2. Sorozatok tulajdonságai

(korlátosság, monotonitás, periodicitás, konvergencia)

35. Határozzuk meg a következő sorozatok egy alsó korlátját:

a) $\{(-1)^n\}$; *b)* $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$; *c)* $\left\{2^{\frac{1}{n}}\right\}$;

d) $\left\{\frac{1-n}{n+1}\right\}$; *e)* $\{n^2-100n\}$; *f)* $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$;

g) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$; *h)* $\{\sqrt[n]{n}\}$; *i)* $\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}n\right\}$;

j) $\left\{-\frac{\log_2 n}{n}\right\}$.

36. Határozzuk meg a következő sorozatok egy felső korlátját:

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; *b)* $\left\{\frac{2n+1}{3n+2}\right\}$; *c)* $\left\{\frac{2n^2-5}{n^2+1}\right\}$;

d) $\left\{\frac{\sin n}{n+1}\right\}$; *e)* $\{n^2\cdot 2^{-n}\}$; *f)* $\{1+\sqrt[n]{100}\}$;

g) $\left\{\frac{3n^2}{n^2-2n-1}\right\}$; *h)* $\{100n-n^2\}$; *i)* $\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$;

j) $\left\{\frac{2+\sqrt[n]{100}}{100+\sqrt[n]{2}}\right\}$; *k)* $\{-n^2+(1+2+\ldots+n+n+1)\}$.

37. Mi az alábbi sorozatok legnagyobb alsó korlátja?

a) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$; *b)* $\left\{\frac{3n-7}{7-3n}\right\}$; *c)* $\{2^{-n}\}$;

d) $\left\{\frac{n^2-100}{n}\right\}$; e) $\{\sqrt[n]{n}\}$; f) $\left\{\frac{3n^2-2n+1}{1+2n-n^2}\right\}$;

g) $\{(q^2+1)^{-n}\}$, ahol q adott valós szám;

h) $\{(a^2-1)^n\}$, ahol a adott valós paraméter;

i) $\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}\right\}$; j) $\left\{\cos\frac{\pi}{4}n+\sin\frac{\pi}{4}n\right\}$.

38. Mi az alábbi sorozatok legkisebb felső korlátja?

a) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$; b) $\left\{\frac{2n-3}{n+1}\right\}$; c) $\left\{\frac{3n-2}{3-2n}\right\}$;

d) $\left\{\frac{(-2)^n}{1+(-3)^n}\right\}$; e) $\left\{\frac{n^2-6n}{6-n^2}\right\}$; f) $\{3-\sqrt[n]{n}\}$;

g) $\left\{\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^{-1}\right\}$;

h) $\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$;

i) $\left\{\log_2\frac{2n+1}{n}\right\}$; j) $\left\{\operatorname{tg}\left(\sin\frac{\pi}{3}n\right)\right\}$;

k) $\left\{\begin{array}{l}-1, \text{ ha } n=1\\ 1-\sqrt{|a_{n-1}^2-2|}, \text{ ha } n>1\end{array}\right\}$.

39. Van-e legnagyobb, illetve legkisebb eleme a következő sorozatoknak?

a) $\{3^{-n}\}$; b) $\left\{\sin\frac{\pi}{3}n\right\}$; c) $\left\{\frac{n^3}{100+n^2}\right\}$;

d) $\left\{\frac{n^3+50}{n^2}\right\}$; e) $\left\{\cos\frac{\pi}{100}n\right\}$; f) $\left\{\text{az } \frac{1}{n} \text{ szám törtrésze}\right\}$;

g) $\left\{\frac{\sqrt[n]{n-1}}{n}\right\}$; h) $\left\{\begin{matrix} 1, \text{ ha } n=1 \\ \sqrt[n]{100}, \text{ ha } n>1 \end{matrix}\right\}$; i) $\{\sqrt[n]{n}\}$;

j) $\{q^n\}$, ahol a q paraméter valós számot jelöl;

k) $\left\{\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right\}$.

40. Korlátosak-e a következő sorozatok?

a) $\left\{\frac{n+3}{n+2}\right\}$; b) $\left\{\frac{2-n}{n+3}\right\}$; c) $\left\{\frac{n^2-1}{10n}\right\}$; d) $\left\{\frac{n^2-1}{2-n^2}\right\}$;

e) $\left\{\frac{n^3+1}{100n^2}\right\}$; f) $\{(-2)^n\}$; g) $\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right\}$;

h) $\left\{\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{\pi}{2n}}\right\}$.

41. Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok korlátosak!

a) $\left\{\frac{2n-3}{n}\right\}$; b) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$; c) $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+4}\right\}$; d) $\{(a^2+1)^{-n}\}$;

e) $\{\sqrt{n^2+100}-n\}$; f) $\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}n\right\}$; g) $\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n}}\right\}$;

h) $\{a_n\} = \left\{\begin{matrix} 1, \text{ ha } n=1 \\ 1+\dfrac{2}{a_{n-1}}, \text{ ha } n>1 \end{matrix}\right\}$; i) $\{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{1+n^3}\}$;

j) $\left\{\frac{1}{\sin^3\frac{\alpha}{n}+\cos^3\frac{\alpha}{n}}\right\}$, ahol α pozitív valós paraméter.

42. Igaz-e, hogy korlátos sorozatok összege, különbsége, szorzata és hányadosa is korlátos? Állításunkat indokoljuk.

43. Milyen $n>0$, egész értékekre igaz, hogy,

a) $\dfrac{n^2-5n}{n+1}>1$; *b)* $\dfrac{n+1}{n^2-10}<\dfrac{1}{10}$; *c)* $\dfrac{2n-3}{3n+2}>\dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{3n-2}{2n-3}<1{,}51$; *e)* $\dfrac{n+1}{n(n+2)}<\dfrac{1}{100}$?

44. Igazoljuk, hogy a következő sorozatok mindegyike monoton:

a) $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$; *b)* $\{n^2-2n\}$; *c)* $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\right\}$;

d) $\{2^{1-2n}\}$; *e)* $\left\{\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}$; *f)* $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$;

g) $\left\{\begin{array}{l} 2, \text{ ha } n=1 \\ a_1+\dfrac{n}{2}, \text{ ha } n>1 \end{array}\right\}$; *h)* $\{(-1)^{n^2+n}\}$;

i) $\left\{\left(\sin\dfrac{\pi}{2}n+\cos\dfrac{\pi}{2}n\right)^2\right\}$;

j) $\{\sin^{2n}\alpha\}$, ahol α adott, valós paraméter.

45. Válasszuk ki a következő sorozatok közül a monoton növekvőket, a monoton csökkenőket, illetve a szigorúan monoton sorozatokat.

a) $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$; *b)* $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; *c)* $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}$;

d) $\left\{\dfrac{n^2-3n+2}{2-n^2}\right\}$; *e)* $\left\{\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}$; *f)* $\{(-2)^n+(2)^n\}$;

g) $\{n^2-100n\}$; *h)* $\{-n^2+1\}$; *i)* $\left\{\dfrac{2^n}{n^3}\right\}$;

j) $\{|n-3|+|1-n|\}$.

46. Bizonyítsuk be, hogy két monoton növekvő sorozat összege is monoton növekvő!

47. Igaz-e, hogy két monoton csökkenő sorozat különbsége is monoton csökkenő? Állításunkat indokoljuk.

48. Adjunk példát két-két olyan monoton növekvő sorozatra, amelynek különbsége, szorzata, illetve hányadosa *a)* nem növekvő; *b)* monoton csökkenő.

49. Adjunk meg két-két olyan nem monoton sorozatot, melyeknek összege, különbsége, szorzata, illetve hányadosa *a)* monoton csökkenő; *b)* monoton növekvő sorozat.

50. Igazoljuk, hogy minden számtani sorozat monoton.

51. Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amely nem monoton.

52. Milyen a érték esetén monoton az $\{(a^2-a-2)^n\}$ sorozat?

***53.** Legyen $\{a_n\}$ az $\{n\}$ sorozat egy tetszőleges átrendezése. Igazoljuk, hogy az $\{a_n-n\}$ sorozat nem monoton.

54. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ sorozat minden tagja kisebb 4-nél.

***55.** Bizonyítuk be, hogy az

$$\{a_n\}=\left\{\begin{array}{l} 1, \text{ ha } n=1 \\ \dfrac{1+a_{n-1}}{a_{n-1}}, \text{ ha } n\in \mathbf{N}\setminus\{1\} \end{array}\right\}$$

sorozat páros, illetve páratlan indexű elemei szigorúan monoton sorozatot alkotnak.

56. Bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n\}$ = {az n szám legnagyobb prímosztója} sorozatnak van olyan eleme, amely végtelen sokszor ismétlődik.

