# IV. SOROZATOK ÉS SOROK

## 1. Sorozatok elemeinek megadása

**1.** Írjuk fel az alábbi sorozatok első négy elemét:

*a)* $\{3n-2\}$; *b)* $\{2n-3\}$; *c)* $\left\{\dfrac{2n-3}{n+1}\right\}$; *d)* $\{2n-7\}$;

*e)* $\left\{\sin\dfrac{\pi}{4}n\right\}$; *f)* $\{\log_2 n\}$; *g)* $\{n^n\}$; *h)* $\{(1-n)^n\}$;

*i)* $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$; *j)* $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$; *k)* $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$; *l)* $\{(a+1)^n\}$;

*m)* $\left\{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right\}$; *o)* $\left\{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}n\right)^{\left|\sin\frac{\pi}{2}n\right|}\right\}$;

*p)* $\left\{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2^{n-1}}\right\}$; *r)* $\left\{\text{az } \dfrac{n+4}{n} \text{ szám egészrésze}\right\}$;

*s)* $\left\{\begin{array}{l} 2, \text{ ha } n=1 \\ \dfrac{1}{a_{n-1}}, \text{ ha } n>1 \end{array}\right\}$; *t)* $\{n^3$ pozitív osztóinak a száma$\}$.

**2.** Adjuk meg képlettel azt a sorozatot, melynek néhány első eleme:

*a)* $1, 3, 5, 7, 9, \ldots;$

*b)* $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \ldots;$

*c)* $0, 2, 6, 12, 20, \ldots;$

*d)* $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13 \ldots;$

*e)* $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \ldots$

*f)* $0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots;$

*g)* $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{29}, \frac{25}{11}, \ldots;$

*h)* $-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \ldots.$

**3.** Hányadik eleme lehet az $\{a_n\}$ sorozatnak a

*a)* 4, ha $\{a_n\} = \{2n-6\}$;

*b)* 9, ha $\{a_n\} = \{n^3-n+3\}$;

*c)* 1, ha $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$;

*d)* 7, ha $\{a_n\} = \{[\sqrt{n}]\}$ (a szögletes zárójel a $\sqrt{n}$ szám egészrészét jelöli)?

**4.** Hány különböző eleme van az $\{a_n\} = \{(-1)^n + 1^n\}$ sorozatnak?

**5.** Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első tíz elemének összegét, ha a sorozat $n$-edik eleme:

*a)* $a_n = 2n-10$; *b)* $a_n=(-1)^n$; *c)* $a_n=2^{n-1}$; *d)* $a_n = n^2-5n$;

*e)* $a_n = \sin\frac{\pi}{2}n+\cos\frac{\pi}{2}n$; *f)* $a_n = 1+a_{n-1}$ és $a_1=0$.

**6.** Hányadik eleme a $\{b_n\}$ sorozatnak a 16, ha a sorozat $n$-edik eleme:

*a)* $b_n = n^2$; *b)* $b_n = (-2)^{n-1}$; *c)* $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$;

*d)* $b_n = n^2-17n+16$; *e)* $b_n = \log_2(n+1)$;

*f)* $b_n = 19\cdot(-1)^n+3\cdot(-1)^{n+1}$; *g)* $b_n = \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)^2$;

$$h)\ b_n = \begin{cases} 4, \text{ ha } n=1 \\ -2, \text{ ha } n=2 \\ b_{n-2}+b_{n-1}, \text{ ha } n>2 \end{cases}; \qquad i)\ b_n = \frac{n+100}{n+\frac{5}{8}}.$$

**7.** Egy sorozat első eleme 1, minden további eleme pedig a közvetlenül előtte és utána álló elem indexének számtani közepe. Adjuk meg a sorozatot az index függvényeként.

**8.** Egy sorozat első eleme $-1$, a második eleme 1. Minden további elem az illető elem előtt közvetlenül álló két elem összege. Határozzuk meg a sorozat első tíz elemének összegét.

**9.** Egy sorozat minden eleme négyzetszám. Igazoljuk, hogy van két elem, melyek különbsége osztható 4-gyel.

**10.** Az $\{a_n\}$ sorozat minden tagja az $n$ index elsőfokú függvénye. Határozzuk meg a sorozat tizedik tagját, ha

*a)* $a_1=2$, $a_3=7$; *c)* $a_3=0$, $a_{15}=-24$;

*b)* $a_2=1$, $a_6=13$; *d)* $a_{20}=40$, $a_{30}=10$.

**11.** A $\{b_n\}$ sorozat minden eleme az $n$ index másodfokú függvénye. Határozzuk meg a sorozat ötödik elemét, ha

*a)* $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$; *b)* $b_3=2$, $b_6=-16$, $b_8=-38$.

**12.** Mutassuk meg, hogy az $\{n^2-2\}$ és $\{n^2+3\}$ sorozatnak csak egy közös eleme van.

**13.** Határozzuk meg az $\{a_n\} = \left\{\sqrt{|14-n^2|}\right\}$ sorozat első öt elemét.

***14.** Igazoljuk, hogy az előző feladatban megadott sorozat minden tagja irracionális szám.

**15.** Legyen $a_n$ a $2^n$ szám utolsó számjegye (a tízes számrendszerben). Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat századik elemét.

**16.** Igazoljuk, hogy az $\{a_n\} = \left\{2 \sin n\frac{\pi}{6}\right\}$ sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amely egész szám! Adjuk meg azokat a tagokat, amelyeknek az értéke $\sqrt{3}$.

