja. Mekkora területű síkidomot fog közre az adott parabola és az AB egyenes?

95. Mekkora az $y = kx^2$ egyenletű parabola és az $y = mx$ egyenletű egyenes által közrefogott síkidom területe, ha

a) $k = m = 1$; c) $k = 1, m = -2$;
 b) $k = 1, m = 2$; d) $k = \frac{1}{4}, m = 5$?

96. Igazoljuk, hogy az $y = x^n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) egyenletű görbe, az $x=1$ és az $y=0$ egyenletű egyenes $\frac{1}{n+1}$ területű síkidomot fog közre.

97. Mekkora területű síkidomot fog közre az $y = kx^n$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbf{N}^+$) egyenletű görbe, az $x=a$ ($a \in \mathbf{R}^+$) és az $y=0$ egyenletű egyenes?

98. Mekkora területű síkidomot fog közre az f és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = 0$;
 b) $f(x) = x(x-1)(x-2)$, $g(x) = 0$;
 c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$;
 d) $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - x^2$.

99. Mekkora az alábbi egyenletű görbék által közrefogott síkidom területe?

a) $y^2 = 2(x-4)$, $x=5$;
 b) $y^2 = \frac{1}{3}x$, $x-2y = 0$;
 c) $y^2 = 9x$, $3x-y = 6$;
 d) $y^2 = x$, $x^2 = y$.

100. Számítsuk ki az $y^2 = ax$ és az $x^2 = by$ ($a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) egyenletű parabolák által közrefogott síkidom területét.

101. Mekkora területű síkidomot fog közre az $y = (x+2)^2$ egyenletű parabola és a két koordinátatengely?

102. Mekkora területű síkidomot vág ki az első, illetve a második síknegyedből az $y = -x^2 - 3x + 4$ egyenletű parabola?

103. Mekkora területű síkidomot vág ki az első, illetve a második síknegyedből az $y = -3x^2 - x + 4$ egyenletű parabola?

104. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = 2 - x - x^2$ egyenletű parabola és a tengelypontján áthaladó, 2 iránytangensű egyenes fog közre?

105. Mekkora területű síkidomot fog közre az f és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - x^2$;
 b) $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 + 3x$;
 c) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 2$;
 d) $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^3 + 3x^2$;
 e) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 4 - x^2$;
 f) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = -x^2 + 4x + 1$;
 g) $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 3x^2 - 5x + 8$;
 h) $f(x) = 3x - x^2$, $g(x) = 3x^2 - x$.

106. Hány síkidomot fog közre az x tengely és az

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

függvény grafikonja? Számítsuk ki e síkidomok területét.

107. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomok területét.

a) $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2;$

b) $y = x^3, y = 0, x = 2;$

c) $y = x^3, x = 1, y = 8;$

d) $y = x^3, x = 2, y = 1;$

e) $y = x^3, x = y;$

f) $x = y^3, x = 8, y = 1;$

g) $x = y^3, x = 0, y = 1, y = 2;$

h) $x = y^3, x = y.$

108. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomok területét.

a) $y^2 = 1 - x, \quad x + 3 = 0;$

b) $4y = x^2, \quad 4x = y^2;$

c) $y^2 + 2 = x, \quad 2y^2 = x;$

d) $y = \sqrt{x-2}, \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}x}, y = 0.$

*109. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a következő egyenletű görbéket! Mekkora területű síkidomot fognak közre?

a) $y^2 = x^3, \quad x = 4;$

b) $y^2 = (x-4)^3, \quad x = 8;$

c) $(y-4)^2 = x^3, \quad x = 4;$

d) $(y-4)^2 = (x-4)^3, \quad x = 8.$

110. Mekkora területű síkidomokat határolnak az alábbi egyenletű görbék?

a) $y = 2x^3, \quad y = \sqrt{\frac{x}{8}};$

b) $y = 2 - x^2, \quad x^2 = y^3;$

c) $y = 4 - x^3, \quad y = 3x^3, x = -1;$

d) $y = x^2, \quad y = x^3.$

111. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék által határolt síkidomok területét.

a) $y = \sin x, \quad y = \cos x;$

b) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0;$

c) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = \pi;$

d) $y = \sin x, \quad y = \sin 2x.$

112. Mekkora területű síkidomot fog közre az

$$f: [0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} \sin 2x$$

és a

$$g: [0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin x(1 + \cos x)$$

függvény grafikonja?

113. Válasszuk meg a c valós számot úgy, hogy az $y = f(x)$ egyenletű görbe és az x tengely 10 egység területű síkidomot fogjon közre.

a) $D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = c - x^2;$

b) $D_f = [0; \pi], \quad f(x) = c \sin x;$

c) $D_f = [0; +\infty[, \quad f(x) = cx - x^2;$

d) $D_f = [0; +\infty[, \quad f(x) = c^2x - cx^2.$

114. Egy parabola illeszkedik az origóra, tengelypontja a $T(2; 5)$ pont, tengelye merőleges az x tengelyre. Mekkora területű síkidomot fog közre a parabola, a parabola tengelye és az x tengely?

***115.** Az $x^2 - 9x + y + 8 = 0$ egyenletű parabolát az $y = 1 - x$ egyenletű egyenes az $A(1; 0)$ és a $B(b_1; b_2)$ pontban metszi.

a) Mekkora területű síkidomot fog közre az AB szakasz és az AB parabolaív?

b) Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a parabola A -beli érintője, az AB egyenes és az $x = b_1$ egyenletű egyenes határoz meg?

c) Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelyet a parabola A -beli és B -beli érintője, valamint az AB egyenes határoz meg?

***116.** Az $x^2 + ax + by + c = 0$ egyenletű parabola illeszkedik az origóra és a $P(6; 1)$ pontra, a P -beli érintő iránytangense -1 .

a) Határozzuk meg a -t, b -t és c -t.

b) Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a parabola, a P -beli érintő és az y tengely fog közre?

c) Mekkora területű síkidomot fog közre ez a parabola és az $y = x$ egyenletű egyenes?

117. Az $x^2 - 8x + y + 7 = 0$ egyenletű parabola, a 2 abszcisszájú pontjához tartozó érintő és az x tengely két síkidomot fog közre. Számítsuk ki mindkettőnek a területét.

118. Számítsuk ki annak a kisebbik síkidomnak a területét, amelyet az $x^2 - 9x + y + 8 = 0$ egyenletű parabola, az x_0 abszcisszájú pontjához tartozó érintő és az x tengely fog közre, ha

a) $x_0 = 7$; b) $x_0 = 5$; c) $x_0 = 4,5$; d) $x_0 = 2$.

119. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy az x tengely helyett az y tengelyt szerepeltetjük!

120. Az $x^2 - 6x + y + 5 = 0$ egyenletű parabolához az x tengelyre illeszkedő pontjaiban érintőket húzunk. Mekkora a parabola és a két érintő által közrefogott síkidom területe?

