90. Adjuk meg az f függvénynek olyan lehető legbővebb leszűkítését, amely deriválható!

a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $\quad x \mapsto \dfrac{|x-3|}{x-3}$;

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad x \mapsto \dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

c) $D_f = [-2; 2]$, $\quad x \mapsto [x^2-1]$;

d) $D_f = [-2; 2]$, $\quad x \mapsto (x^2-1)^2$.

***91.** Értelmezzünk függvényt a valós számok halmazának a lehető legbővebb részhalmazán az

$$x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

hozzárendelési szabállyal. Igazoljuk, hogy e függvény differenciálható, és határozzuk meg a deriváltfüggvényt.

92. Deriválható-e az alábbi f $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény?

a) $f(x) = x|x|$;

b) $f(x) = x|x+1|+|x+1|+1$;

c) $f(x) = x|x+2|+2|x+2|+2$;

d) $f(x) = x|x+k|+k|x+k|+k \quad (k \in \mathbf{R})$.

7. Deriválási szabályok

93. Deriváljuk az $f+g$, az $f-g$ és a $g-f$ függvényt.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^2-x$,

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3-2x^2-x+1$;

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1,$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^3 - x^2 + x - 1;$

c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 4x^5 - 3x^4 + x^2 - x + 6,$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 1;$

d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^4 - 3x^3 + 2x - 4,$

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1.$

94. Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $f(x) = (x+1)(x-1),$

$g(x) = (x+2)(x-4),$

$h(x) = (x+3)(x+2);$

b) $f(x) = (x+1)(3x^2 - 5x + 6),$

$g(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 4),$

$h(x) = (x+5)(x^2 - 3x + 1);$

c) $f(x) = (1 + x^2)(2x^2 - x + 3),$

$g(x) = (5 - 2x^2)(3x - x^2),$

$h(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3x - 1);$

d) $f(x) = (1 + x^4)(x^2 - 3x^5),$

$g(x) = (x^3 + x^2)(x^4 + 3),$

$h(x) = (x^5 - x^2)(3x^4 - 2x^3).$

95. Deriváljuk az

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x(x+2)^2 (x-2)^2$$

függvényt! Mennyi $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ és $f'(2)$?

96. Határozzuk meg az f' és a g' függvényt, ha

a) $(f+g)': \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^4,$

$(f-g)': \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 50;$

b) $(f+g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2x^5+4$,

$(f-g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 6-2x^5$;

c) $(f+g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x^3+6x$,

$(f-g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2x^4-6x+10$;

d) $(f+g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2}$,

$(f-g)'$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1-x}{x^2+2}$.

97. Melyik függvény deriváltja az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény?

a) $x \mapsto 5x^4+8x^3-2x+3$;

b) $x \mapsto x^5-4x^3+10$;

c) $x \mapsto 3x^3+x^2-6x+1$;

d) $x \mapsto 3x^5+2x^4-3x^3+x^2-6x+1$.

98. Deriváljuk az alábbi függvényeket a szorzat deriválási szabályával.

a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto (2x^2-x)(x^3+5x-1)$;

b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto (x^3+4x^2-6)(2x^2+3x+2)$;

c) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto (3x^2-x+2)(2x^5-6x^2+1)$;

d) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto (8x^5-2x^4+5)(1-x^4)$.

99. Igazoljuk, hogy ha az f a 0 helyen differenciálható $A\to\mathbf{R}$ ($A\subset\mathbf{R}$) függvény, akkor a

$$\varphi: A\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2 f(x)$$

függvény is differenciálható a 0 helyen és $\varphi'(0) = 0$!

100. Deriváljuk az f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt.

a) $f(x) = (x+3)(x-1)^2$;

b) $f(x) = (x^2-3)^2(x^2+3)$;

c) $f(x) = (x^2-3)(x^2+3)^2$;

d) $f(x) = (x^4+2x-1)(2x^3+1)^2$.

101. Igazoljuk, hogy ha az f, g és h differenciálható függvény és az fgh függvény létezik, akkor fgh is differenciálható és

$$(fgh)' = f'gh+fg'h+fgh'.$$

102. Az előző feladatban megadott képlet felhasználásával deriváljuk az f függvényt.

a) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto (2x^2+5)(x^3-4x+1)(x^4-3)$;

b) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto (3x-x^3)(4-2x+5x^2)(x^2+3)$;

c) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto (5x^4-3x^2+x)(8x^2-6x)^2$;

d) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \to (x+2x^3+x^5)(x+3)^2$.

103. Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto (x-2)^3$;

b) $x \mapsto (1+2x-x^2)^3$;

c) $x \mapsto (2x+5)^3$;

d) $x \mapsto (ax+b)^3 \quad (a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R})$.

104. Igazoljuk, hogy ha az f differenciálható függvény, akkor az f^3 is differenciálható és

$$(f^3)' = 3f^2f'.$$

105. Határozzuk meg az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2(1-x^2)^4$$

függvény deriváltjának az összes zérushelyét.

106. Deriváljuk az f függvényt.

a) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto (5x+1)^6$;

b) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto (x^2-1)^5$;

c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto (x^3+4x-1)^3;$

d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto (x-5x^3)^6.$

107. Deriváljuk az

$$u:]0;1[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

és a

$$v:]0;1[\to \mathbf{R}; \quad x \mapsto \frac{x-1}{x}$$

függvényt! Igazoljuk, hogy $v' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

108. Deriváljuk az fg és az $\dfrac{f}{g}$ függvényt.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^2+2,$
$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3x^3+3x;$

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2x^2-x,$
$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3x^2-6x^3.$

109. Igazoljuk, hogy ha a, b, c és d valós számok ($c \neq 0$), akkor az

$$\left(\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

függvény deriváltja az

$$\left(\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

függvény.

110. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}, \qquad f(x) = \frac{5x+2}{x-3},$$

$$D_g = \mathbf{R} \setminus \{2\}, \qquad g(x) = \frac{4x+5}{3x-6},$$

$$D_h = \mathbf{R} \setminus \{1\}, \qquad h(x) = \frac{2x-4}{3x-3}.$$

111. Deriváljuk az f függvényt!

a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{2x-8}$;

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{5x+1}{2x-x^2}$;

c) $D_f = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{3}{x^3+4x+1}$;

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x-x^2}{2x^2-8}$.

112. Deriváljuk az alábbi trigonometrikus függvényt.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2 \sin x + \cos x$;

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5 \sin x - 3 \cos x$;

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2 \sin x \cos x$;

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5 \sin 2x - 6 \cos x$;

e) $(\mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{5 \sin 2x}{\sin x}$;

f) $(\mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{5 - \sin 2x}{\sin x}$;

g) $\left(\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}\right) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x$;

h) $\left(\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}\right) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\sin 2x}$.

113. Határozzuk meg az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény első, második és harmadik deriváltját.

a) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 1$;

b) $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + 3;$

c) $f(x) = (x+5)(3x^2 - 5x + 2);$

d) $f(x) = (x^2 - 7)(x^3 + 2x - 3).$

114. Határozzuk meg az f függvény negyedik deriváltját.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 3x^2 - 5x + 2;$

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x^6 - 6x^3 + 2x^2}{x};$

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0; -2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^6 + 2x^5}{x^2 + 2x} + 5x^7;$

d) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 3 \sin x - 5 \cos x.$

115. Hányadik deriváltja az f-nek az azonosan 0 függvény?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1;$

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 1};$

c) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = (x^2 - 2)(1 + x)^3;$

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}.$

116. Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (1 + x^2)^{100}$ függvénynek hányadik deriváltja
a) 199-edfokú;
b) századfokú;
c) elsőfokú;
d) nulladfokú?

117. Mennyi az n, ha az f függvény n-edik deriváltja elsőfokú függvény?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5;$

b) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4 - 2x^6 + x^8;$

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = (x-5x^2)(x^2+3x-4)$;

d) $D_f = \mathbf{R}$; $f(x) = (2x^3-x^2+5x-1)^7$.

118. Határozzuk meg a b számot úgy, hogy az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto (x+1)(x+b)(x+8)$$

függvény második deriváltja a -4 helyen 0 legyen.

119. Határozzuk meg az a, b, c, d, e számot úgy, hogy az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + e$$

függvény grafikonja illeszkedjék az $A(0;\, 4)$ és a $B\left(2;\, \frac{34}{3}\right)$ pontra, az f'' függvény grafikonja pedig illeszkedjék a $C(0;\, 2)$, a $D(1;\, 0)$ és az $E(3;\, 2)$ pontra.