**17.** Van-e azonos elemük a következő sorozatoknak?

*a)* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n(n+2)}\right\}$;

*b)* $\{a_n\} = \{2^n\}$, $\{b_n\} = \{3^n+1\}$;

*c)* $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi}{6}n\right\}$, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2}(-1)^n\right\}$,

$$\{c_n\} = \left\{\frac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{68}\right\};$$

*d)* $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi}{4}n\right\}$, $\{b_n\} = \left\{\cos\frac{\pi}{3}n\right\}$;

*e)* $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$, $\{b_n\} = \left\{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right\}$;

*f)* $\{a_n\} = \{\sin n\}$, $\{b_n\} = \{\cos n\}$;

*g)* $\{a_n\} = \{n^2\}$, $\{b_n\} = \{\sqrt{n}\}$, $\{c_n\} = \left\{\frac{n+1}{2}\right\}$.

**18.** Azonosak-e a következő sorozatok?

*a)* $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \left\{\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$;

*b)* $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \left\{\sin(n+2)\frac{\pi}{2}\right\}$;

*c)* $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{\cos\pi n\}$;

*d)* $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{b_n\} = \left\{\operatorname{tg}(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$;

*e)* $\{a_n\} = \{n\}$, $\{b_n\} = \left\{\left[\frac{2n+1}{2}\right]\right\}$, ahol a szögletes zárójel a $\frac{2n+1}{2}$ szám egészrészét jelöli;

*f)* $\{a_n\} = \{\text{az } n^2-3n+2 = x^2 \ (x \in \mathbf{R}) \text{ egyenlet gyökeinek száma}\}$,

$\{b_n\} = \{1\}$;

*g)* $\{a_n\} = \{\text{az } x^2-3x+2 = 0 \ (x \in \mathbf{R}) \text{ gyökeinek száma}\}$,

$\{b_n\} = \{2\}$.

**19.** Határozzuk meg azt a sorozatot, amelyre teljesül, hogy bármely két elemének összege 1.

**20.** Jelölje $a_n$ azt a számot, ahányféleképpen 10 különböző elemből kiválaszthatunk $n$ darabot ismétlés nélkül. Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első $n$ elemének összegét, ha $n=1; 2; 3; \ldots$.

**21.** Egy sorozat elemei egymástól páronként különböző pozitív egész kitevős 2 alapú hatványok. Igazoljuk, hogy van három olyan elem a sorozatban, amelyek összege osztható hárommal.

**22.** Bizonyítsuk be, hogy az $\{n^2+3n-2\}$ sorozat elemei között végtelen sok összetett szám van!

***23.** Egy sorozat első eleme 1, második eleme 2. A sorozat bármely elemének reciproka, illetve bármely két elemének számtani közepe is eleme a sorozatnak. Bizonyítsuk be, hogy 0,9 a sorozathoz tartozó szám.

**24.** Az $\{a_n\}$ sorozatnak mely elemei egész számok, ha

*a)* $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n+8}{n}\right\}$;

*b)* $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n+5}{n+1}\right\}$;

*c)* $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n-11}{2n+1}\right\}$;

*d)* $\{a_n\} = \left\{\dfrac{7n+3}{3n+7}\right\}$?

**25.** Egy sorozat mindegyik eleme (az elsőt kivéve) a szomszédos elemek számtani közepe. Írjuk fel a sorozat első tíz elemét, ha $a_1=1$ és $a_5=9$.

**26.** Bizonyítsuk be, hogy az $a_{n+1} = \dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$ képlettel definiált sorozatok ($a_1$ és $a_2$ tetszőleges) szomszédos elemeinek különbsége állandó.

**27.** Jelölje $a_n$ az $n$ szám számjegyeinek összegét! Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=k$ egyenletnek (ahol $k$ tetszőleges pozitív egész szám) végtelen sok gyöke van az $n$ ismeretlenre.

**28.** Tetszőleges $n$ pozitív egész szám esetén legyen egy sorozat első $n$ elemének összege $S_n$. Határozzuk meg a sorozat első öt elemét, ha

*a)* $S_n = n$; *b)* $S_n = 2n+1$; *c)* $S_n = n^2$;

*d)* $S_n = n^2-n$; *e)* $S_n = \pi$; *f)* $S_n = n^3$.

***29.** Jelölje az $\{a_n\}$ sorozat első $n$ elemének összegét $S_n$ és legyen $S_n=n^3$.

*a)* Bizonyítsuk be, hogy van az $\{a_n\}$ sorozat tagjai között 1-től különböző négyzetszám!

*b)* Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat minden tagja páratlan szám.

*c)* Lássuk be, hogy $\{a_n\}$ egyetlen tagja sem osztható 3-mal.

**30.** Egy sorozat $k$-adik eleme: $a_k = \dfrac{6k+5}{4k-3}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Határozzuk meg azokat a $k$ értékeket, melyekre az $a_k$ egész szám.

**31.** Az $n$ pozitív egésznél nem nagyobb törzsszámok közül a legnagyobbat jelöljük $a_n$-nel.

*a)* Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozatnak mindegyik prímszám eleme.

*b)* Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, mely legalább hatszor eleme a sorozatnak.

**c)* Igazoljuk, hogy van olyan prímszám, mely legalább százszor eleme a sorozatnak.

**32.** Jelölje $a_n$ a $\sqrt{2}$ szám $n$-edik tizedesjegyét.

*a)* Határozzuk meg $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ értékét.

*b)* Lássuk be, hogy legalább két számjegy végtelen sokszor előfordul az $\{a_n\}$ sorozat elemei között.

**33.** Írjuk le sorban egymás mellé a pozitív egészeket. Legyen a sorban az $n$-edik számjegy $a_n$. Adjuk meg az $a_{100}$ értékét.

**34.** Rendezzük sorozatba a következő halmaz elemeit.

*a)* Természetes számok halmaza;

*b)* páros számok halmaza;

*c)* egész számok halmaza;

*d)* 4-nél nem nagyobb nevezőjű, pozitív törtek halmaza.