121. Mekkora területű síkidomot fog közre az $x - 2y + 2 = 0$ egyenletű egyenes és az a $T(0; 5)$ tengelypontú parabola, amelynek a tengelye párhuzamos az x tengellyel és egyik pontja a $P(4; 3)$ pont?

***122.** Az $x^2 + ax + by + c = 0$ egyenletű parabola illeszkedik az $O(0; 0)$ és az $A(6; 0)$ pontra; az O -beli érintő iránytangense 1. A parabola 5 abszcisszájú pontja B .

a) Határozzuk meg a -t, b -t és c -t.

b) Mekkora a parabola és az OB egyenes által közrefogott síkidom területe?

c) Mekkora területű háromszöget fog közre az OB egyenes, a parabola O -beli és B -beli érintője?

123. Az $x^2 - 8x - y + 15 = 0$ egyenletű parabola az x tengelyt a k és az l ($k, l \in \mathbf{R}, k < l$) abszcisszájú pontokban metszi.

a) Határozzuk meg a parabola $\frac{k}{2}$ abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét!

b) Mekkora területű síkidomot fog közre ez az érintő, az x tengely és a parabola?

c) Mekkora területű síkidomot fog közre ez az érintő, az y tengely és a parabola?

***124.** Az $x^2 + ax + by + c = 0$ egyenletű parabola az x tengelyt az $O(0; 0)$ és az A pontban metszi, tengelypontja a $T(3; 2)$ pont.

a) Határozzuk meg a parabola O -beli és A -beli érintőjének az M metszéspontját!

b) Mekkora az OAM háromszög területe?

c) Mekkora az OM szakasz, az AM szakasz és az OA parabolaív által határolt síkidom területe?

***125.** Egy parabola tengelye párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontja a $T(2; 5)$, egyik pontja az $A(4; 0)$ pont. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a parabolához a -2 , illetve a 4 abszcisszájú pontjában húzott érintő és a parabola zár közre?

126. Két parabola illeszkedik az $A(-2; 3)$ és a $B(4; 3)$ pontra, tengelyük párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontjuk ordinátája 6, illetve 1. Mekkora az általuk közrefogott síkidom területe?

127. Két parabola illeszkedik a $P\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ és a $Q\left(3; \frac{5}{2}\right)$ pontra,

tengelyük párhuzamos az ordinátatengellyel, tengelypontjuk ordinátája $\frac{13}{2}$, illetve 4. Mekkora az általuk közrefogott síkidom területe?

*128. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az y tengelyt a $P(0; -10)$ pontban metszi, az $y = 3x^2$ egyenletű parabolát pedig az $E(1; 3)$ pontban érinti. Mekkora területű síkidomot zár közre ez a két parabola és az x tengely?

129. Adjuk meg a k^2 számot úgy, hogy az $y = k^2 - 4x^2$ és az $y = 1 - \frac{4x^2}{k^2}$ egyenletű parabola közül az egyik háromszor akkora területű síkidomot fogjon közre az x tengellyel, mint a másik.

130. Válasszuk meg a k számot úgy, hogy az $y = x^2 + 3x + 4k$ és az $y = kx^2 + 3x + 4$ egyenletű parabola T területű síkidomot fogjon közre, ha

a) $T=32$; b) $T=5\frac{1}{3}$; c) $T=10$; d) $T=1$.

*131. Válasszuk meg a $k < 2$ számot úgy, hogy az $x^3 + 3x^2 - 5x + y = 10$, az $x^3 + 3x^2 + y = 20$ és az $x = k$ egyenletű görbék 2,5 egységnyi területű síkidomot fogjanak közre.

132. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ függvény egyik zérushelye 1. Mekkora területű síkidomot határol az f függvény grafikonja és az x tengelynek az f másik két zérushelye közötti szakasza?

133. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x + 3$ függvény minimumhelye k , maximumhelye l . Mekkora területű síkidomot fog közre az x tengely, az $x = k$, az $x = l$ egyenletű egyenes és az $y = f(x)$ egyenletű görbe?

134. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe, az $x = k$, az $x = l$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes fog közre?

a) $k=1$, $l=4$; c) $k=0,25$, $l=1$;
b) $k=1$, $l=10^6$; d) $k=10^{-6}$, $l=1$.

135. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{x^3}$ egyenletű görbe, az $x = k$, az $x = l$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes fog közre?

a) $k=1$, $l=4$; c) $k=0,25$, $l=1$;
b) $k=1$, $l=10^6$; d) $k=10^{-6}$, $l=1$.

136. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe, az $x = k$, az $x = l$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes fog közre?

a) $k=1$, $l=4$; c) $k=0,25$, $l=1$;
b) $k=1$, $l=10^6$; d) $k=10^{-6}$, $l=1$.

137. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $y = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ egyenletű görbe, az $x = k$, az $x = l$ és az $y = 0$ egyenletű egyenes fog közre?

a) $k=1$, $l=4$; c) $k=0,25$, $l=1$;
b) $k=1$, $l=10^6$; d) $k=10^{-6}$, $l=1$.

*138. Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az alábbi egyenletekkel megadott görbék fognak közre.

a) $y = e^x$, $x=0$, $x=5$, $y=0$;

b) $y = e^x$, $x=\ln 2$, $x=\ln 25$, $y=0$;

c) $y = e^x$, $x=\ln \frac{1}{4}$, $x=-\ln 2$, $y=0$;

d) $y = xe^{x^2}$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$;

e) $y = xe^{x^2}$, $x=0$, $x=\ln 15$, $y=0$;

f) $y = (1+x)e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;

g) $y = \left(\frac{1}{7} + \frac{x}{7}\right)e^x$, $x=\ln 2$, $x=\ln 8$, $y=0$;

h) $y = (2x+3)e^{x^2+3x}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

5. Térfogatszámítási feladatok

139. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenletű görbékkel határolt síkidomot. Mekkora a síkidom területe és mekkora a keletkező forgástest térfogata?

a) $y = x, \quad y = 2x, \quad x=5;$

b) $y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad x=5;$

c) $y = x^3, \quad y = 2x^3, \quad x=5;$

d) $y = |x|, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x=5.$

140. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenletű görbékkel határolt síkidomot. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

a) $y = 3x^2, \quad y = 2x;$

b) $y = \frac{1}{4}x^2, \quad x+2y = 12, \quad x=0;$

c) $y = 2 - \frac{1}{4}x^2, \quad y=0;$

d) $y = -x^2, \quad x+y+2 = 0.$

141. Mekkora térfogatú forgástest keletkezik, ha az alábbi egyenletű görbék által közrefogott síkidomot megforgatjuk az x tengely körül?