8. Függvények differenciálása

120. Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto x+1$, $x \mapsto 2x^2$, $x \mapsto (x+1)^2$, $x \mapsto 1-x^2$;

b) $x \mapsto 5$, $x \mapsto -x$, $x \mapsto \frac{x}{2}$, $x \mapsto \sqrt{3}x+\sqrt{2}$;

c) $x \mapsto x^2+4$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^3$, $x \mapsto \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}x^2$, $x \mapsto 2x^4$;

d) $x \mapsto x+7$, $x \mapsto 5x^2$, $x \mapsto 1-3x^2$, $x \mapsto (x+2)^2$;

e) $x \mapsto \frac{2x-4}{7}$, $x \mapsto 0{,}25x^3$, $x \mapsto x^2+4x$, $x \mapsto x^3-3x$;

f) $x \mapsto 1-x$, $x \mapsto x-x^2$, $x \mapsto 6-3x^2$, $x \mapsto 1-3x+6x^2$;

g) $x \mapsto x - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$, $x \mapsto x^2 + 2x - 7$, $x \mapsto (x+2)^2$, $x \mapsto (x+2)^3$;

h) $x \mapsto (x+1)(x-1)$, $x \mapsto (x-6)(3-2x)$, $x \mapsto (2x-1)^2$, $x \mapsto 3x - 2(1-x)(2+x)$.

121. Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 5x^4 - x^3 + \frac{1}{4}$, $x \mapsto 0{,}3x^5 - \frac{x^3}{2} + 2x^2 - x + 1$;

b) $x \mapsto 2\pi + \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 7$, $x \mapsto -x^3 - 3x^2 - 6x - 5$;

c) $x \mapsto 5 - 6x + 17x^4$, $x \mapsto 3x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 5x^2 - 8$;

d) $x \mapsto x^2(1-x^2)$, $x \mapsto (x^2+x+1)(x^2-x+1)$;

e) $x \mapsto 5x^2(x-x^2)$, $x \mapsto (x^2+1)(3-5x^2)$;

f) $x \mapsto (1-3x+7x^2)(-5x^2-2)$, $x \mapsto (x^3-3x)(1-2x^2)$;

g) $x \mapsto (x^2-4x)^2$, $x \mapsto (x^3-2)(x^3+3)$;

h) $x \mapsto (x+1)(x+2)(x+3)$, $x \mapsto (2x-3)^4$.

122. Számítsuk ki az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

függvénynek a $-1, 0, 1$ helyekhez tartozó pontbeli deriváltját.

123. Mennyi az $f'(2) + f'(-2)$?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 3$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$;

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{3}{x^2} + 2 + 4x^2$.

124. Mennyi az $f'(2)-f'(-2)$?

a) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = 5x^3-3x-4;$

b) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = 2x^7+3x^3+x^2+3x-5;$

c) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = x^3+\frac{5}{x};$

d) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = \frac{5}{x^4}-\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x^2}-5x.$

125. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$, $\quad g(x) = \frac{2x-3}{5-4x}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$, $\quad h(x) = \frac{5}{6x-4};$

b) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{\pm1\}$, $\quad f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{7}\right\}$, $\quad g(x) = \frac{2x^2}{1-7x}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{\pm2\}$, $\quad h(x) = \frac{2x+4}{x^2-4};$

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{6\}$, $\quad f(x) = \frac{5}{6-x}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{0{,}3\}$, $\quad g(x) = \frac{-7x}{3-10x}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad h(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3};$

d) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{2\}$, $\quad g(x) = \dfrac{4-x^2}{4-4x+x^2}$,

$D_h = \mathbf{R}$, $\quad h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

126. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^4-3x^3+x^2}{2x^2}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{0;\ -1\}$, $\quad g(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{-6\}$, $\quad h(x) = \dfrac{x^3+6x^2}{x^2+12x+36}$;

b) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = x+x^{-2}-0{,}2x^{-5}$,

$D_g = \mathbf{R}$, $\quad g(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\quad h(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x-1}$;

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x^4-6x^3+3x^2-4}{x^3}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{0;\ 2\}$, $\quad g(x) = \dfrac{3x-1}{2x-x^2}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{-1;\ 3\}$, $\quad h(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

d) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+1}$,

$$D_g = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}, \qquad g(x) = \frac{2x^2 - x}{3x^2 + x},$$

$$D_h = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}, \qquad h(x) = \frac{2x - 1}{3x^2 + x}.$$

127. Deriváljuk kétszer az alábbi függvényeket.

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = |x|,$

$D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = x|x|,$

$D_h = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad h(x) = \dfrac{x}{|x|}.$

128. Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto \sqrt{x}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^3}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^4};$

b) $x \mapsto x\sqrt{x}, \qquad x \mapsto x\sqrt[3]{x}, \qquad x \mapsto x\sqrt[5]{x^2}, \qquad x \mapsto x^2\sqrt[3]{x};$

c) $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, \qquad x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x};$

d) $x \mapsto \dfrac{-x^{0,4}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \mapsto \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$

e) $x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}, \qquad x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{2x}};$

f) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}, \qquad x \mapsto \sqrt[3]{3x\sqrt{5x}};$

g) $x \mapsto \sqrt[5]{x^2\sqrt{\sqrt[3]{x}}}, \qquad x \mapsto \sqrt[4]{x^{0,5}\sqrt[3]{x^{0,3}}};$

h) $x \mapsto \frac{3}{4}x^3\sqrt{x} - \frac{2}{7}x^5\sqrt{x} + \frac{5}{11}x^7\sqrt{x}$.

129. Határozzuk meg az $f'(x_1)$-et és $f'(x_2)$-t.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 16$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = (3x+5)(2x^2-1)$; $x_1 = -1$, $x_2 = 0$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 5\sin x - 8\cos x$; $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$;

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

130. Deriváljuk a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 3\sin x + 2\cos x$, $x \mapsto 4\sin x - 5\cos x$;

b) $x \mapsto \sin(-x) - 2\cos(-x)$, $x \mapsto -\sin x + 7\cos x$;

c) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $x \mapsto \sin^2 x + 3\sin x - 2\cos x + \cos^2 x$;

e) $x \mapsto \sin x \cos x$, $x \mapsto x^2 \sin x$;

f) $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$;

g) $x \mapsto (5x + \sin x)(x^2 - \cos x)$;

h) $x \mapsto (1 - 2\sin x)(1 - 3\cos x)$.

131. Deriváljuk a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \cos 2x$;

b) $x \mapsto \sin^2 2x$, $x \mapsto \cos^2 2x$;

c) $x \mapsto \sin^3 x$, $x \mapsto \cos^3 x$;

d) $x \mapsto \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$, $\qquad x \mapsto \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

132. Deriváljuk a következő függvényeket.

a) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\, k\in\mathbf{Z}\right\}$,

$f(x) = (\sin x)^{-1}, \quad g(x) = (\cos x)^{-1}, \quad h(x) = (\operatorname{tg} x)^{-1};$

b) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};\, k\in\mathbf{Z}\right\}$,

$$f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}, \quad g(x) = \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}, \quad h(x) = \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x};$$

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $\quad f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-1}+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x-1}$;

**d)* $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};\, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $\quad f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x-1}+\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x-1}$.

133. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

a) $D_f =]-1;+\infty[$, $\quad f(x) = \sqrt{x+1}$,

$D_g = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, $\quad g(x) = \sqrt{1-2x}$,

$D_h =]2;+\infty[$, $\quad h(x) = \sqrt{x^2+x-6}$;

b) $D_f =]-4;4[$, $\quad f(x) = \sqrt{16-x^2}$,

$D_g =]-5;5[$, $\quad g(x) = \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$,

$D_h =]5;+\infty[$, $\quad h(x) = \frac{3}{5}\sqrt{x^2-25}$;

c) $D_f =]0;2[$, $\quad f(x) = \sqrt{2x-x^2}$,

$$D_g = \mathbf{R} \setminus [-1; 1],\ g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

$$D_h = \mathbf{R} \setminus [-1; 1],\ h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}};$$

d) $$D_f =]-2; 3[, \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}},$$

$$D_g = \mathbf{R} \setminus [-2; 3],\ g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}},$$

$$D_h = \mathbf{R}^+, \qquad h(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}.$$

134. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin 6x$,

$x \mapsto 5 \cos \frac{x}{3}$,

$x \mapsto \cos (1+2x+3x^2)$;

b) $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$,

$x \mapsto \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$,

$x \mapsto \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$;

c) $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}$,

d) $\left]-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{\cos 4x}$.

135. Deriváljuk kétszer az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto x^2 - x - 1$, $\quad x \mapsto x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 2x - 10$;

b) $x \mapsto (x+2)^2$, $\quad x \mapsto (2x-1)^3$;

c) $x \mapsto \sin x + \cos x$, $\quad x \mapsto \sin 2x + \cos 5x$;

d) $x \mapsto \sin 2x$, $\quad x \mapsto \cos 2x$.