57. Periodikus-e a következő sorozat?

a) $\{(-1)^n\}$; *b)* $\{2^{-n}\}$; *c)* $\left\{\sin\dfrac{\pi}{3}n\right\}$;

d) $\left\{\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}$; *e)* $\left\{\cos \pi n+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}n\right\}$; *f)* $\left\{\sqrt[3]{\cos\dfrac{\pi}{2}n}\right\}$;

g) $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n^2\right\}$; *h)* $\{2^n$ utolsó számjegye$\}$; *i)* $\{\cos\pi\sqrt{n}\}$;

j) $\left\{\frac{9}{11}\right.$ tizedesvessző utáni, egymást követő tizedesjegyei$\left.\right\}$.

58. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$\text{Legyen } a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } \frac{n}{3} \text{ egész szám} \\ 0, & \text{ha } \frac{n+1}{3} \text{ egész szám}. \\ -1, & \text{ha } \frac{n+2}{3} \text{ egész szám} \end{cases}$$

Periodikus-e az $\{a_n\}$ sorozat? Igaz-e, hogy a $\{b_n\}=\{a_1+a_2+\ldots$ $\ldots+a_n\}$ sorozat periodikus?

59. Mekkora a periódusa a következő sorozatnak?

a) $\left\{\sin\frac{\pi}{100}n\right\}$;

b) $\{n^2$ 3-mal történő osztási maradéka$\}$;

c) $\left\{\cos^n\frac{\pi}{2}(n+1)\right\}$;

d) $\{$az $x^{n+1}-x=0$ egyenlet legkisebb valós gyöke$\}$.

60. Periodikus-e a $\left\{\sin\left(\cos\frac{\pi}{10}n\right)\right\}$ sorozat? Állításunkat indokoljuk.

61. Adjunk meg olyan sorozatot, amely semelyik indextől kezdve sem periodikus és csak két különböző eleme van, azok pedig végtelen sokszor előfordulnak a sorozatban.

62. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész p értéket, melyre $a=a_{n+p}$ tetszőleges n esetén, ha

$$\{a_n\}=\left\{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}n\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}n\right)\right\}.$$

63. Határozzuk meg tetszőleges periodikus mértani sorozat periódusát.

64. Van-e olyan periodikus sorozat, amely konvergens? Állításunkat igazoljuk.

***65.** Bizonyítsuk be, hogy a $\{\sin n\}$ sorozat nem periodikus.

***66.** Határozzuk meg a következő összeg értékét.

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}.$$

67. Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ periodikus sorozatok periódusa

a) 3, illetve 12; *b)* 4, illetve 10,

akkor az $\{a_nb_n\}$ sorozat is periodikus. Mi lesz a periódus?

68. Adjunk meg két tetszőleges pozitív egész periódusú sorozatot. Igazoljuk, hogy a sorozatok összege és különbsége is periodikus.

69. Bizonyítsuk be, hogy pozitív egész periódusú sorozatok összege és szorzata is periodikus. Mi lesz az eredményként kapott sorozatok periódusa?

***70.** Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ periodikus sorozatok periódusának aránya racionális szám, akkor az összegsorozat is periodikus.

71. Hány 1-nél nagyobb eleme van a következő sorozatnak?

a) $\left\{\dfrac{n+10}{n^2}\right\}$; *b)* $\left\{\dfrac{n+7}{2n}\right\}$; *c)* $\left\{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3n}\right\}$;

d) $\left\{\dfrac{n^2}{101-n^2}\right\}$; *e)* $\left\{\dfrac{n-10}{n}\right\}$; *f)* $\left\{\dfrac{1}{4}+3\cdot 2^{-n}\right\}$.

72. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben annak a sorozatnak az első tíz elemét, amelyek általános tagja

a) $a_n=n-3$; *b)* $a_n=\dfrac{7-n}{2}$; *c)* $a_n=\dfrac{n^2}{10}$; *d)* $a_n=\dfrac{n^2-10}{n}$;

e) $a_n=\dfrac{1}{2n-9}$; *f)* $a_n=\dfrac{n-10}{n+5}$; *g)* $a_n=n\sin\dfrac{\pi}{2}n$;

$h)\ a_n = \dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{2} n + \cos \frac{\pi}{2} n}$; $\qquad i)\ a_n = \sqrt{\dfrac{3n+1}{n}}$;

$j)\ a_n = n \sin \dfrac{2\pi}{n}$.