a) $y = x^3, \quad y=0, \quad x=1;$

b) $y = x^3, \quad y=x;$

c) $y = \frac{1}{8}x^3, \quad y=x;$

d) $y = \frac{1}{8}x^3, \quad y = \frac{1}{4}x^2;$

e) $y = \frac{1}{x}, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=2;$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{6}{x}, \quad x=1, \quad x=6;$

g) $y = \frac{1}{x+2}, \quad y = \frac{6}{x+2}, \quad x=-1, \quad x=4;$

h) $y = \frac{1}{x} + 2, \quad y = \frac{6}{x} + 2, \quad x=1, \quad x=6.$

142. Ábrázoljuk az

$$f: [0; 14] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 3 - |x-3|, & \text{ha } x \in [0; 4] \\ 6 - |x-8|, & \text{ha } x \in [4; 14] \end{cases}$$

függvényt.

a) Mekkora az $y = f(x)$ egyenletű görbe és az x tengely által határolt síkidom területe?

b) Mekkora a fenti síkidom x tengely körüli forgatásával létrejött test térfogata?

143. Forgassuk meg a következő egyenletű görbék által körülhatárolt síkidomot az x tengely körül, és számítsuk ki az előálló forgástest térfogatát.

a) $y = \sin x, \quad y = 2 \sin x, \quad (x \in [\pi; 2\pi]);$

b) $y = \sin x, \quad y = 3 \sin x, \quad (x \in [\pi; 2\pi]);$

c) $y = \cos x, \quad y = 2 \cos x, \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right);$

d) $y = \cos x, \quad y = 5 \cos x, \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right);$

e) $y = \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right);$

f) $y = \sin x + 1, \quad y = \sin 2x, \quad x=0, \quad x = \frac{\pi}{2};$

g) $y = \cos x, \quad y = \cos 2x, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad \left(x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right);$

$$h) y = 2 \cos x, \quad y = \cos 2x, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

144. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a parabolaszéletet, amelyet az $y = 18 - \frac{1}{8}x^2$ egyenletű parabola és az $y = k$ egyenletű egyenes fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha
a) $k=0$; b) $k=2$; c) $k=10$; d) $k=16$?

145. Forgassuk meg az x tengely körül azt a parabolaszéletet, amelyet az x tengely és az $y = ax - x^2$ egyenletű parabola fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

$$a) a=10; \quad b) a=4; \quad c) a=1; \quad d) a=\frac{5}{6}?$$

146. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet az $y = x^3 + 8$ egyenletű görbe és a két koordinátatengely által határolt síkidom

a) x tengely körüli; b) y tengely körüli forgatásával kapunk?

147. Az $y = \frac{6}{x}$ egyenletű görbe két pontja: $P(1; p)$ és $Q(4; q)$. Forgassuk meg

a) az x tengely körül; b) az y tengely körül azt a síkidomot, amelyet az adott görbe és a PQ szakasz határol. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

148. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbe által határolt síkidom

a) x tengely körüli; b) y tengely körüli forgatásával keletkezik?

149. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $y = \frac{1}{2}x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbe által határolt síkidom

a) x tengely körüli; b) y tengely körüli forgatásával keletkezik?

150. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\sin x}$$

függvény grafikonja és az x tengely $[0; \pi]$ szakasza határol. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

151. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; k] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

függvény grafikonja, az x tengely $[0; k]$ szakasza és az $x = k$ egyenletű egyenes fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

$$a) k = \frac{\pi}{4}; \quad b) k = \frac{\pi}{2}; \quad c) k = \frac{3\pi}{4}; \quad d) k = \frac{5\pi}{6}?$$

152. Forgassuk meg az abszcisszatengely körül azt a síkidomot, amelyet a

$$[0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

függvény grafikonja és a két koordinátatengely fog közre. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

153. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ egyenletű ellipszis

a) x tengely körüli; b) y tengely körüli forgatásával létrejövő forgástest térfogatát.

154. Forgassuk meg a $2a$ nagytengely-, illetve $2b$ kistengelyhosszúságú ellipszist a nagytengelyének az egyenese körül. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

$$a) a=5, \quad b=4; \quad c) a=60, \quad b=30;$$

$$b) a=5, \quad b=3; \quad d) a=\sqrt{8}, \quad b=\sqrt{2}?$$

155. Az $x^2 - y^2 = 25$ egyenletű hiperbola és az $x = 13$ egyenletű egyenes egy síkidomot fog közre. Mekkora térfogatú test keletkezik, ha ezt a síkidomot megforgatjuk az

- a) x tengely körül; b) y tengely körül?

156. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott síkidomokat, és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

a) $y^2 \leq 10x, \quad x \leq 10;$

b) $x^2 + y^2 \leq 25,$

c) $xy \leq 10, \quad 1 \leq x \leq 10, \quad y \geq 0;$

d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \geq 1, \quad 4 \leq x \leq 5.$

157. Az x tengely $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ szakasza, az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenletű egyenes és

az $y = f(x)$ egyenletű görbe egy síkidomot zár közre. Forgassuk meg ezt a síkidomot az x tengely körül és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

a) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = \operatorname{tg} x;$

b) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = \operatorname{tg} x \cos x;$

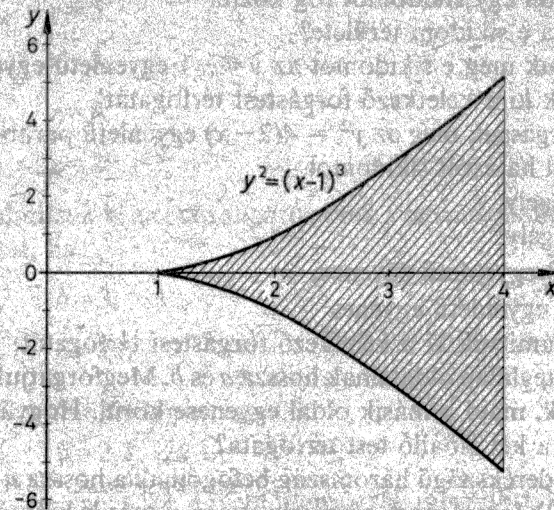
c) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = \operatorname{tg} x \cos^2 x;$

d) $D_f = \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) = \operatorname{tg} x \sin x.$

158. Forgassuk meg az $y^2 = x^3$ egyenletű görbe és az $x = 1$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot

- a) az x tengely körül; b) az y tengely körül,
és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

159. Forgassuk meg az $y^2 = (x-1)^3$ egyenletű görbét (6. ábra) az x tengely körül, majd a keletkező felületet metsszük el az x tengelyre a $P(4; 0)$ pontban állított merőleges sikkal. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?