136. Deriváljuk háromszor az alábbi függvényeket.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5x^3 - 2x + 7$,
$x \mapsto (x^2 - 3x + 1)^2$,
$x \mapsto (1+x)^{100}$;

b) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x}$,

$x \mapsto 3x^2 - x + \dfrac{2}{x}$,

$x \mapsto \dfrac{7x^5 - 3x^2 + 2x - 7}{x}$,

c) $(\mathbf{R} \setminus \{1\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x}{6(1-x)}$,

$x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$,

$x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2\sin x - 3\cos x$,
$x \mapsto \sin 5x + 2\cos 2x$,
$x \mapsto \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

137. Határozzuk meg a sinus- és a cosinusfüggvény 1990., 1991., 1992., …, 2000. deriváltját.

138. Határozzuk meg az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x(x-1)(x-2)\ldots(x-10)$$

függvény tizedik, tizenegyedik és tizenkettedik deriváltját.

139. Határozzuk meg a következő összetett függvények derivált-függvényét.

a) $[1; 10] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln(3x-1);$

b) $(\mathbf{R} \setminus \{1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln[(x^3-1)^4];$

c) $]-1; 1[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln \frac{1-x}{1+x}.$

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln[(x^2+x+1)^2].$

***140.** Határozzuk meg a következő függvények első és második deriváltját.

a) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x \ln x + 2x;$

b) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2 \ln x;$

c) $(\mathbf{R}^+ \setminus \{1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\ln x};$

d) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x};$

e) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln|x|;$

f) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$

g) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln(\ln(2+x^2));$

h) $]1; +\infty[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \ln \ln x.$

***141.** Deriváljuk a következő függvényeket.

a) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto e^{\frac{1}{x}};$

b) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto e^{-\frac{1}{x}};$

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto e^{-x^2};$

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto xe^x;$

e) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

f) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

g) $(\mathbf{R}\setminus\{1\})\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto e^{\frac{x+1}{x-1}}$;

h) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto e^x\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$.

***142.** Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto e^x(\sin x-\cos x)$;

b) $x\mapsto e^{\sin x-\cos x}$;

c) $x\mapsto e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)$;

d) $x\mapsto e^{3x}\sin(x^2+5)$.

***143.** Határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

a) $[2;+\infty[\to\mathbf{R}$; $\quad x\mapsto x\log_2(x^2-3)$;

b) $]2;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto 3\log_5(2x-4)+4x^2-3$;

c) $[3;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \dfrac{2}{\log_3 x}-\dfrac{\log_3 x}{2}$;

d) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \dfrac{2}{3}\log_2\log_4(x^2+5)$.

***144.** Deriváljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto 2^x$; $\quad x\mapsto 2^{x^2-3}$; $\quad x\mapsto x\cdot 2^{x^2-3}$;

b) $x\mapsto 3^x$; $\quad x\mapsto 3^{2-5x}$; $\quad x\mapsto 3^x\cdot 3^{2x-1}$;

c) $x\mapsto 10^x$; $\quad x\mapsto 10^{1+x+x^2}$; $\quad x\mapsto x^2\cdot 10^{x-7}$;

d) $x\mapsto 2^x\cdot 3^{x-1}$; $\quad x\mapsto 2^{x^2-1}\cdot 3^{x+1}$; $\quad x\mapsto 2^{1+x^2}\cdot 3^x\cdot(x^5+1)$.

9. Görbék érintőire vonatkozó feladatok

145. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel megadott görbék 0 és 3 abszcisszájú pontján átmenő szelő meredekségét.

a) $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 2x^2 - 1{,}3$; $y = 2x^2 + 100$;

b) $y = x^2 - 5x$; $y = x^2 - 5x + 3$; $y = (x - 2{,}5)^2$; $y = (x - 2{,}5)^2 + 12$.

146. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel megadott görbék 5 és -5 abszcisszájú pontján átmenő szelő iránytangensét.

a) $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = \frac{1}{2}(x^2 + 5)$;

b) $y = x^2 - 3x + 5$; $y = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 5)$;

c) $y = x^3 - 2x$; $y = x^3 - 2x + 1$;

d) $y = x^3 + 3x$; $y = x^3 + 3x - 4$.

147. Írjuk fel az $y = 2x - x^2$ egyenletű parabola x_1 és x_2 abszcisszájú pontján áthaladó szelő iránytangensét, ha $x_1 = 1$ és x_2

a) 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; $1 + h$ $(h \in \mathbf{R}^+)$;

b) 0,5; 0,9; 0,99; 0,999; $1 - h$ $(h \in \mathbf{R}^+)$.

148. Írjuk fel az $y = x^3 + 2$ egyenletű görbe $x_1 = -1$ és $x_2 = -1 + \Delta x$ abszcisszájú pontján áthaladó szelő iránytangensét, ha Δx

a) 1, 0,1, 0,01, 0,001;

b) -1, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$.

149. Határozzuk meg az alábbi görbék $x_1 = 1$ és $x_2 = 1 + h$ $(h \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ abszcisszájú pontján átmenő szelő iránytangensét és vizsgáljuk meg, van-e ennek véges határértéke a 0 helyen.

a) $y = 5x^2$; *c)* $y = x^3$;

b) $y = 8 - x^2$; *d)* $y = x^3 + 2$.

150. Határozzuk meg az alábbi görbék $x_1 = 5$ és $x_2 = 5+h$ $(h \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ abszcisszájú pontján átmenő szelő iránytangensét, majd vizsgáljuk ennek a 0 helyen vett határértékét.

a) $y = \frac{1}{2}(x^2-5)$; *c)* $y = (x+1)(x-2)+2$;

b) $y = \frac{x^2+3}{2}$; *d)* $y = (x+3)^2-(x-3)^2$.

151. Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola 6, 4, 2, 0, -2 abszcisszájú pontjához tartozó érintő iránytangensét.

152. Írjuk fel az alábbi görbék x_0 abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét.

a) $y = 2x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = 0{,}1x^2$, $x_0 = 2$;

c) $y = x^2 - x^3$, $x_0 = 0$;

d) $y = 1 + x^2 - x^3$, $x_0 = 0$.

153. Írjuk fel az $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ egyenletű görbéhez a $P(-2; 5)$ pontjában húzott érintő egyenletét.

154. Írjuk fel az $y = x^3 - 2x^2 + x - 5$ egyenletű görbéhez a -1, 0, 3 és 10 abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét.

155. Írjuk fel az $y^2 = x$ egyenletű görbéhez a 4 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét.

156. Határozzuk meg az $y = \frac{2}{1-x}$ egyenletű hiperbolához a 2 ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét.

157. Írjuk fel az alábbi egyenlettel megadott görbéhez az x_0 abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét.

a) $y = 5x^2 - 3$, $x_0 = 3$;

b) $y = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = -1$;

c) $y = \frac{8}{4+x^2}$, $x_0 = 2$;

d) $y = \frac{2x-1}{x+3}$, $x_0 = -2$.

158. Határozzuk meg a sinusfüggvény grafikonjához a $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, π és $\frac{3\pi}{2}$ abszcisszájú pontjaiban húzható érintő iránytangensét.

159. Számítsuk ki, milyen hosszú az $y = 2x^2$ és az $y = 2x^2+5$ egyenletű parabolához a 2 abszcisszájú pontjában húzott érintőnek az érintési pont és az x tengely közötti szakasza.

160. Határozzuk meg az $y = 2x^2-2x$ egyenletű parabola és az $x+y = 1$ egyenletű egyenes metszéspontjait. Írjuk fel a parabola e metszéspontokhoz tartozó érintőinek az egyenletét.

161. Határozzuk meg az $y = x^2-7x+3$ egyenletű görbének az $5x+y = 3$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőjét.

162. Határozzuk meg az $y = 3x^4+4x^3-12x^2+20$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekhez az x tengellyel párhuzamos érintő tartozik.

163. Adjunk meg az alábbi egyenletű görbékhez olyan x_0 számot, hogy a görbe x_0 abszcisszájú pontjában az érintő párhuzamos legyen az x tengellyel.

a) $y = x^2+3x$; c) $y = 2x^3+3x^2-12x+8$;

b) $y = 5x^2-2x$; d) $y = 2x^3+3x^2+6x+8$.

164. Határozzuk meg az $y = \frac{5x^2+4}{x}$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos az $y = x$ egyenletű egyenessel.

165. Van-e az $y = x^3-10$ egyenletű görbének olyan érintője, amelynek az iránytangense -4; -1; 0; 3,2; 300? Ha van ilyen érintő, adjuk meg az érintési pont koordinátáit.

166. Van-e az $y = 3x^2$ egyenletű parabolának olyan érintője, amely párhuzamos az $y = 3x$, az $y = 6x$ vagy az $y = -10x$ egyenletű egyenessel? Ha van ilyen érintő, adjuk meg az érintési pont koordinátáit.

167. Határozzuk meg az $y = 3x - x^2$ egyenletű parabola P és Q pontját úgy, hogy a görbe P-beli érintője párhuzamos legyen a $2x + y = 3$ egyenletű egyenessel, a Q-beli érintő pedig merőleges legyen rá.