73. *a)* Határozzuk meg az előző feladatban adott sorozatok századik elemét.
b) Határozzuk meg az ezredik és az ezeregyedik elemet is.
c) A kapott értékek alapján döntsük el, hogy a sorozatok közül melyeknek van véges határértéke.

74. Ábrázoljuk az $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+10}}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ függvényt. Próbáljuk meg a kapott ábra alapján eldönteni, hogy az $\{a_n\} = \left\{\dfrac{\sqrt{n^2+10}}{n}\right\}$, illetve az $\{a_n\} = \left\{\dfrac{\sqrt{n^2+10}}{-n}\right\}$ sorozatnak mi a határértéke.

75. Konvergens-e az $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+10}}{n(-1)^n}$ általános taggal adott sorozat?

76. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, ha $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

$a)\ \left|\dfrac{1}{n+1}\right| < \dfrac{1}{100}$; $\qquad b)\ \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \dfrac{1}{100}$;

$c)\ \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+)$; $\qquad d)\ |2^{-n}| < \dfrac{1}{1000}$;

$e)\ \left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{20}$; $\qquad f)\ \left|\dfrac{\log_2 n}{n}\right| < \dfrac{1}{10}$;

$g)\ \left|\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} n}{n}\right| < \dfrac{1}{100}$; $\qquad h)\ \left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}\right| > 0{,}95$;

i) $\left|\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n+1}-1\right|<\frac{1}{10}$; *j)* $|\sqrt[n]{3}-1|<0{,}15$.

77. Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok mindegyike monoton és korlátos:

a) $\{10^{-n}\}$; *b)* $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$; *c)* $\left\{\frac{1-n}{n}\right\}$;

d) $\{\sqrt[n]{3}\}$; *e)* $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$; *f)* $\left\{\frac{-\sqrt{n}}{n+1}\right\}$;

g) $\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\right\}$; *h)* $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$; *i)* $\{\sqrt{n^2+1}-n\}$;

j) {az $(n+1)$ szám reciprokának tizedesvessző utáni első tizedesjegye}.

Mi e sorozatok határértéke? Állapítsunk meg olyan n indexeket, hogy a sorozat elemeinek a határértéktől való eltérése $\frac{1}{10}$-nél kisebb legyen!

78. A következő sorozatok közül melyek konvergensek?

a) $\{2^{-n}\}$; *b)* $\{(-2)^{-n}\}$; *c)* $\left\{\frac{n+100}{n}\right\}$;

d) $\left\{\frac{n+1}{100}\right\}$; *e)* $\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$; *f)* $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right\}$;

g) $\left\{\frac{n^2-3n}{8-n^2}\right\}$; *h)* $\{q^n\}$, ahol q valós paraméter;

i) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$; *j)* $\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n-1}\right\}$.

79. Mi a határértéke a következő sorozatnak?

a) $\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$; *b)* $\left\{\frac{n-100}{n}\right\}$; *c)* $\left\{\frac{n^{10}+100}{n^{11}}\right\}$;

IV.

d) $\{(101)^n \text{ utolsó számjegye}\}$; *e)* $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$;

f) $\left\{\frac{2^n+3^n}{5^{n-1}}\right\}$; *g)* $\{\sqrt{n+100}-\sqrt{n}\}$; *h)* $\left\{\begin{matrix} 3, \text{ ha } n=1 \\ \sqrt{a_{n-1}}, \text{ ha } n>1 \end{matrix}\right\}$;

i) $\{\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt{n^4+n}\}$; *j)* $\left\{n^{\frac{1}{n+1}}\right\}$.

80. Igazoljuk a határérték definíciója alapján, hogy

a) $\lim \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2}$; *b)* $\lim \frac{1}{2n-3} = 0$; *c)* $\lim \frac{2n-3}{n} = 2$;

d) $\lim \frac{2n-3}{3n-2} = \frac{2}{3}$; *e)* $\lim \frac{n^2-3}{1+3n^2} = \frac{1}{3}$; *f)* $\lim \frac{n^3+4}{n^4+3} = 0$;

g) $\lim \frac{3n^2-2n+1}{n^2+3n-2} = 3$; *h)* $\lim 2^{\frac{1}{n}} = 1$; *i)* $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, ha $a>0$;

j) $\lim \frac{\log_2 (n^2)}{n} = 0$.