6. ábra

160. Forgassuk meg az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemzett síkidomokat az y tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgástestek térfogatát.

a) $y^2 \leq 6x, \quad 0 \leq x \leq 2;$

b) $y^2 \leq 4 - x, \quad x \geq 0;$

c) $x^2 \geq y^2, \quad 0 \leq x \leq 4;$

d) $x^2 \geq y^2, \quad -4 \leq x \leq -2.$

*161. Forgassuk meg az $y^2 = 24x$ és az $x = 6$ egyenletű görbékkel határolt síkidomot

- a) az x tengely;
b) az y tengely;

- c) az $y=12$ egyenletű egyenes;
 d) az $x=6$ egyenletű egyenes körül, és számítsuk ki az előálló forgástest térfogatát.

162. A cosinusgörbe és az $y=-1$ egyenletű egyenes a $[-\pi; \pi]$ intervallumon egy síkidomot fog közre.

- a) Mekkora e síkidom területe?
 b) Forgassuk meg e síkidomot az $y=-1$ egyenletű egyenes körül és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát!

***163.** Forgassuk meg az $y^2 = 4(2-x)$ egyenletű parabola és az y tengely által határolt síkidomot

- a) az x tengely;
 b) az y tengely;
 c) az $y=\sqrt{8}$ egyenletű egyenes;
 d) az $x=2$ egyenletű egyenes körül, és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát.

164. Egy téglalap oldalainak hossza a és b . Megforgatjuk a téglalapot az egyik, majd a másik oldal egyenesre körül. Hogyan aránylik egymáshoz a két előálló test térfogata?

165. Egy derékszögű háromszög befogóinak a hossza a és b . Megforgatjuk a háromszöget az egyik, majd a másik befogó egyenesre körül. Hogyan aránylik egymáshoz a két előálló test térfogata?

166. Egy a alapú, h magasságú parabolaszéletet megforgatunk

- a) a tengelye körül;
 b) az alapegyenesre körül;
 c) a csúcserintője körül;
 d) egy, a síkjában a tengelytől $\frac{d}{2}$ távolságra levő egyenes körül.

Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

167. Egy forgásparaboloidból a tengelyére merőleges, a tengelyponttól h távolságra lévő sík R sugarú kört metsz ki. Számítsuk ki a keletkező test térfogatát, ha

- a) $h=4, R=2$;
 b) $h=6, R=12$;
 c) $h=3, R=3$;
 d) $h=10, R=1$.

168. Egy vízzel telt, forgáshenger alakú pohárba tengelypontjával lefelé olyan forgásparaboloidot állítanak, amelynek r cm-es sugara és h cm-es magassága megegyezik a poháréval. Mennyi víz marad a pohárban, ha

- a) $h=10, r=5$;
 b) $h=12, r=3$;
 c) $h=16, r=8$;
 d) $h=20, r=2$.

169. Számítsuk ki az r cm sugarú gömb h cm magasságú szeletének a térfogatát, ha

- a) $r=10, h=3$;
 b) $r=10, h=10$;
 c) $r=10, h=17$;
 d) $r=4,6, h=2,3$.

170. Az $x^2 + y^2 \leq 81$ egyenlőtlenséggel megadott körlemez az $x = \pm 3$ egyenletű egyenesek három részre bontják. Forgassuk meg mindhármat az x tengely körül. Mekkora az egyes részek térfogata?

171. Az $x^2 + y^2 \leq 100$ egyenlőtlenséggel megadott körlemez az $x = \pm 2$ és az $x = \pm 6$ egyenletű egyenesek öt részre osztják. Forgassuk meg valamennyit az x tengely körül. Mekkora a keletkező gömbszeletek és gömbrétegek térfogata?

172. Forgassuk meg az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű ellipszis, az $x=k$

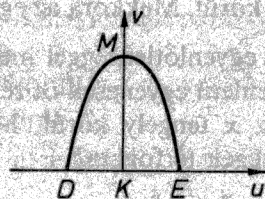
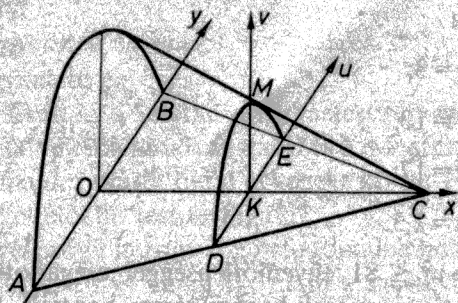
és az $x=l$ egyenletű egyenes által határolt síkidomot az x tengely körül. Mekkora a keletkező forgástest térfogata, ha

- a) $k=0, l=2$; c) $k=2, l=3$;
 b) $k=0, l=3$; d) $k=-2, l=1$?

173. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a; b \in \mathbf{R}^+$) egyenletű ellipszisnek

a) a nagytengely egyenese; b) a kistengely egyenese
 körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata?

*174. A 7. ábrán lévő testnek az $x-y$ koordinátasíkban levő lapja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 21 cm, az ehhez tartozó magassága 30 cm hosszúságú. A test keresztmetszetei parabolaszemek. (Valamennyi ugyanolyan széles mint amilyen magas, vagyis az MK és a DE szakasz egyenlő hosszúságú.) Határozzuk meg a test térfogatát.



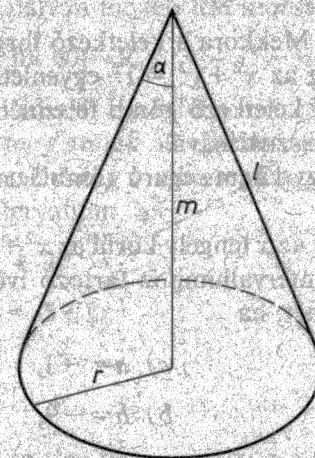
7. ábra

*175. Egy test alap-, illetve fedőlapja egy koordináta-rendszer abszcisszatengelyére az $A(1; 0)$, illetve a $B(3; 0)$ pontban állított merőleges síkban van; az ezekkel párhuzamos síkmetszetek területe fordítottan arányos a sík és az origó távolságának a négyzetével. A 2 abszcisszához tartozó síkmetszet területe 27. Mekkora a test térfogata?

6. Forgásfelületek felszíne

176. Számítsuk ki a 8. ábrán látható forgáskúp felszínét, ha

- a) $r=3, m=4;$ c) $l=18, \alpha=30^\circ;$
 b) $r=7, l=25;$ d) $l=29, m=20.$



8. ábra

177. Forgassuk meg a

$$[0; 14] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 3-|x-3|, & \text{ha } x \in [0; 4] \\ 6-|x-8|, & \text{ha } x \in [4; 14] \end{cases}$$

függvény grafikonját az x tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét.

178. Forgassuk meg az x tengely körül az

$$f: [0; 8] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2\sqrt{x}$$

függvény grafikonját. Számítsuk ki a keletkező forgásfelület felszínét az

$$A = 2\pi \int_a^b x \mapsto f(x) \sqrt{1+f'^2(x)}$$

képletnek megfelelően.