168. Van-e az $x^3 - 2x + y = 0$ egyenletű görbének olyan érintője, amely párhuzamos az $A(0; -12)$ és a $B(1; 24)$ pontokon átmenő egyenessel?

169. Adjuk meg a k valós számot úgy, hogy az $y = x^2 + kx + 10$ egyenletű görbéhez a 2 abszcisszájú pontjában húzott érintő párhuzamos legyen az alábbi egyenletű egyenessel.

a) $y = x$; *c)* $y = 12x - 1$;

b) $y = 4x + 3$; *d)* $y = 1 - 12x$.

170. Adjuk meg az $y = x^3 - x^2$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbéhez húzott érintő az x tengellyel 45°-os szöget alkot.

171. Van-e az $y = x^3$ egyenletű görbének olyan érintője, amely párhuzamos a görbe x_1 és x_2 abszcisszájú pontján áthaladó szelővel? Ha van, adjuk meg az érintési pontot.

a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
c) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$;
d) $x_1 = -0{,}1$, $x_2 = 0{,}1$.

172. Határozzuk meg az $y = 2x - x^2$ egyenletű parabolának azt a pontját, amelyhez tartozó érintő párhuzamos az $A(1; 1)$ és a $B(3; -3)$ pontokra illeszkedő szelővel.

173. Adjuk meg a k valós számot úgy, hogy az $y = \dfrac{k}{x^2 - 1}$ egyenletű görbének a 3 abszcisszájú pontjában húzott érintője az x tengellyel 60°-os szöget alkosson.

174. Írjuk fel az $y = x^2 + 1$ egyenletű parabolához az $A(-2; 5)$ és a $B(3; 3)$ ponton át húzható érintők egyenletét.

***175.** Adjuk meg az $y = x^3$ egyenletű görbének azt az érintőjét, amely a $P(1; 1)$ pontban átmetszi a görbét.

176. Adjuk meg a p és a q valós számot úgy, hogy az $y = x^2 + px + q$ egyenletű parabola érintse az $y = x$ egyenletű egyenest, mégpedig az x_0 abszcisszájú pontjában, ha

a) $x_0 = 2$; *b)* $x_0 = 1$.

177. Adjuk meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola illeszkedjék a $P(2; 4)$ pontra és az 1 abszcisszájú pontjában érintse a $2x - y = 1$ egyenletű egyenest.

178. Igazoljuk, hogy az $y = \cos^2 x + \sin 2x$ és az $y = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék érintik egymást a 0 abszcisszájú pontjukban.

179. Mekkora szögben metszi egymást az alábbi egyenletekkel megadott két görbe?

a) $y = x^2$, $x = 3$; *c)* $y = \cos x$, $y = \frac{1}{2}$;

b) $y = \sin x$, $x = \frac{5\pi}{4}$; *d)* $y = x^2$, $y = x$.

180. Mekkora szögben metszik az x tengelyt és az y tengelyt az alábbi egyenletekkel megadott görbék?

a) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$;

b) $y = \cos x$, $y = \cos 2x$;

c) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} 2x$;

d) $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{ctg} 2x$.

181. Mekkora szögben metszik az x és az y tengelyt az alábbi egyenletű görbék?

a) [illegible] 1; *b)* $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

182. Mekkora szögben metszi egymást az f és a g, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\quad g(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$;

b) $f(x) = x^2+4$, $\quad g(x) = (x+2)^2$;

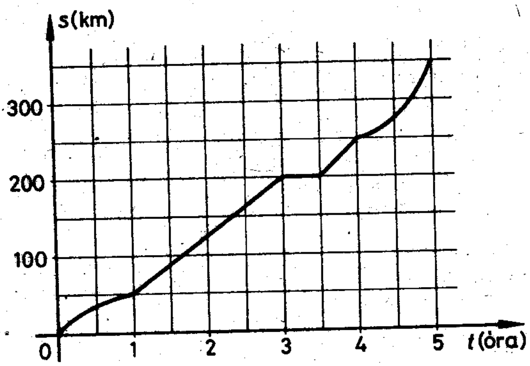
c) $f(x) = x^2+4$, $\quad g(x) = x^2+4x$;

**d)* $f(x) = \sqrt{|x|}+6$, $\quad g(x) = \frac{1}{8}x^3$.

183. Igazoljuk, hogy az $x^2-4y = 4$ és az $x^2+16y = 64$ egyenletű parabolák merőlegesen metszik egymást.

10. Egyenes vonalú mozgások sebességével és gyorsulásával kapcsolatos feladatok

184. A 2. *ábra* egy vonat mozgásának grafikonja.



2. *ábra*

a) Melyik időintervallumokban haladt a vonat egyenletesen?
b) Mikor állt meg a vonat és mennyi időre?
c) Mekkora volt a vonat átlagsebessége mozgásának első négy órájában?
d) Mekkora volt a vonat átlagsebessége mozgásának negyedik órájában?

185. Egy pont egyenes vonalú mozgásának kezdete után 5 s-mal 20 m, további 3 s múlva 35 m távolságba került kiindulási helyétől. Megállapíthatjuk-e ezeknek az adatoknak az alapján, hogy
a) mekkora volt a mozgás átlagsebessége a két jelzett időpont között;
b) mekkora sebességgel mozgott a pont az 5. s-ot követő pillanatban?

186. Mekkora annak a gépkocsinak az átlagos sebessége, amely 8 órát tölt úton, és az első 3 órában 150 km-t tesz meg, a következő 2 órában egyenletes 60 km/h sebességgel halad, azután másfél órát áll, végül még 80 km-t tesz meg?

187. Egy vonat indulása után 2 óra hosszat 45 km/h, majd 3 óra hosszat 60 km/h, végül 2,5 óra hosszat 32 km/h átlagsebességgel haladt. Mekkora volt a vonat átlagsebessége a 7,5 órás úton?

188. Egy pont egyenes vonalú mozgást végez, kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\ 10] \to \mathbf{R},\ t \mapsto 4t-2.$$

Határozzuk meg a pont átlagsebességét a [0; 2], a [2; 6], a [6; 10] és a [0; 10] időintervallumon. Mennyi a mozgás pillanatnyi sebessége a $t=5$ időpontban?

189. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [-0{,}2;\ 3] \to \mathbf{R},\ t \mapsto 5t^2+1{,}8t.$$

Számítsuk ki a $[t_1;\ t_2]$ időintervallumhoz tartozó átlagsebességet (az s utat méterben, a t időt másodpercben mérjük).

a) $t_1 = 1, \quad t_2 = 3, \quad 2, \quad 1{,}1, \quad 1{,}01, \quad 1+h;$

b) $t_1 = 0, \quad t_2 = 2, \quad 1, \quad 0{,}1, \quad 0{,}01, \quad h.$

190. Számítsuk ki az

$$s\colon [-0{,}2;\ 3]\to\mathbf{R},\quad t\mapsto 5t^2+1{,}8t$$

kitérésfüggvénnyel leírt mozgás pillanatnyi sebességét a t_0 időpontban (az s utat méterben, a t időt másodpercben mérjük).

a) $t_0=0$; *c)* $t_0=2$;

b) $t_0=1$; *d)* $t_0=2{,}7$.

191. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\ 3]\to\mathbf{R},\quad t\mapsto t^3-3t^2+3t,$$

ahol az s utat km-ben, a t időt órában mérjük. Írjuk fel az $\frac{1}{2}$, az 1 és a 2 időponthoz tartozó átlagsebesség-függvényt.

192. Egy kerékpáros az időmérés kezdetétől 3 óra hosszat van úton: $s(t)=10\sin t$. (Az utat km-ben, az időt órában mérjük). Írjuk fel a $\frac{\pi}{4}$, a $\frac{\pi}{2}$, az 1 és a 2 időponthoz tartozó átlagsebesség-függvényt.

193. Egy egyenes vonalú mozgásnak megadjuk az s kitérésfüggvényét. Határozzuk meg a mozgás t_0 időpontbeli pillanatnyi sebességét.

a) $D_s=[0;\ 10]$, $s(t)=t^2+3$; $t_0=4$;

b) $D_s=[0;\ 10]$, $s(t)=5t^2$; $t_0=1$, $t_0=3$, $t_0=3{,}7$;

c) $D_s=[0;\ 3]$, $s(t)=3t^2+2t+2$; $t_0=2$;

d) $D_s=[0;\ 10]$, $s(t)=t^3$; $t_0=6$.

194. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\ 100]\to\mathbf{R},\quad t\mapsto v_0t+\frac{g}{2}t^2,$$

ahol v_0 és g valós szám (a kitérést m-ben, az időt s-ban mérjük). Határozzuk meg a mozgás pillanatnyi sebességét *a)* a mozgás kezdetekor;

b) a t_0 időpontban ($t_0 \in [0; 100]$).