81. Igaz-e, hogy ha két sorozat összegének véges határértéke van, akkor az eredeti sorozatoknak is véges határértékük van? Állításunkat példákkal igazoljuk.

82. Két pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy véges határértéke van *a)* az összegüknek; *b)* a különbségüknek; *c)* a szorzatuknak; *d)* a hányadosuknak.
Adjunk meg a feltételnek megfelelő olyan sorozatokat, melyek divergensek.

83. Adjunk példát olyan szigorúan növekvő sorozatra, melynek határértéke -100.

84. Adjunk példát olyan csökkenő, korlátos sorozatra, mely határértéke:

a) -2; *b)* 0; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* 100.

85. Igaz-e, hogy minden pozitív elemű monoton csökkenő sorozat konvergens?

86. Egy véges határértékű sorozatnak pozitív és negatív elemei is vannak. Igaz-e, hogy a sorozat határértéke szükségképpen 0?

87. Egy konvergens sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Igazoljuk, hogy a sorozat határértéke 0.

88. Tudjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat monoton, az $\{a_n^2\}$ sorozat pedig korlátos. Következik-e, hogy az $\{a_n\}$ sorozat konvergens? Mit mondhatunk a feltételek felcserélése esetén az $\{a_n\}$ sorozatról?

89. Adjunk meg olyan korlátos sorozatot, amelynek egy korlátja a 0,001 és a sorozatnak nincs határértéke.

90. Adjunk példát olyan nem konvergens és nem periodikus korlátos sorozatra, melynek egy korlátja $\frac{1}{10^{10}}$.

91. Adjunk meg öt olyan sorozatot, amelyeknek – páronként véve – egyetlen közös elemük sincs és határértékük 1.

92. Mondjunk példát két olyan sorozatra, amelyek közül az egyik nem konvergens, a másik sorozat konvergens és határértéke 2, továbbá a két sorozatnak végtelen sok közös eleme van.

93. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 1, a $\{b_n\}$ sorozaté pedig 2, akkor a két sorozatnak nem lehet végtelen sok közös eleme.

94. Konvergens-e az $\{a_n\}$ sorozat, ha a következőképpen definiáljuk: $a_n = n^2$, ha $n < 10^{10}$ és $a_n = \frac{1}{n}$, ha $n \geqq 10^{10}$?

*95. Adjunk meg olyan sorozatot, amelynek elemei között az összes pozitív egész szám reciproka szerepel, más számok pedig nem szerepelnek és a sorozatnak nincs határértéke.

*96. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sorozat bármely átrendezésével nyert sorozat konvergens.

97. Mondjunk példát olyan korlátos sorozatra, amelynek nincs legnagyobb és legkisebb eleme.

98. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat korlátos és nincs legnagyobb, sem legkisebb eleme, akkor nem lehet konvergens!

99. Igaz-e, hogy ha az $\{a_n\}$ pozitív tagú sorozatnak van véges határértéke, akkor az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozatnak is van véges határértéke?

100. Következik-e, hogy $\lim a_n = 1$, ha tudjuk, hogy

a) $\lim a_n^3 = 1$; *b)* $\lim a_n^4 = 1$?

101. Igazoljuk, hogy ha egy számtani sorozatnak van véges határértéke, akkor a differenciája 0.

102. Hány különböző eleme van az $\{a_n\}$ sorozatnak, ha $\{a_n\}$:

a) $\left\{\begin{array}{l} k, \text{ ha } n=1 \\ \frac{a_{n-1}}{k} + k-1, \text{ ha } n>1 \end{array}\right\}$, ahol k adott pozitív egész;

b) $\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{3}\right)\right\}$;

c) $\left\{\frac{7}{12} \text{ egymást követő tizedesjegyei}\right\}$;

d) $\left\{\left[\frac{n+10}{n}\right]\right\}$, ahol a szögletes zárójel a benne levő mennyiség egészrészét jelenti?

103. Az előző feladatban adott sorozatok közül melyek konvergensek?

104. Mi mondható a következő sorozatról monotonitás, korlátosság, periodicitás, és konvergencia szempontjából?

a) $\{n-3\}$; *b)* $\left\{\frac{2-n}{n}\right\}$; *c)* $\left\{\frac{1}{(-2)^n}\right\}$;

d) $\left\{\sin\frac{\pi}{n}\right\}$; *e)* $\{\cos \pi n\}$; *f)* $\left\{\sin\frac{\pi}{5}n\right\}$;

$g)$ $\left\{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}\right\}$; $\quad h)$ $\{2^{-n}+(-2)^{-n}\}$; $\quad i)$ $\left\{\sin\dfrac{\pi}{4n}+\cos\dfrac{\pi}{4n}\right\}$;

$j)$ $\left\{n^{\sin\frac{\pi}{2}n}\right\}$?