179. Forgassuk meg az x tengely körül az

$$f: \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3$$

függvény grafikonját. Mekkora a keletkező forgásfelület felszíne?

180. Forgassuk meg az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkező gömb felszínét a forgásfelületekre vonatkozó képlet felhasználásával.

181. Számítsuk ki egy 12 cm sugarú gömb 3 cm magasságú göbbsüvegének a felszínét.

182. Forgassuk meg az x tengely körül az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű körnek az $x \in [a; b]$ intervallumhoz tartozó ívét. Számítsuk ki az előálló gömböv felszínét, ha

- a) $a=0, \quad b=4;$ c) $a=-3, \quad b=1;$
 b) $a=4, \quad b=8;$ b) $a=-9, \quad b=-5.$

*183. Vezessünk le képletet adott gömböv és göbbsüveg felszínének kiszámítására.

7. Az integrálszámítás fizikai alkalmazásai

184. Egy egyenes pályán mozgó pont sebességfüggvénye

$$v: [0; 10] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto 8t + 10.$$

Mekkora utat tesz meg ez a pont? (Az időt s -ban, a sebességet m/s -ban mérjük.)

185. Egy egyenes pályán mozgó pont sebességfüggvénye

$$v: [0; 12] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto 5 - gt,$$

ahol g (m/s^2) a nehézségi gyorsulás, az időt s -ban, a kitérést m -ben mérjük. Mekkora a pont kitérése?

186. Egy pont a $[0; 20]$ időintervallumban egyenes vonalú mozgást végez, sebessége minden egyes t időpontban $12 - 2t$.

a) Melyik időpontban maximális a pontnak a kezdőponttól való távolsága?

b) Mekkora ez a maximális távolság?

187. Egy egyenes pályán mozgó test sebességfüggvénye:

$$v: [0; 60] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto t^2 - 3t + 5,$$

a 0 időpontban a kitérés 8. Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.

188. Határozzuk meg annak az egyenes vonalú mozgásnak az s kitérésfüggvényét, amelynél v a sebességfüggvény, és a mozgás időtartama a $[0; 20]$ intervallum, ha

a) $s(0) = 25, \quad v(t) = 7;$

b) $s(0) = 10, \quad v(t) = 5 + 2t;$

c) $s(6) = 13, \quad v(t) = \frac{13}{5} - \frac{t}{5};$

d) $s(0) = 0, \quad v(t) = t^2 - 2t.$

189. Egy pont egyenes pályán mozog a $[-10; 10]$ időintervallumban. Kitérésfüggvénye az s , sebességfüggvénye a v . Határozzuk meg az s függvényt, ha

a) $s(0) = 0, \quad v(t) = 2t - 1;$

b) $s(-10) = 0, \quad v(t) = 5 - \frac{1}{2}t;$

c) $s(1) = 5,3, \quad v(t) = 2,4t^2 - 6t + 1;$

d) $s(2) = 50, \quad v(t) = 12 - 16t^3.$

190. Egy egyenes pályán a $[0; 15]$ időintervallumban a v sebességfüggvény szerint mozgó pont kitérésfüggvénye s . Mekkora a 2 és a 12 időpontbeli helyzet távolsága, ha

a) $s(1) = -1, \quad v(t) = 2t - 2;$

b) $s(6) = 2, \quad v(t) = 14 - 2t;$

c) $s(2) = 7, \quad v(t) = 3t^2;$

d) $s(7) = -5, \quad v(t) = 0,4t - 2,8.$

191. Melyik felesleges az előző feladat adatai közül?

192. Egy pont egyenes pályán a $[0; 20]$ időintervallumban 8 m/s^2 gyorsulással mozog, kezdősebessége 100 m/s . A 10 s időpontban a kezdőponttól 800 m távolságra van.

a) Írjuk fel a mozgás sebességfüggvényét.

b) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.

c) Mely időpontokban 0 a kitérés?

d) Mekkora a $[7; 18]$ időintervallumhoz tartozó kitérés?

193. Egy pont a $[0; 20]$ időintervallumban egyenes pályán mozog, kitérésfüggvénye s , sebességfüggvénye v , gyorsulásfüggvénye

$$a: [0; 20] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto kt + l.$$

Határozzuk meg az s és a v függvényt, ha

a) $k=0, \quad l=3, \quad s(0)=0, \quad v(0)=0;$

b) $k=4, \quad l=0, \quad s(0)=5, \quad v(0)=0;$

c) $k=6, \quad l=4, \quad s(0)=5, \quad v(0)=-10;$

d) $k=-36, \quad l=20, \quad s(0)=200, \quad v(0)=75,$

194. Egy egyenes pályán, a

$$v: [t_0; 4\pi] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto -4 \sin t$$

sebességfüggvénnyel mozgó pont az időmérés kezdetekor 2 m távolságra volt kiindulási helyétől.

a) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét!

b) Határozzuk meg a t_0 számot, ha $-\pi < t_0 < 0$.

c) Mekkora a pont maximális kitérése?

d) Mekkora a kezdő és a véghelyzet távolsága?

195. Egy egyenes pályán a

$$v: [0; 3] \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto 9t^2 + 4$$

sebességfüggvénnyel mozgó pont a 2 s időpontban a kiindulási ponttól 24 m távolságra volt.

a) Írjuk fel a mozgás kitérésfüggvényét.

b) Határozzuk meg a gyorsulásfüggvényét.

c) Mekkora a pont maximális kitérése?

d) Mekkora a kezdő és a véghelyzet távolsága?

196. A 9. ábrán látható függőleges lemez ρ sűrűségű folyadékba merül. Számítsuk ki a rá ható hidrosztatikai nyomóerőt az

$$F = \rho g \int_a^b x \mapsto xf(x)$$

képlettel, ha a folyadék felszínét a koordináta-rendszer y tengelye jelzi, és

a) $\rho g = 10, \quad a = 0, \quad b = 6, \quad f(x) = x + 2;$

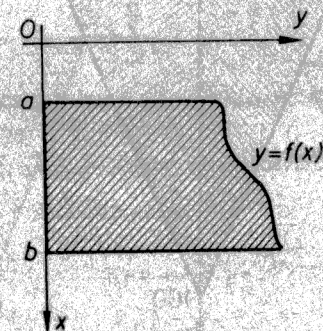
b) $\rho g = 10, \quad a = 2, \quad b = 6, \quad f(x) = x + 2;$

c) $\rho g = 12, \quad a = 1, \quad b = 4, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2;$

d) $\rho g = 12, \quad a = 1, \quad b = 4, \quad f(x) = \sqrt{x};$

e) $\rho g = 10, \quad a = 1, \quad b = 6, \quad f(x) = \frac{6}{x};$

f) $\rho g = 10, \quad a = 0, \quad b = 6, \quad f(x) = x^2 - 6x + 10;$



9. ábra

g) $\rho g = 10$, $a = 0$, $b = 6$, $f(x) = 6x - x^2$;

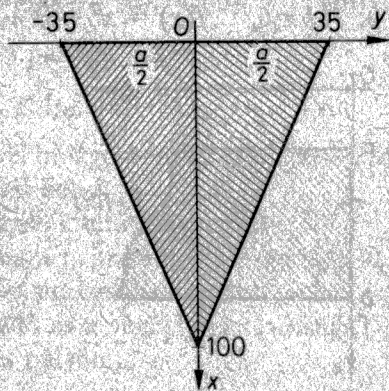
h) $\rho g = 10$, $a = 0$, $b = 6$, $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$.