195. Határozzuk meg annak az egyenes vonalú mozgást végző pontnak a t_0 pillanatbeli sebességét, amelynek s a kitérésfüggvénye.

a) $D_s = [1; 20]$, $s(t) = 4t^2 + 3t - 2$;

b) $D_s = [0; 10]$, $s(t) = t^3 + 12$;

c) $D_s = [0; 100]$, $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ $(g \in \mathbf{R})$;

d) $D_s = [0; 100]$, $s(t) = \sqrt{t}$.

196. Egy v_0 kezdősebességű szabadon eső test kitérésfüggvénye

$$s: [0; 20] \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto v_0 t + \frac{g}{2}t^2.$$

Számítsuk ki a test sebességét a t_0 időpontban, ha

a) $v_0 = 5$ (m/s), $g = 9{,}81$ (m/s^2), $t_0 = 3$ (s);

b) $v_0 = 12$ (m/s), $g = 9{,}81$ (m/s^2), $t_0 = 12$ (s).

197. Mekkora kezdősebességgel kell függőlegesen felhajítani egy testet, hogy maximális magassága 150 méter legyen?

198. Mennyi idő alatt és mekkora végsebességgel ér a földre egy 60 méter magasból szabadon eső test? (A levegő ellenállásától tekintsünk el.)

199. Egy pont egyenes vonalú pályán a 0 időponttól addig mozog az $s(t) = 15 - (5 - t)(3 - t)$ kitérési szabály szerint, amíg a sebessége nullává nem válik. Mekkora utat tesz meg ezalatt?

200. Két, azonos egyenes mentén mozgó pont kitérésfüggvénye

$$s_1: [-1; 10] \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto 3t^2 + t,$$

illetve

$$s_2: [-1; 10] \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto t^2 + 13t,$$

ahol a kitérést m-ben, az időt s-ban mérjük. Mekkora a pontok sebessége abban a pillanatban, amikor az általuk megtett utak egyenlők?

201. Egy pont az [1; 5] időintervallumban egyenes pályán mozog, az $s(t)=2t^2+3t+5$ kitérési szabálynak megfelelően.
a) Mekkora a mozgás átlagsebessége?
b) Van-e olyan $t_0 \in [1; 5]$ időpont, amelyben a pillanatnyi sebesség egyenlő a fenti átlagsebességgel?

202. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye:

$$[0; 50] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto t^3.$$

Határozzuk meg azt az időpontot, amelyben a mozgás pillanatnyi sebessége megegyezik a [13; 46] időintervallumhoz tartozó átlagsebességgel.

203. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0; 5000] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 2t^3+5t^2+4t$$

(az időt percben, a kitérést méterben mérjük). Mekkora a mozgás gyorsulása 40 másodperc, 12 perc, illetve 1 óra múlva?

204. Egy 3 kg tömegű test egyenes pályán mozog az

$$s\colon [0; 5] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 5t^2-2t+1$$

kitérésfüggvénynek megfelelően (a kitérést méterben, az időt másodpercben mérjük). Számítsuk ki a testnek a $t_0=3$ időponthoz tartozó sebességét, gyorsulását, mozgási energiáját.

205. Egy számegyenes mentén mozgó pont kitérésfüggvénye

$$s\colon [0; 10] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 1+4t-t^2.$$

Adjuk meg
a) a pont kezdeti helyzetét;
b) a mozgás kezdősebességét;
c) a mozgás irányváltoztatásának időpontját.

206. Egy számegyenes mentén mozgó pont kitérésfüggvénye

$$s\colon [-1; 10] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto 100+5t-0{,}001t^3.$$

Határozzuk meg a mozgás sebességét és gyorsulását a 0, az 1 és a 9 időpontban!

207. Egy egyenes pályán mozgó pont kitérésfüggvénye

$$s\colon [-2; 12] \to \mathbf{R}, \qquad t \mapsto at^2+bt+c,$$

ahol a kitérést méterben, az időt másodpercben mérjük. Mennyi az a, a b és a c, ha

a) a $t=2$ időpontban a kitérés 5 m, a sebesség 4 m/s és a gyorsulás 3 m/s^2;

b) $t=0$ időpontban a kitérés 10 m, a sebesség 15 m/s és a gyorsulás 6 m/s^2;

c) a $t=4$ időpontban a kitérés 1 m, a sebesség 12 m/s és a gyorsulás 10 m/s^2;

d) a $t=10$ időpontban a kitérés 560 m, a sebesség 0 m/s, a gyorsulás -8 m/s^2?

208. Egy egyenes pályán mozgó pont kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\,5]\to\mathbf{R},\qquad t\mapsto \frac{1}{3}t^3-2t^2+3t.$$

Határozzuk meg a mozgás sebesség- és gyorsulásfüggvényét. Mely időpontokban változik meg a mozgás iránya?

209. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\,16]\to\mathbf{R},\qquad t\mapsto \sqrt{t}.$$

Adjuk meg a gyorsulásfüggvényt.

210. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s\colon [0;\,5]\to\mathbf{R},\qquad t\mapsto \frac{1}{2}t^4-2t^3+6t.$$

Mekkora a mozgás legkisebb és legnagyobb gyorsulása?

11. Függvények növekedési viszonyai

211. Növekedő-e az f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény az x_0 helyen?

a) $f(x) = x^3-x;$ $\qquad x_0=-2;$

b) $f(x) = 3x^2-6x;$ $\qquad x_0=3;$

) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 5x;$ $x_0 = 1;$

) $f(x) = x^4 + 3x^3;$ $x_0 = 0.$

212. Növekedő-e, fogyó-e az f függvény az x_0 helyen?

) $D_f = [-2; 2],$ $f(x) = \sqrt{4 - x^2};$ $x_0 = 1;$

) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{5\},$ $f(x) = \frac{x}{5 - x};$ $x_0 = 10;$

$D_f = \mathbf{R},$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4;$ $x_0 = 1{,}5;$

$D_f = \mathbf{R},$ $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$ $x_0 = \frac{\pi}{6}.$

213. Válasszuk ki az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények közül a monotono-
t.

$x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 6x - 5,$ $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5;$

$x \mapsto \sqrt{2}x - \cos x,$ $x \mapsto \sin x - \frac{\pi}{2}x;$

$x \mapsto x - \sin x,$ $x \mapsto 2x + \cos x;$

$x \mapsto 1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2,$ $x \mapsto (1 + \cos x)^2 + \sin^2 x.$

214. Válasszuk ki az alábbi függvények közül azokat, amelyek
gorúan monoton növekedők vagy szigorúan monoton fogyók.

$\mathbf{R} \to \mathbf{R},$ $x \mapsto 4 - 3x,$

$x \mapsto x^2 - 5x + 1,$

$x \mapsto 3x^3 - 12;$

$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},$ $x \mapsto \frac{x^2 - 16}{x + 4},$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}+2}.$$

215. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az alábbi **R**→**R** függvény növekedő, illetve csökkenő.

a) $x \mapsto x^2-10x;$ *c)* $x \mapsto \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2};$

b) $x \mapsto x^3-64x;$ *d)* $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}.$

216. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x \mapsto \frac{x^2}{x^4+4}$$

függvény szigorúan monoton növekedő, illetve csökkenő.

217. Határozzuk meg azokat a legtágabb intervallumokat, amelyeken az f és a g, **R**→**R** függvény egyszerre növekedő, illetve csökkenő.

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+6x+2,$ $g(x)=x^2-8x+4;$

b) $f(x)=-2x^3+15x^2-24x+7,$ $g(x)=x^3-9x^2+24x-10;$

c) $f(x)=x^3-9x,$ $g(x)=2x^2-18x;$

d) $f(x)=5x^2-7x+2,$ $g(x)=(6-x)(x+1).$

218. Határozzuk meg az alábbi **R**→**R** függvények növekedési viszonyait.

a) $x \mapsto x^2+3,$ $x \mapsto x^2-4x+3;$

b) $x \mapsto x^3+3x,$ $x \mapsto x^3+3x^2;$

c) $x \mapsto x^3+6x^2$, $x \mapsto x^3+6x^2-15x+2$;

d) $x \mapsto x^3-3x^2$, $x \mapsto x^3-3x^2+2$.

219. Mely intervallumokon növekedők és melyeken fogyók az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények?

a) $x \mapsto x^2-3$, $x \mapsto x^3-3$, $x \mapsto x^3-3x$;

b) $x \mapsto (x-3)^2$, $x \mapsto (x-3)^3$, $x \mapsto (x-3)^4$;

c) $x \mapsto 4x^2-4x-5$, $x \mapsto x^3-6x^2+7$, $x \mapsto x^4-6$;

d) $x \mapsto 2x^2-7x+1$, $x \mapsto x^3+3x^2+3x-5$, $x \mapsto (x+1)^3$.