105. Van-e biztosan határértéke az $\{a_n\}$ sorozatnak, ha minden elemére teljesül, hogy

$a)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{n}\right|<\dfrac{1}{10}$; $\quad b)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{n}\right|<\dfrac{1}{n}$; $\quad c)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{10}\right|<\dfrac{1}{n}$;

$d)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{n^2}\right|<\dfrac{1}{100}$; $\quad e)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{100}\right|<\dfrac{1}{n^2}$; $\quad f)$ $|a_{2n}-1|<\dfrac{1}{n}$;

$g)$ $|a_n^2-2|<\dfrac{1}{n}$; $\quad h)$ $|a_n^3-2|<\dfrac{1}{n}$; $\quad i)$ $\left|a_n-\dfrac{1}{100}\right|<\sin\dfrac{\pi}{n}$;

$j)$ $\left|a_n-\sin\dfrac{\pi}{n}\right|<\dfrac{1}{100}$?

106. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\dfrac{n^k+k}{n^k}$ általános taggal adott sorozat adott k pozitív egész esetén konvergens. Adjuk meg $k=1$, 2, 3, 4, esetben az $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$-hoz tartozó küszöbindexet.

107. Bizonyítsuk be, hogy

$a)$ $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$; $\quad b)$ $\lim(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2})=0$;

$c)$ $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)=\dfrac{1}{2}$; $\quad d)$ $\lim(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)=\dfrac{1}{3}$.

***108.** Legyen k tetszőlegesen adott pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy $\lim(\sqrt[k]{n^k+n^{k-1}}-n)=\dfrac{1}{k}$.

*109. Jelöljük a_n-nel az $x^n+x^{n-1}-2=0$ egyenlet valós gyökeinek számát. Van-e határértéke az $\{a_n\}$ sorozatnak?

110. Igazoljuk, hogy az $\left\{n \sin \frac{\pi}{n}\right\}$ sorozat határértéke π.

111. Legyen $\{a_n\} = \{\sin^n \alpha\}$, ahol α tetszőlegesen adott valós szám. Igazoljuk, hogy a sorozat korlátos. Milyen α értékek esetén monoton, mikor konvergens, mikor periodikus az $\{a_n\}$ sorozat?

112. Milyen k egész érték esetén konvergens a $\left\{\cos \frac{2\pi}{k} n\right\}$, illetve a $\left\{\cos \frac{k\pi}{2} n\right\}$ sorozat?

113. Konvergens-e az $a_{2n} = \frac{n-1}{2n}$, $a_{2n-1} = \frac{n}{2n+1}$ képletekkel meghatározott sorozat?

*114. Igazoljuk, hogy az $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ sorozat minden eleme szerepel a $\{b_n\} = \left\{\frac{n-1}{2n}\right\}$ sorozat elemei között.

115. Jelöljük a_n-nel az n szám pozitív osztóinak számát. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozat nem konvergens.

116. Legyen b_n az n szám pozitív osztóinak összege. Mi az $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ sorozat határértéke?

117. Jelölje c_n az $n+1$ szám valódi osztóinak számát. Konvergens-e a $\left\{\frac{c_n}{n+1}\right\}$ sorozat?

118. Adjunk meg olyan, csupa irracionális számból álló sorozatot, amelynek határértéke racionális szám, mégpedig:

a) -4; *b)* $-\frac{2}{3}$; *c)* 0; *d)* $\frac{3}{4}$; *e)* 100.

119. Az $\{a_n\}$ sorozatnak véges határértéke van és minden tagja racionális szám. Mondjunk példát az adott tulajdonságú $\{a_n\}$ sorozatra, ha a határérték

a) -2; *b)* $-\sqrt{2}$; *c)* $\frac{1}{100}$; *d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *e)* $\sqrt[3]{2}$; *f)* $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Igazoljuk, hogy a feladatban adott tulajdonságú sorozat határértéke tetszőleges irracionális szám lehet.

120. Igazoljuk, hogy $\frac{K_n}{T_n} = 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, ahol K_n, illetve T_n az egységnyi oldalú szabályos n-szög kerülete, illetve területe.