197. Egy téglalap úgy merül vízbe, hogy az a hosszúságú oldala a víz felszínén van, a b hosszúságú pedig függőleges.

- Mekkora a téglalpra ható hidrosztatikai nyomóerő?
- Bontsuk a téglalapot két részre a függőleges középvonalával. Mekkora a két részre ható nyomóerő?
- Bontsuk a téglalapot két részre a vízszintes középvonalával! Mekkora a két részre ható nyomóerő?
- Bontsuk a téglalapot két részre az egyik átlójával! Mekkora a két részre ható nyomóerő?
- Bontsuk a téglalapot négy részre a két átlójával! Mekkora az egyes részekre ható nyomóerő?
- Bontsuk a téglalapot nyolc részre az átlóival és a középvonalai-val! Mekkora az egyes részekre ható nyomóerő?
- Bontsuk fel a téglalapot egy vízszintes egyenessel két részre úgy, hogy a részekre egyenlő hidrosztatikai nyomóerő hasson.
- Ellenőrizzük, hogy a fenti esetekben a hidrosztatikai nyomóerő egyenlő a súlypont mélységének és a területnek a szorzatával.

198. Számítsuk ki azt a nyomóerőt, amelyet a víz gyakorol egy 8 m széles, 6 m magas, téglalap alakú zsilipkapura, ha a víz

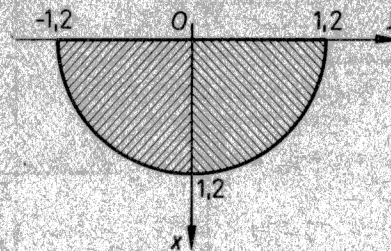
- a kapu felső széléig ér;
- a kapu fele magasságáig ér.



10. ábra

199. Mekkora erővel nyomja a víz azt a függőleges, egyenlő szárú háromszöget, amelynek a 70 cm-es alapja a víz felszínén van, magassága pedig 1 m (10. ábra)?

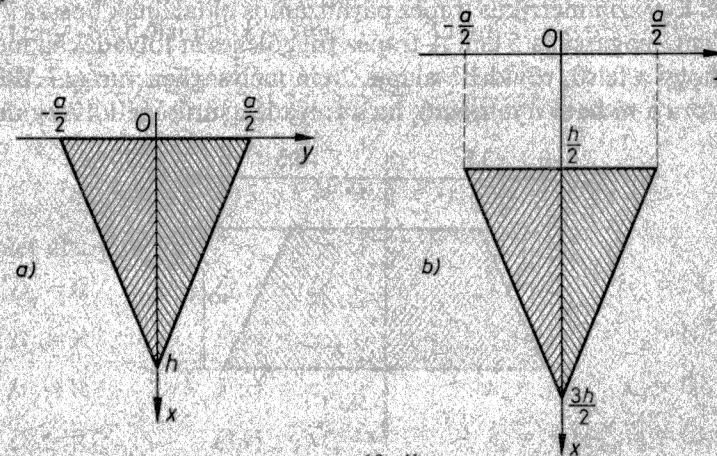
200. Egy félkör alakú függőleges lemez úgy merül a vízbe, hogy 2,4 m-es átmérője a víz felszínén helyezkedik el (11. ábra). Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő?



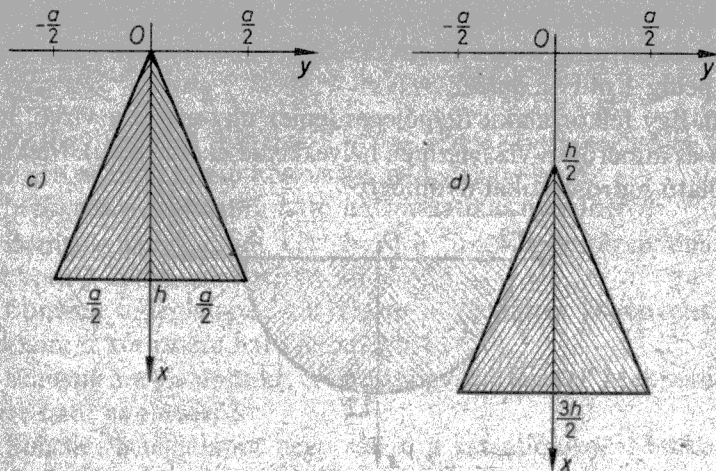
11. ábra

201. Mekkora hidrosztatikai nyomóerő hat az a alapu, h magasságú, egyenlő szárú háromszög alakú függőleges lemezre, amelynek a tengelye merőleges a víz felszínére (12. ábra) és

- alapja a víz felszínén, csúcsa h mélységben van;
- alapja $\frac{h}{2}$, csúcsa $\frac{3h}{2}$ mélységben van;



12. ábra



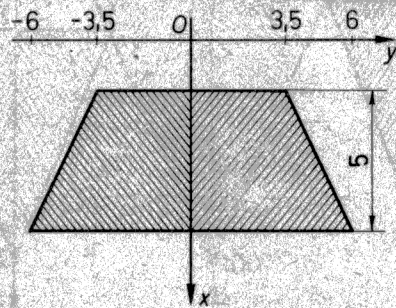
12. ábra

c) csúcsa a víz felszínén, alapja h mélységben van;

d) csúcsa $\frac{h}{2}$, alapja $\frac{3h}{2}$ mélységben van?

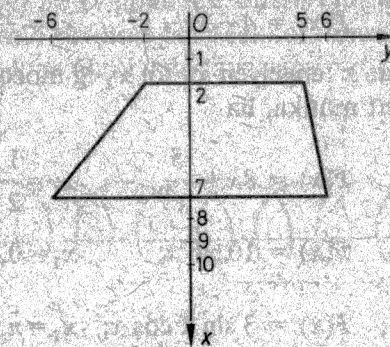
202. Egy víztároló zárófala trapéz alakú, felső alapja 20 m, az alsó 10 m hosszúságú, a trapéz magassága 6 m. Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő, ha a tartály tele van vízzel?

203. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza 7 cm és 12 cm, magassága 5 cm. A trapéz függőlegesen folyadékba merül úgy, hogy a felső, rövidebb alapja 2 cm mélységben van (13. ábra). Mekkora a rá ható nyomóerő, ha a folyadék sűrűsége $1,17 \text{ kg/dm}^3$?



13. ábra

204. A 14. ábrán az y tengely folyadékfelszín jelez, az x tengely függőleges és az $x-y$ síkban levő trapéz a folyadékba merül (1 egység = 1 dm). Mekkora a rá ható nyomóerő, ha a folyadék sűrűsége $1,17 \text{ kg/dm}^3$?



14. ábra

205. Egy félellipszis úgy merül függőlegesen a vízbe, hogy 4 cm-es kistengelye a víz felszínén van. Mekkora a rá ható hidrosztatikai nyomóerő, ha az ellipszis nagytengelyének hossza 8 cm?

206. Egy benzintartály álló henger alakú, átmérője 3 m, magassága 3,5 m. Mekkora a tartály alap- és oldalfalára ható nyomóerő, ha a benzin sűrűsége 700 kg/m^3 és a benzinoszlop magassága

a) 1 m; b) 2 m; c) 3 m; d) 3,5 m?

207. Egy anyagi pont az F erő hatása alatt az x tengelyen x_1 -ből x_2 -be mozdul el. F az $[x_1; x_2]$ -on nemnegatív és folytonos. Számítsuk ki a végzett munkát a

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F$$

képlet alapján, ha

a) $D_f = \mathbf{R}$, $F(x) = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 24$;

b) $D_f = \mathbf{R}^+$, $F(x) = x$; $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $F(x) = x^2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $F(x) = x^2$; $x_1 = -10$, $x_2 = 10$;

- e) $D_F = \mathbf{R}^+$, $F(x) = x^3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 10$;
 f) $D_F = [-30; 10]$, $F(x) = x + 30$; $x_1 = -5$, $x_2 = 5$;
 g) $D_F = [-2, 8]$, $F(x) = 16 + 6x - x^2$; $x_1 = -2$, $x_2 = 8$;
 h) $D_F = [-4; 1]$, $F(x) = 4 - 3x - x^2$; $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

208. Egy pont az x tengelyen x_1 -től x_2 -ig mozog, az F erő hat rá. Mekkora a végzett munka, ha

- a) $D_F =]0; 3]$, $F(x) = 8x + \frac{5}{x^2}$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$;
 b) $D_F = [0; \pi]$, $F(x) = 10 \sin x$; $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$;
 c) $D_F = \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$, $F(x) = 3 \sin x \cos x$; $x_1 = \pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$;
 d) $D_F = [-\pi; \pi]$, $F(x) = |x| + \sin x$; $x_1 = -\pi$, $x_2 = \pi$?

209. Egy anyagi pont az x tengelyen az

$$F: [0, 2; 10] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3\sqrt{5x-1}$$

erő hatása alatt mozog. Mekkora a végzett munka, amíg a pont x_1 -ből az x_2 -be mozdul el, ha

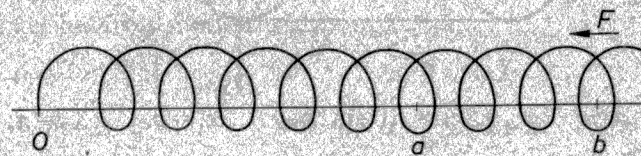
- a) $x_1 = 0,2$, $x_2 = 1$;
 b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;
 c) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;
 d) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$?

***210.** Egy fémrugó összenyomásához szükséges erő arányos a rugó rövidülésével. Mekkora munkát végzünk, ha 30 cm-rel nyomjuk össze azt a rugót, amelynél a szükséges erő minden 2 cm rövidülés után 50 N-nal nő?

***211.** Mekkora munkát végzünk, ha 4 cm-rel nyújtunk meg egy olyan rugót, amely 10 N terhelés hatására 1 cm-rel nyúlik meg?

***212.** Mekkora munkát végzünk, ha 6 cm-rel nyújtunk meg egy olyan rugót, amelyet 2 N erő 1 cm-rel nyújt meg?

***213.** Egy rugó O végpontját rögzítettük, a másik végén levő tömegpontot a rugó az O pont felé húzza (15. ábra). A húzóerő arányos az O -tól való távolsággal. Mekkora munka szükséges ahhoz, hogy a pontnak az O -tól való távolsága b -ről a -ra csökkenjen?



15. ábra

***214.** Az e_1 pozitív és az e_2 negatív elektromos töltés távolsága r , a közöttük levő vonzóerő $F(r) = k \frac{e_1 e_2}{r^2}$ ($k \in \mathbf{R}$). Mekkora a végzett munka, miközben a két töltés távolsága r_1 -ről r_2 -re csökken?

215. Mekkora munka szükséges ahhoz, hogy egy, a Föld felszínén levő m tömegű testet sugárirányban a Földtől $\frac{R}{k}$ távolságra elmozdítsunk, ha R a Föld sugara? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el.)

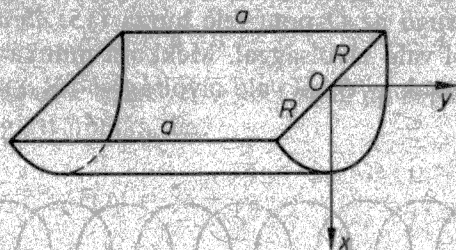
- a) $k = 10^6$; b) $k = 10^3$; c) $k = 2$; d) $k = 1$.

***216.** Mekkora munkát végzünk, ha egy R sugarú félgömbből kiszivattyúzzuk a vizet?

***217.** Egy henger alakú víztartály átmérője 1 m, a víz 2,8 m magasan áll benne. A vízkivezető-nyílás 3 m-rel a víz felszíne fölött helyezkedik el. Számítsuk ki azt a munkát, amellyel a víz a tartályból kiszivattyúzható.

***218.** Mekkora munkát végzünk, amikor egy vízzel telt forgáskúpából kiszivattyúzzuk a vizet, ha a kúp fedőkörének sugara R és a mélysége H ?

*219. Egy vályú félbevágott forgáshenger alakú, hossza a , sugara R . Mekkora munkával lehet kiszivattyúzni a vályút megtöltő vízmennyiséget (16. ábra)?



16. ábra

*220. Egy vízzel teli katlan forgásparaboloid alakú. Mélysége 0,5 m, fedőkörének sugara 0,4 m. Számítsuk ki a víz kiszivattyúzásához szükséges munkát.

221. Egy vízzel teli, henger alakú edény alapterülete $T=420$ (cm²), magassága $h=40$ (cm). Az alján t (cm²) területű nyílás van. Mennyi idő alatt folyik ki a nyíláson az egész vízmennyiség, ha

- a) $t=2$; b) $t=1$; c) $t=10$; d) $t=100$?