220. Hol növekedők és hol fogyók az alábbi $]0;\ 2\pi[\to\mathbf{R}$ függvények?

a) $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \sin 3x$;

b) $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \cos 3x$;

c) $x \mapsto \sin x+x$ $x \mapsto \sin x-x$, $x \mapsto \cos x+2x$;

d) $x \mapsto \sin^2 x+\cos^2 x$, $x \mapsto \sin^2 x+\cos^2 x-2x$.

221. Legyen $D_g=[0;\ +\infty[$, $g(x)=\sqrt{x}$. Határozzuk meg az f és a $g\circ f$ összetett függvény növekedési viszonyait, ha

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2x^2-3$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x^2+x+1$;

c) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 50-2x^2$;

d) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x^3+4$;

e) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2x^3-8x$;

f) $f\colon (\mathbf{R}\setminus\{1\})\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$;

g) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2+\cos x$;

h) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x-\dfrac{1}{2}$.

222. Állapítsuk meg az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények növekedési viszonyait.

a) $x\mapsto(x^3+6x)^5$; *c)* $x\mapsto(x^3+6x)^4$;

b) $x\mapsto(x^3-6x)^5$; *d)* $x\mapsto(x^3-6x)^4$.

223. Van-e olyan intervallum, amelyen az f és a g függvény csökkenő, a h függvény pedig növekedő?

a) $D_f=D_g=D_h=\mathbf{R}$, $f(x)=5-x$,

$g(x)=5+4x-x^2$,

$h(x)=x^2+4x$;

b) $D_f=D_g=D_h=\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}$,

$g(x)=-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x+2$,

$h(x)=2x^2-3x+4$;

c) $D_f=D_g=D_h=\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2$,

$g(x)=\dfrac{8}{3}x^3-x^2-3x+4$,

$h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+1$;

d) $D_f=D_g=D_h=\mathbf{R}$, $f(x)=2x^4-x+1$,

$g(x)=x^4-2x^2+8$,

$h(x)=5x-4$.

224. Adjunk meg olyan harmadfokú $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt, amely az $[1;\ 5]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő, a $]-\infty;\ 1]$ és az $[5;\ +\infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton fogyó.

225. Az f és a g $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényről tudjuk, hogy

a) valamely $a\in\mathbf{R}$ számra $f(a)>g(a)$;

b) minden $a\in\mathbf{R}$ esetén $f'(a)\geqq g'(a)$.

Igazoljuk, hogy minden $b\in\mathbf{R}$, $b>a$ szám esetén $f(b)>g(b)$. (Útmutatás: vizsgáljuk az $f-g$ függvényt.)

***226.** Írjuk le az alábbi függvények növekedési viszonyait.

a) $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \lg(\cos x)$;

b) $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x\ln x$;

c) $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \frac{\ln x}{x}$;

d) $(\mathbf{R}^+\setminus\{1\})\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto \frac{x}{\ln x}$;

e) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x^3\cdot 2^x$;

f) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x^4\cdot 2^{-x}$;

g) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x^n\cdot 2^{-x}\quad (n\in\mathbf{N}^+)$;

h) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto e^{-x}-e^{-2x}$.

12. Függvények szélsőértéke

227. Határozzuk meg a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények szélsőértékhelyeit.

a) $x\mapsto 4x^2-6x-7$;

b) $x\mapsto -3x^2-12x+100$;

c) $x\mapsto (x-a)(a-2x)\quad (a\in\mathbf{R})$;

d) $x\mapsto (1+ax)(1-2x)\quad (a\in\mathbf{R})$;

e) $x\mapsto x^3-3x^2$;

f) $x \mapsto x^4-8x^2+7$;

g) $x \mapsto x^4-\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$;

h) $x \mapsto x^4-4x^3+4x^2+1$.

228. Határozzuk meg a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények lokális minimum- és maximumhelyeit.

a) $x \mapsto \sqrt{3}\sin x-\cos x$;

b) $x \mapsto \sin x+\sqrt{3}\cos x$;

c) $x \mapsto \sin^2 x-\cos^2 x$;

d) $x \mapsto \sin^2 x-\cos x$;

e) $x \mapsto \sin x+\cos x$;

f) $x \mapsto \sin^2 2x-\cos^2 2x$;

g) $x \mapsto 5\sin x\cos x$;

h) $x \mapsto 4\sin x\cos x\cos 2x$.

229. Van-e lokális vagy abszolút szélsőértéke az f függvénynek? Ha van, adjuk meg a szélsőértékhelyét.

a) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

b) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{5\}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^3}{(x-5)^2}$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;

d) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$.

230. Van-e lokális vagy abszolút szélsőértéke az f függvénynek? Ha van, adjuk meg a szélsőértékhelyét.

a) $D_f = [2; 5]$, $f(x) = \sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$;

b) $D_f = [-1; 1]$, $f(x) = \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$;

c) $D_f = [a; b]$, $f(x) = \sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$, ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$);

d) $D_f = [-2; -1] \cup [1; 2]$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}+\sqrt{4-x^2}$.

231. Határozzuk meg az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin^4 x + \cos^4 x$$

függvény lokális és abszolút szélsőértékhelyeit.

232. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát.

a) $[-2; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$;

b) $[-2; 8] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$;

c) $[-1{,}5; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x$;

d) $[0; 4] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$;

e) $[-1; 3] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 - 8x^2 - 9$;

f) $[-1; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 5$;

g) $[0; 9] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 32x$;

h) $[3; 9] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x(10-x)}$.

233. Melyik az a pozitív x, amelyre az $x - x^3$ a legnagyobb?

234. Melyik az a pozitív x, amelyre az $x + \dfrac{1}{x}$ a legkisebb?

235. Bontsuk fel a 20-at 2 összeadandóra úgy, hogy a tagok
a) szorzata; *c)* négyzetösszege;
b) négyzetének különbsége; *d)* köbeinek összege
(amennyiben az lehetséges) szélsőértéket vegyen fel.

236. Határozzuk meg az x^6+y^6 kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha tudjuk, hogy $x^2+y^2=1$.

237. Vizsgáljuk az összes olyan háromszöget, amelynek két oldala a, illetve b. Van-e közöttük legnagyobb és legkisebb területű? Ha van, melyik az?

238. Egy derékszögű háromszög átfogója 50 cm hosszúságú. Határozzuk meg az a és b befogót úgy, hogy maximális legyen
a) a háromszög kerülete;
b) a két befogó összege.

239. Írjunk egy adott sugarú kör köré
a) minimális kerületű egyenlő szárú háromszöget;
b) minimális kerületű derékszögű háromszöget.

240. Adjuk meg valamely adott háromszögbe írt téglalapok közül a maximális területűt.

241. Keressük meg az adott területű téglalapok között a legkisebb kerületűt.

242. Határozzuk meg a legnagyobb területűt az adott sugarú
a) körbe; *b)* félkörbe
írt téglalapok közül.

243. Határozzuk meg az adott kerületű téglalapok közül azt, amelynek az átlója
a) a leghosszabb; *b)* a legrövidebb.

244. Egy trapéz kisebbik alapja és szárai 1 dm hosszúak. Válaszszuk meg a hiányzó oldal hosszát úgy, hogy a trapéz területe a lehető legnagyobb legyen. Mekkorák ennek a trapéznak a szögei?

245. Válasszuk ki az adott kerületű körcikkek közül azt, amelynek legnagyobb a területe.

246. Válasszuk ki a 42 cm kerületű tégalalapok közül azt, amelyiknek legrövidebb az átlója.

247. Válasszuk ki az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra rajzolható négyzetek területösszege.

248. Egy téglalap egyik csúcsa egy $x-y$ koordináta-rendszer origójában, két további csúcsa az x, illetve az y tengelyen, a negyedik csúcsa pedig a $3x+4y=24$ egyenletű egyenesen van. Válasszuk meg ezt a negyedik csúcsot úgy, hogy a téglalap területe a lehető legnagyobb legyen. Mik e csúcs koordinátái?

249. Írjunk a $4x^2+9y^2=36$ egyenletű ellipszisbe maximális területű téglalapot. Mekkorák a téglalap oldalai?

250. Egy 25 m hosszú alagút keresztmetszete téglalapra helyezett félkör alakú. A keresztmetszet kerülete 18 m. Hogyan kell megválasztani a félkör sugarát, hogy az alagút térfogata a lehető legnagyobb legyen?

251. Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Adott egy-egy ablak kerülete: p. Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

252. Írjunk az x tengely és az $y=4-x^2$ egyenletű parabola által határolt síkrészbe maximális területű téglalapot.

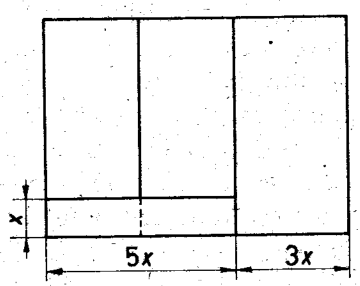
253. Egy síkbeli $x-y$ koordináta-rendszerben adott az $A(0;3)$ és a $B(4;5)$ pont. Határozzuk meg az x tengelynek azt a C pontját, amelyre az AC és BC szakasz hosszának az összege minimális.