121. Legyen a_n az egységnyi oldalú szabályos $(n+2)$-szög kerületének és területének hányadosa. Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 0.

122. Bizonyítsuk be, hogy $\lim \frac{K_n^2}{T_n} = 4\pi$, ahol K_n és T_n az egységnyi oldalú szabályos n-szög kerületét, illetve területét jelöli.

123. Egy konvergens sorozat bármely eleme (az első elemtől eltekintve) az

a) az előző elemének fele;
b) előző elemének négyzete;
c) előző elemének reciproka;
d) előző elemének kétszerese;
e) előző elemének négyzetgyöke;
f) előző elemnél 1-gyel nagyobb számnak a fele;
g) előző elem négyzeténél 2-vel kisebb szám;
h) előző elem sinusa.

Mi az egyes sorozatok határértéke?

124. Lássuk be, hogy az $\{a_n\} = \begin{cases} a, & \text{ha } n=1 \\ \frac{c+a_{n-1}}{2}, & \text{ha } n>1 \end{cases}$ sorozat,

ahol a és c tetszőlegesen adott valós szám, megadható az $a_n = \frac{a-c}{2^{n-1}} + c$ képlettel is. Ennek alapján bizonyítsuk be, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke c.

***125.** Igazoljuk, hogy az $\{a_n\} = \begin{cases} a, & \text{ha } n=1 \\ \frac{c+a_{n-1}}{k+1}, & \text{ha } n>1 \end{cases}$ sorozat, ahol a és c adott valós szám, k pozitív egész szám, konvergens és határértéke $\frac{c}{k}$.

***126.** Tekintsük az $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n \geqq 1)$ képlettel megadott sorozatot.

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton növekvő.

b) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat egyetlen eleme sem nagyobb 2-nél.

c) Állapítsuk meg a sorozat határértékét.

d) Igazoljuk, hogy a határérték $a_1 \geqq 0$ esetén független a_1 értékétől.

127. Igazoljuk, hogy az $\{a_n\} = \left\{\begin{array}{ll} 4, & \text{ha } n=1 \\ \frac{a_{n-1}}{2}+1, & \text{ha } n>1 \end{array}\right\}$ sorozatnak a határértéke 2.

128. Mi a határértéke az $\{a_n\} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{ha } n=1 \\ \frac{a_{n-1}}{2}+100, & \text{ha } n>1 \end{array}\right\}$ sorozatnak?

***129.** Az $\{a_n\}$ sorozat első eleme a, általános tagját pedig az $a_{n+1} = ba_n + c$ képlettel adjuk meg, ahol a, b, c adott valós számokat jelentenek. Az a, b és c paraméter mely értékei esetén lesz az $\{a_n\}$ sorozat konvergens?

130. Tekintsük az $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$, $n > 1$ képlettel adott sorozatot.

a) Mutassuk meg, hogy a sorozat minden eleme nagyobb $\sqrt{2}$-nél.

b) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

c) Igazoljuk, hogy a sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

131. Legyen c egy 1-nél nagyobb valós szám! Igazoljuk, hogy az $a_1 = c$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}}\right)$, $n > 1$ sorozat határértéke $\sqrt{c}$.

***132.** Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}^2}\right)$, $n > 1$ képlettel definiált sorozat határértéke $\sqrt[3]{2}$.

***133.** Legyen $\{a_n\} = \left\{\begin{array}{ll} 2, & \text{ha } n=1 \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}^k}\right), & \text{ha } n>1 \end{array}\right\}$, ahol k adott pozitív egész szám. Igaz-e, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke $\sqrt[k+1]{2}$?

***134.** Keressünk olyan formulát, amely tetszőleges pozitív valós szám n-edik gyökének ($n=2, 3, 4, \ldots$) közelítő számítására alkalmas, racionális számokkal történő közelítés esetén!

135. Tekintsük az $\{a_n\} = \left\{\begin{array}{ll} -1, & \text{ha } n=1 \\ 1, & \text{ha } n=2 \\ \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}, & \text{ha } n>2 \end{array}\right\}$ sorozatot.

a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens.

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat határértéke $\frac{1}{3}$.

136. Jelöljük a_n-nel n forint egy- és két forintosokra történő összes lehetséges felváltásának a számát (sorrendtől eltekintve). Igazoljuk, hogy az $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ sorozat határértéke $\frac{1}{2}$.