(Útmutatás: A kifolyási sebességet a $v = \mu\sqrt{2gx}$ képlet adja, ahol x (cm) a folyadékoszlop magassága, μ pedig konstans, amit a folyadék minősége, a nyílás alakja stb. határoz meg. Vegyük itt a $\mu=0,6$ értéket.)

222. Határozzuk meg az $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenesek által közrefogott síkidom $S(s_1; s_2)$ súlypontját az

$$s_1 = \frac{\int_a^b x \mapsto xf(x)}{\int_a^b x \mapsto f(x)}, \quad s_2 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b x \mapsto f^2(x)}{\int_a^b x \mapsto f(x)}$$

képletnek megfelelően, ha

a) $a=0, \quad b=8, \quad f(x) = \frac{1}{2}x+8;$

b) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = x^2;$

c) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = \sqrt{x};$

d) $a=-1, \quad b=1, \quad f(x) = 1-x^2.$

223. Határozzuk meg az $y = x^2+1$, $x=a$, $x=b$ és $y=0$ egyenletű görbékkel határolt síkidom súlypontját, ha

a) $a=0, b=1;$

c) $a=2, b=3;$

b) $a=1, b=2;$

d) $a=-2, b=2.$

224. Hol van az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott síkidom súlypontja?

a) $y \leq 2x-x^2, \quad y \geq 0; \quad c) \quad y \leq 4-x^2, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0;$

b) $y \leq 4-x^2, \quad y \geq 0, \quad d) \quad y \leq x^3-1, \quad y \geq 0, \quad 2 \leq x \leq 5.$

225. Határozzuk meg egy adott

- a) félkör; b) negyedkör súlypontját.

226. Forgassuk meg a koordináta-rendszer abszcisszatengelye körül azt a síkidomot, amelyet az $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$, $y=0$ egyenletű egyenesek fognak közre. Határozzuk meg a keletkező forgástest $S(s_1; s_2)$ súlypontját az

$$s_1 = \frac{\int_a^b x \mapsto xf^2(x)}{\int_a^b x \mapsto f^2(x)}, \quad s_2 = 0$$

képleteknek megfelelően, ha

a) $a=0, \quad b=8, \quad f(x) = 5;$

b) $a=-2, \quad b=10, \quad f(x) = x+4;$

- c) $a=1, \quad b=5, \quad f(x) = 5-x;$
 d) $a=0, \quad b=4, \quad f(x) = \sqrt{x};$
 e) $a=0, \quad b=2, \quad f(x) = x^2;$
 f) $a=-1, \quad b=0, \quad f(x) = 5x^3;$
 g) $a=-9, \quad b=3, \quad f(x) = \begin{cases} x+9, & \text{ha } x \in [-9; 0], \\ 9-x^2, & \text{ha } x \in]0; 3] \end{cases};$
 h) $a=0, \quad b=7, \quad f(x) = \begin{cases} 4-|x-2|, & \text{ha } x \in [0; 3] \\ 5-|x-5|, & \text{ha } x \in]3; 7] \end{cases};$

227. Határozzuk meg egy forgáskúp súlypontját!

228. Határozzuk meg egy félgömb súlypontját!

229. Határozzuk meg egy félellipszoid súlypontját!

230. Határozzuk meg egy forgásparaboloid súlypontját!

231. Határozzuk meg az $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a, x=b, y=0$ egyenesek által közrefogott, ρ sűrűségű lemeznek az x , illetve az y tengelyre vonatkozó I_x , illetve I_y tehetetlenségi nyomatékát az

$$I_x = \frac{1}{3} \rho \int_a^b x \mapsto f^3(x), \quad I_y = \rho \int_a^b x \mapsto x^2 f(x)$$

képleteknek megfelelően, ha

- a) $a=0, \quad b=10, \quad f(x) = 4;$
 b) $a=3, \quad b=10, \quad f(x) = 4;$
 c) $a=2, \quad b=9, \quad f(x) = 4;$
 d) $a=0, \quad b=6, \quad f(x) = x+1;$
 e) $a=-1, \quad b=1, \quad f(x) = 1-x^2;$
 f) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = 1-x^2;$
 g) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = \sqrt{x};$
 h) $a=1, \quad b=4, \quad f(x) = 4-|x-3|.$

232. Határozzuk meg egy téglalapnak az oldalegyenesekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

233. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúak. Mekkora a háromszögnek

a) a szimmetriatengelyére; b) az alapegyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

234. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a , illetve b . Mekkora a háromszögnek az egyes befogók egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

235. Egy h magasságú parabolaszélet alapjának a hossza a . Vágjuk el a parabolaszéletet a szimmetriatengelyével. Mekkora a fél parabolaszéletnek az alap egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

236. Forgassuk meg a koordináta-rendszer x tengelye körül azt a síkidomot, amelyet az $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, nemnegatív, folytonos függvény grafikonja és az $x=a, x=b, y=0$ egyenletű egyenesek fognak közre. Határozzuk meg a keletkező, ρ sűrűségű forgástestnek a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát az

$$I = \frac{\rho \pi}{2} \int_a^b x \mapsto f^4(x)$$

képlet szerint, ha

- a) $a=0, \quad b=10, \quad f(x) = 3;$
 b) $a=2, \quad b=10, \quad f(x) = 3;$
 c) $a=0, \quad b=10, \quad f(x) = \frac{1}{5}x;$
 d) $a=-1, \quad b=6, \quad f(x) = x+2;$
 e) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = \sqrt{x};$
 f) $a=0, \quad b=100, \quad f(x) = \sqrt{x};$
 g) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = x^2;$
 h) $a=0, \quad b=1, \quad f(x) = x^3.$

237. Számítsuk ki az r sugarú, h magasságú
- a) forgáshengernek;
 - b) forgaskúpnak;
 - c) forgásparaboloidnak
- a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

238. Igazoljuk, hogy
- a) a forgáshengernek;
 - b) a forgaskúpnak;
 - c) a forgásparaboloidnak
- a tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos a test tömegével és a sugár négyzetével.

239. Számítsuk ki az R sugarú gömbnek egy átmérője egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát (q legyen 27).

240. Igazoljuk, hogy egy gömbnek az egyik átmérő egyenesére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a tömeg $\frac{2}{5}$ részének és a sugár négyzetének a szorzatával egyenlő.

241. Igazoljuk, hogy ha egy $2a$ nagytengelyű, $2b$ kistengelyű ellipszist a nagytengely egyenesese körül megforgatunk, akkor a keletkező testnek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenesen arányos a test tömegével és a b^2 -tel. Számítsuk ki ezt a tehetetlenségi nyomatékot.