254. Valamely adott síkban, az e egyenes egyik oldalán úgy helyezkedik el az A és a B pont, hogy távolságuk e-től adott a és b szakasz, az e egyenesre eső A' és B' vetületek távolsága: l. Határozzuk meg az e egyenes C pontját úgy, hogy az AC és a BC szakasz hosszának

a) összege; *b)* négyzetösszege

minimális legyen.

255. A mellékelt tervrajzon (3. *ábra*) a falak összhosszúsága 90 m,



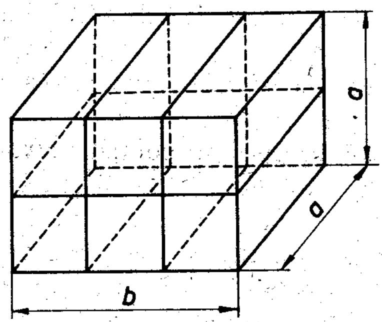
3. *ábra*

a folyosó szélessége x m. Hány méter legyen x, ha azt akarjuk, hogy a 3 szoba együttes területe a lehető legnagyobb legyen?

256. Egy négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le. Mekkorák legyenek a levágott négyzetek, hogy az oldaltéglalapok felhajtásával létrejött nyitott doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen? (A lemez oldalait vegyük pl. 24 cm hosszúaknak.)

257. Adott egy körlap (itatóspapirosból). Mekkora középponti szögű körcikket vágjunk ki belőle, hogy az abból készítendő tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen?

258. Adott térfogatú (pl. $V = 28\ \mathrm{dm}^3$) négyzetesoszlop alakú csomagot a 4. *ábrán* látható módon kötünk át. Hogyan válasszuk meg a csomag méreteit, hogy az átkötő zsineg hossza a lehető legrövidebb legyen?



4. *ábra*

259. Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

260. Egy a szélességű folyóból, a folyó irányára merőlegesen, b szélességű csatorna indul ki. Mekkora annak a leghosszabb hajónak a hosszúsága, amely a folyóból a csatornába be tud fordulni? (A hajó szélességét hanyagoljuk el; legyen $a = 240$ m; $b = 30$ m.)

261. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyagfogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől,az összefüggést az $A = 0{,}03\ v^3$ képlet fejezi ki, ahol v(km/h) a sebesség. Az egyéb kiadások óránként B Ft-ot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

262. Ismert tény, hogy egy gerenda teherbírása egyenesen arányos a keresztmetszet hosszúságával és szélességének a négyzetével. Határozzuk meg a d cm átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legteherbíróbb gerenda keresztmetszetének a méreteit!

263. A vízszinteshez képest x szögben, adott v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy követ. A kő (ha a levegő ellenállását elhanyagoljuk) $\frac{v_0^2 \sin^2 x}{2g}$ magasságra emelkedik, és vízszintes irányban $\frac{v_0^2 \sin 2x}{g}$ távolságra jut el. Milyen szögben hajítsuk a követ, hogy

a) a legmagasabbra emelkedjék;

b) a legtávolabbra jusson vízszintes irányban?

264. Elhajítunk egy testet 25 m/s kezdősebességgel, a vízszintessel α szöget bezáróan. A test a hajítás helyétől d távolságban ér földet. Hogyan válasszuk meg az α szöget, hogy d a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a maximális távolság? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el.)

265. Valamely AB egyenes A pontjában van egy fényforrás, amelynek erőssége α, a tőle adott d távolságra levő B-ben pedig egy β erősségű fényforrás. Határozzuk meg az AB szakasz legkevésbé megvilágított pontját. (Útmutatás: A megvilágítás erőssége fordítottan arányos a fényforrástól való távolság négyzetével.)

266. Milyen magasan kell elhelyezni valamely kör alakú futópálya közepén a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a futópálya megvilágítása a lehető legerősebb legyen? (A megvilágítás erőssége tetszőleges P pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének sinusával, és fordítottan arányos a fényforrás és a P pont távolságának négyzetével.)

267. Egy 2 m átmérőjű kerek asztal közepe fölött egy állítható magasságú lámpa van. Milyen magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy az asztal körül ülők a lehető legjobban lássanak? (Lásd az előző feladatot!)

268. Milyen méretekkel készüljön az a 32 m^3 térfogatú négyzetesoszlop alakú medence, amelynek elkészítéséhez (alap- és oldallapjaihoz) a lehető legkevesebb anyag szükséges?

269. Milyen méretei vannak a legkisebb felszínű, 1 dm^3 térfogatú forgáshengernek?

270. Igazoljuk, hogy az adott térfogatú forgáshengerek között annak a legkisebb a felszíne, amelynek a tengelymetszete négyzet!

271. Határozzuk meg annak a maximális térfogatú forgáshengernek a méreteit, amelynek a tengelymetszete 6 m kerületű.

272. Határozzuk meg az adott A felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatút!

273. Határozzuk meg az adott felszínű, fedetlen forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatút!

274. Határozzuk meg egy adott sugarú gömbbe írt forgáshengerek közül azt, amelynek legnagyobb a

a) térfogata, *b)* palástjának a területe.

275. Igazoljuk, hogy ha valamely R sugarú és M magasságú forgáskúpba maximális térfogatú forgáshengert írunk, akkor annak az r sugara és az m magassága eleget tesz az $r = \frac{2}{3} R$ és $m = \frac{1}{3} M$ feltételeknek.

276. Melyik a maximális, illetve minimális térfogatú azok közül a szabályos gúlák közül, amelyeknek minden éle 12 cm?

277. Van-e maximális és minimális térfogatú a 12 cm oldalélű, szabályos négyoldalú gúlák között? Ha van, mekkora az alapéle és a magassága?

278. Van-e maximális és minimális térfogatú a 3 dm alkotójú forgáskúpok között? Ha van, mekkora a sugara és a magassága?

279. Egy forgáshenger sugarának és alkotójának összhosszúsága 24 cm. Mekkora a sugár, ha a henger térfogata maximális?

280. Mekkora az adott

a) félgömbbe; *b)* gömbbe

írt maximális felszínű forgáshenger sugara és magassága?

281. Írjunk egy r sugarú és m magasságú forgáshenger köré minimális térfogatú forgáskúpot! Mekkora ennek a sugara?

282. Válasszuk ki a P palástterületű forgáskúpok közül a maximális térfogatút! Mekkora ennek a sugara és a magassága?

283. Írjunk egy adott gömbbe maximális térfogatú forgáskúpot. Mekkora ennek a sugara és a magassága?

284. Írjunk egy adott gömb köré minimális térfogatú

a) forgáskúpot; *b)* szabályos csonkakúpot.

Mekkora e testek magassága?

285. Egy 30 cm átmérőjű forgáshenger alakú fatörzsből téglalap keresztmetszetű gerendát faragnak. Mekkorák a téglalap oldalai, ha

a) a keresztmetszet területe maximális;

b) a téglalap oldalhosszúságainak a négyzetösszege maximális;

c) a téglalap kerülete maximális;

d) a téglalap átlóhosszúsága maximális?

13. Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont

286. Hol konvex és hol konkáv az alábbi egyenletű görbe?

a) $y = 3x^2 - 5x + 3;$

b) $y = x^3 + 6;$

c) $y = |x + 5|;$

d) $y = (x-5)(3-x);$

e) $y = \sqrt[3]{(x-8)^2};$

f) $y = \sin x;$

g) $y = \sin x + \cos x;$

h) $y = \cos^2 x - \sin^2 x.$

287. Az előző feladatban megadott görbék közül válasszuk ki azokat, amelyeknek van inflexiós pontjuk, és adjuk meg az inflexiós pontokat.