***137.** Legyen n forintnyi összeg egy-, két- és ötforintosokra történő összes lehetséges felváltásának a száma (sorrend nem számít) b_n. Bizonyítsuk be, hogy a $\left\{\frac{b_n}{n^2}\right\}$ sorozat határértéke $\frac{1}{20}$.

138. Jelöljük c_n-nel $5n$ forintnyi összeg két- és ötforintossal történő összes lehetséges kifizetésének számát. Határozzuk meg a $\lim \frac{c_n}{n}$ határértéket.

139. Az $\{a_n\}$ sorozatot *Fibonacci*-félének nevezzük, ha tetszőleges a_1 és a_2 esetén $n>2$-re az általános tagja az $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$ képzési szabállyal adható meg. Írjuk fel az ilyen tulajdonságú sorozat első tíz elemét, ha

a) $a_1=-1$, $a_2=1$; *b)* $a_1=0$, $a_2=1$; *c)* $a_1=1$, $a_2=-1$;

d) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$; *e)* $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{8}$; *f)* $a_1=0$, $a_2=a$, ahol $a \in \mathbf{R}$.

140. Mutassuk meg, hogy, ha egy Fibonnacci-féle sorozat mértani, akkor hányadosa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

141. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α és β konstansok esetén az $a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ általános taggal adott sorozat is Fibonnacci-féle sorozat. Keressünk olyan α és β értéket, hogy a sorozat valamennyi tagja különböző egész szám legyen.

142. Legyen $\{b_n\}$ tetszőleges Fibonnacci-féle sorozat. Mutassuk meg, hogy van olyan c_1 és c_2 konstans, melyekre teljesül tetszőleges n pozitív egész esetén, hogy $b_n = c_1q_1^n + c_2q_2^n$, ahol $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

143. Állapítsuk meg, hogy mi annak a sorozatnak az első tíz tagja, melyre $a_1 = a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ teljesül, ha $n > 2$.

144. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}$$

sorozat minden eleme egész szám. Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat éppen a Fibonacci-sorozat.

145. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozatban végtelen sok összetett szám van!

146. Igazoljuk, hogy az $\{F_n\}$, Fibonacci-sorozat

a) tizenkettedik tagja négyzetszám;

b) minden harmadik tagja páros szám;

c) minden negyedik tagja osztható 3-mal;

d) minden ötödik tagja osztható 5-tel.

147. Igazoljuk, hogy az $\{F_n\}$ Fibonacci-sorozat elemeire fennáll a következő összefüggés: $S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

148. Mutassuk meg, hogy az $\left\{\frac{F_n}{n^3}\right\}$ sorozat nem korlátos! ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

149. Igazoljuk, hogy az $\left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\right\}$ sorozat növekvő, az $\left\{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}\right\}$ sorozat pedig csökkenő, ahol $\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat!

150. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n esetén $1 \leqq \frac{F_{n+1}}{F_n} \leqq 2$. ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

151. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$ sorozat határértéke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

*152. Legyen $F_1+F_2+\ldots+F_n = S_n$. Mutassuk meg, hogy az $\left\{\frac{S_n}{F_n}\right\}$ sorozat határértéke $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$! ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

153. Igaz-e, hogy minden (0 elemet nem tartalmazó) Fibonacci-féle sorozat szomszédos elemeinek hányadosából képzett sorozatnak van véges határértéke?

*154. Az $\{a_n\}$ Fibonacci-féle sorozat első elme 2, második eleme 1. Bizonyítsuk be, hogy $n>2$ esetén $a_n = F_{n-2}+F_n$. Állapítsuk meg az $\left\{\frac{F_n a_{n+1}}{a_n F_{n+1}}\right\}$ sorozat határértékét! ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

Számtani sorozat

155. Írjuk fel a következő számtani sorozatok tizedik tagját:

a) $2, 4, 6, 8, \ldots$; *b)* $0{,}9, 0{,}8, 0{,}7 \ldots$; *c)* $1, \frac{1}{2}, 0, \ldots$;

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, \ldots$; *e)* $a, 3a, 5a, \ldots$; *f)* $5a, 5b, 10b-5a, \ldots$;

g) $a-b, b, 3b-a, \ldots$; *h)* $a, a-b, a-2b, \ldots$; *i)* $a^2, 1, 2-a^2, \ldots$;

j) $(a-1)^2, a^2, (a+1)^2-2, \ldots$.