288. Van-e inflexiós pontjuk az alábbi egyenletű görbéknek?

a) $y = 3x^3 + 5x^2 + 1,$ $\quad y = (x+1)^2(x-2);$

b) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 10x,$ $\quad y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3;$

c) $y = x^4 - 3x^2 + 17,$ $\quad y = \frac{1}{5}x^4 + 2x^2 - x + 1;$

d) $y = x^4 - 6x^2 + 5,$ $\qquad y = 2x^4 + x^3 - 12.$

289. Határozzuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi egyenletű görbe.

a) $y = 5x^3 + 4;$ $\qquad$ *c)* $y = x^5 + 5x + 4;$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 4;$ $\qquad$ *d)* $y = x^5 + 5x^4 + 4.$

***290.** Határozzuk meg, mely intervallumokon konvex és melyeken konkáv az alábbi egyenletű görbe. Adjuk meg az inflexiós pontokat.

a) $y = 3x^7 + 5x - 1;$ $\qquad$ *e)* $y = x - \sin x;$

b) $y = (x+1)^4;$ $\qquad$ *f)* $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

c) $y = \dfrac{1}{x+3};$ $\qquad$ *g)* $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}};$

d) $y = \dfrac{1}{1+x^2};$ $\qquad$ *h)* $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$

291. Hol van az alábbi egyenletű görbének inflexiós pontja?

a) $y = \sin x;$

b) $y = \sin x - \cos x;$

c) $y = \operatorname{tg} x;$

d) $y = |\cos x|.$

***292.** Van-e inflexiós pontjuk az alábbi egyenletű görbéknek? Ha van, határozzuk meg a koordinátáit.

a) $y = e^x,$ $\qquad y = e^x + 1,$ $\qquad y = e^x + x;$

b) $y = xe^x,$ $\qquad y = -xe^x,$ $\qquad y = -5x \cdot e^x;$

c) $y = x \cdot 3^x,$ $\qquad y = -x \cdot 3^x,$ $\qquad y = -5x \cdot 3^x;$

d) $y = x \ln x,$ $\qquad y = x^2 \ln x,$ $\qquad y = x^2 \log_2 x.$

14. Függvények diszkussziója

293. Diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto 9x^2 - 5x - 3$;

b) $x \mapsto 2 + 2x - x^2$;

c) $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$;

d) $x \mapsto 5x^2 + 3x - 3$.

294. Diszkutáljuk és ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto x^3 - 9x$;

b) $x \mapsto x^3 + 3x^2$;

c) $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 1$;

d) $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2$;

e) $x \mapsto x^3 + x + 1$;

f) $x \mapsto -0{,}3x^3 + 2x + 6$;

g) $x \mapsto (x-2)^2 (x+1)$;

h) $x \mapsto (x-1)(x+1)(x+3)$.

295. Diszkutáljuk és ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$;

b) $x \mapsto x^4 - 2x^2 - 3$;

c) $x \mapsto x^4 + 6x^2 + 10$;

d) $x \mapsto \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$;

e) $x \mapsto x^4 + 40x^2 + 144$;

f) $x \mapsto x^4 + 7x^2 + 10$;

g) $x \mapsto x^4+3x^3+x^2-5$;

h) $x \mapsto x^4+3x^3+x^2+5$.

296. Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto \sin 2x$;

b) $x \mapsto \sin 2x + 2\sin x$;

c) $x \mapsto x + 2\cos x$;

d) $x \mapsto \sin^2 x - 2\cos 2x + 2$.

***297.** Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényt.

a) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$;

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{6}{x^2+1}$;

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$;

d) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{x}$;

e) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x^3+4}{x^2}$;

f) $(\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$;

g) $(\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$;

h) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

***298.** Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényt.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

b) $D_f = [-1; 1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus]-1; 1[$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;

d) $D_f = [0; 4]$, $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$;

e) $D_f = [-8; 8]$, $f(x) = \sqrt{8+x} + \sqrt{8-x}$;

f) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{(x+8)^2}$;

g) $D_f = [-3; +\infty[$, $f(x) = x\sqrt{x+3}$;

h) $D_f = [-\sqrt{3}; 0] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^3-3x}$.

***299.** Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényt.

a) $D_f = [0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

b) $D_f = [0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{1+\cos x}{\cos x}$;

c) $D_f = [-\pi; 2\pi]$, $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

d) $D_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$.

***300.** Diszkutáljuk és ábrázoljuk az alábbi függvényt.

a) $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$;

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{2-x}$;

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$;

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{2-x^2}$;

e) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x \ln x$;

f) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2 \ln x$;

g) $]-1;\, 1[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \ln(1-x^2)$;

h) $]-1;\, 1 \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

15. A differenciálszámítás további alkalmazásai

301. Egy test melegítése során a hőmérséklet az időtől függően, a $T(t) = 0{,}4t^2$ szabály szerint változik. A T hőmérsékletet °C-ban, a t időt másodpercben mérjük. Határozzuk meg a hőmérséklet változásának

a) a [4; 8] időintervallumbeli átlagos sebességét;

b) az 5 időpontbeli pillanatnyi sebességét.

302. Valamely anyag mennyisége az időtől függően a $Q(t) = 2t^2 - 6t + 7$ szabály szerint változik. A változás a [0; 5] időintervallumban folyik.

a) Mikor nő, mikor csökken a Q értéke?

b) Mennyi a Q minimuma és maximuma?

c) Mennyi a változás sebessége az 1, a 2 és a 4 időpontban?

c) Adjuk meg a változás sebességfüggvényét.

303. Valamely anyag mennyisége az időtől függően a $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x + 60$ szabály szerint változik. A változás a [0; 12] időintervallumban folyik.

a) Mennyi a változás sebessége az 1, a 4 és a 10 időpontban?

b) Adjuk meg a változás sebességfüggvényét.

c) Mikor nő, mikor csökken a vizsgált anyag mennyisége?

d) Mennyi a Q minimuma és maximuma?

304. Igazoljuk, hogy ha

$$D_f = \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1,$$

akkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$1+[f'(x)]^2 = 2f(x)f''(x).$$

305. Igazoljuk, hogy ha

$$D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x},$$

$$\text{akkor } f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.$$

***306.** Igazoljuk, hogy ha

$$D_f = \mathbf{R}, \quad f(x) = e^x \cos x,$$

akkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$f^{\mathrm{IV}}(x)+4f(x) = 0.$$

307. Igazoljuk, hogy ha

$$D_f = \mathbf{R}^+, \quad f(x) = 5x^2+x(1-\ln x),$$

akkor minden $x \in D_f$ esetén

$$x^2 f'''(x) = 1.$$

***308.** Igazoljuk, hogy ha

$$D_f = \mathbf{R} \setminus [-1; 0], \quad f(x) = x \ln \frac{x}{x+1},$$

akkor minden $x \in D_f$ esetén

$$x^3 f''(x) = [xf'(x)-f(x)]^2.$$

309. A $[0; T]$ időintervallumban folyó harmonikus rezgőmozgás kitérésfüggvénye:

$$f\colon [0; T] \mapsto \mathbf{R}, \quad t \mapsto A\cos \omega t.$$

Határozzuk meg a mozgás g gyorsulásfüggvényét, majd igazoljuk, hogy minden $t \in [0; T]$ esetén

$$g(t) = -\omega^2 f(t).$$

310. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbf{N}$ osztható 4-gyel, akkor az

$$\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto a \sin x + b \cos x \ (a \in \mathbf{R};\ b \in \mathbf{R})$$

függvény egyenlő az n-edik deriváltjával.

311. Az ismert addíciós tétel szerint

$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$

vagyis az

$$f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin(a+x) \quad (a \in \mathbf{R})$$

és a

$$g\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin a \cos x + \cos a \sin x$$

differenciálható függvény egyenlő. Fejezzük ki az x és az a szögfüggvényeivel az

$$f'(x) = g'(x)$$

egyenletet.

312. Az $(a+x)^4$ hatvány felírható polinomként:

$$(a+x)^4 = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + x^4.$$

Határozzuk meg a C_0, a C_1, a C_2 és a C_3 valós számot a következőképpen: legyen

$$f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto (a+x)^4 \quad (a \in \mathbf{R}),$$

és

$$g\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}, \quad x \mapsto C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + x^4.$$

Írjuk fel az $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$, ... egyenleteket.

313. Az előző feladatban leírt módszer felhasználásával alakítsuk polinommá az alábbi hatványokat!

a) $(x-1)^4$; *c)* $(x+3)^5$;

b) $(3-2x)^4$; *d)* $(1-x)^6$.

314. Jelöljük az $y = 4x - x^2$ egyenletű parabola és az x tengely metszéspontjait A-val és B-vel, a parabola tengelypontját C-vel. Mekkora annak a trapéznak a területe, amelyet az x tengely megfelelő szakasza, valamint a parabolához az A, a B és a C pontban húzott érintő fog közre?

315. Az $y = -x^2+4x-3$ egyenletű parabola és az x tengely metszéspontjait A-val és B-vel jelöljük. Határozzuk meg az x tengely fölött a parabolának az x tengellyel párhuzamos CD húrját úgy, hogy az $ABCD$ trapéz területe maximális legyen.

316. Az $y = ax^2+bx+c$ egyenletű parabola tengelypontja a $T(1;4)$ pont, a parabola illeszkedik az $A(0;3)$ pontra. Írjunk az x tengely által lemetszett parabolaszeletbe maximális területű téglalapot. Adjuk meg a csúcspontok koordinátáit.

***317.** Írjunk k ($k \in \mathbf{R}$) kerületű téglalapot az $y = -x^2+5x-4$ egyenletű parabola és az x tengely által határolt síkrészbe. A téglalap oldalai legyenek párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

a) A k milyen értéke esetén van megoldás?

b) A k milyen értéke esetén lesz maximális e téglalap területe?

c) Adjuk meg a maximális területű téglalap csúcspontjainak koordinátáit!