149. Igazoljuk, hogy az $\left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\right\}$ sorozat növekvő, az $\left\{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}\right\}$ sorozat pedig csökkenő, ahol $\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat!

150. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n esetén $1 \leqq \frac{F_{n+1}}{F_n} \leqq 2$. ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

151. Bizonyítsuk be, hogy az $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$ sorozat határértéke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

***152.** Legyen $F_1+F_2+\ldots+F_n = S_n$. Mutassuk meg, hogy az $\left\{\frac{S_n}{F_n}\right\}$ sorozat határértéke $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$! ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

153. Igaz-e, hogy minden (0 elemet nem tartalmazó) Fibonacci-féle sorozat szomszédos elemeinek hányadosából képzett sorozatnak van véges határértéke?

***154.** Az $\{a_n\}$ Fibonacci-féle sorozat első elme 2, második eleme 1. Bizonyítsuk be, hogy $n>2$ esetén $a_n = F_{n-2}+F_n$. Állapítsuk meg az $\left\{\frac{F_n a_{n+1}}{a_n F_{n+1}}\right\}$ sorozat határértékét! ($\{F_n\}$ a Fibonacci-sorozat.)

Számtani sorozat

155. Írjuk fel a következő számtani sorozatok tizedik tagját:

a) $2, 4, 6, 8, \ldots$; *b)* 0,9, 0,8, 0,7 ...; *c)* $1, \frac{1}{2}, 0, \ldots$;

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, \ldots$; *e)* $a, 3a, 5a, \ldots$; *f)* $5a, 5b, 10b-5a, \ldots$;

g) $a-b, b, 3b-a, \ldots$; *h)* $a, a-b, a-2b, \ldots$; *i)* $a^2, 1, 2-a^2, \ldots$;

j) $(a-1)^2, a^2, (a+1)^2-2, \ldots$.

156. Egy számtani sorozat n-edik eleme bármely pozitív egész esetén:

a) $n+1$; *b)* $2n$; *c)* $3n-4$;

d) $1-n$; *e)* 100; *f)* $\frac{n}{2}$;

g) $\frac{n-1}{3}$; *h)* $n^2-(n-2)^2$; *i)* $an+1$;

j) $\frac{a^2-an}{2}$, ahol a valós paraméter.

Határozzuk meg az első öt elemet.

157. Egy számtani sorozat negyedik és ötödik eleme rendre:

a) 4 és 5; *b)* 5 és 4; *c)* 100 és 101;

d) 3 és 5; *e)* 7 és -1; *f)* 0,9 és 0,3;

g) a és $a+3$; *h)* a és b; *i)* $a-b$ és $a+b$;

j) $(a-1)^2$ és $(a+1)^2$.

Határozzuk meg a sorozat első három elemét!

158. Mi az alábbi számtani sorozatok harmadik eleme, ha

a) $a_1=1$, $a_2=2$; *b)* $a_2=2$, $a_4=1$; *c)* $a_2=3$, $a_4=5$;

d) $a_4=1$, $a_6=5$; *e)* $a_2=3$, $a_7=8$; *f)* $a_{10}=20$, $a_{20}=10$;

g) $a_1=a$, $a_4=4a$; *h)* $a_2=a+2$, $a_{10}=a+10$;

i) $a_5=a^2$, $a_7=(a+1)^2$; *j)* $a_{100}=-100$, $a_{200}=100$?

159. Határozzuk meg az a paraméter értékét, ha a következő három szám egy számtani sorozat első három eleme:

a) $1, 3, a$; *b)* $1, a, 3$; *c)* $a, 1, 3$; *d)* $-a, 3, 1$;

e) $a-1, a+1, 3$; *f)* $a-1, 3, a+1$; *g)* $3, a-1, a+1$; *h)* $a, a^2, 0$;

i) a, a^2, a^3; *j)* a^2, a, a^3.

160. Határozzuk meg annak a számtani sorozatnak az első tagját, amelynek második és harmadik tagja

a) $a+1$ és $a+3$; *b)* $a-1$ és $a-3$; *c)* $\frac{a-1}{2}$ és $\frac{a+1}{2}$;

d) $3-2a$ és $1-2a$; *e)* $2a-3$ és $a-1$; *f)* $a-1$ és $2a-3$;

g) a^2 és $(a+1)^2$; *h)* $2-3a$ és $3a-2$; *i)* $(a-1)^3$ és $(a+1)^3$;

j) $\cos^2 a$ és 1, ahol a valós paraméter.

161. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő három szám egy számtani sorozat három egymást követő eleme legyen:

a) $1, a, 4$; *b)* $a-1, a+1, 2$; *c)* $-2, a+1, 4a$;

d) $\frac{a}{2}, a+1, a^2+1$; *e)* $\frac{1}{a}, 1, a$; *f)* $1, -a, a^2$;

g) $a-1, a^3, a+1$; *h)* $a-2, a^4, a+2$;

i) $a+b, b, 3a+b$ ($b \in \mathbf{R}$); *j)* a, a^2, a^3-2.

162. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto ax+b$, $x \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ függvény értékei – ahol a és b adott valós számok – egy számtani sorozatot határoznak meg.

163. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelynek elemei az *a)* kettővel; *b)* hárommal; *c)* öttel; *d)* hattal osztható pozitív egészek.

164. Egy számtani sorozat második és hetedik eleme rendre

a) 2 és 7; *b)* 1 és 6; *c)* 0 és 10; *d)* 2 és -3;

e) $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$; *f)* x és $x+10$; *g)* x^2 és $(x+5)^2$; *h)* $-x$ és x;

i) $-2x^2$ és $3x^2$; *j)* $(x-y)^2$ és $(x+y)^2$.

Határozzuk meg a sorozat első hat elemét. ($x, y \in \mathbf{R}$.)

165. Mi annak a számtani sorozatnak az első tagja és differenciája, amelynek ötödik tagja 8 és nyolcadik tagja 5?

166. Határozzuk meg a következő számtani sorozatok kérdezett elemét, ha

a) $a_1=3$, $a_5=11$, $a_7=?$; *b)* $a_2=-1$, $a_{10}=7$, $a_6=?$;

c) $a_7=2$, $a_{10}=-1$, $a_3=?$; *d)* $a_2=100$, $a_{11}=10$, $a_1=?$;

e) $a_3=26$, $a_7=2$, $a_{10}=?$; *f)* $a_1=a-b$, $a_3=a+b$, $a_7=?$;

g) $a_{10}=10x$, $a_{20}=30x$, $a_{40}=?$;

h) $a_2=x(x-6)$, $a_6=(x-1)^2-1$, $a_8=?$. ($a, b, x \in \mathbf{R}$.)

167. Határozzuk meg az $\{a_n\}$ számtani sorozat első elemét és differenciáját, ha tudjuk, hogy

a) $a_1+a_7=16$ és $a_3+a_9=24$; *b)* $a_2-a_5=3$ és $a_3+a_4=11$;

c) $a_7-a_2=1$ és $a_{20}=2a_{10}$; *d)* $a_1a_2=a_4$ és $\dfrac{a_6}{a_3}=2$;

e) $a_1+a_2+a_3=a_5$ és $a_2^2=a_{14}$;

f) $a_2+a_4=a_3^2$ és $\dfrac{1}{a_5}+\dfrac{1}{a_{11}}=\dfrac{1}{a_3}$;

g) $a_4+a_{12}=10+2a_7$ és $a_1a_2=a_4^2$;

h) $6a_2a_3=a_4a_5$ és $a_8-a_2=a_4^2-a_3^2$;

i) $a_1+a_2+a_4=a_3$ és $a_1a_3a_5+a_{14}=0$;

j) $a_1a_2a_3=a_{24}$ és $a_2a_3a_4=a_{96}$.

168. Egy számtani sorozat ötödik eleme 20, tizedik eleme 100. Eleme-e a sorozatnak a 180?

169. Mekkora az első eleme és differenciája annak a számtani sorozatnak, amelynek ötödik eleme a, tizenötödik eleme b?

170. Egy számtani sorozat k-adik eleme a, l-edik eleme b.

a) Határozzuk meg a sorozat első elemét és differenciáját!

b) Mi a sorozat $(k+l)$-edik eleme?

c) Hányadik eleme a sorozatnak $\dfrac{a(8-l)+b(k-8)}{k-l}$?

d) Igazoljuk, hogy $\dfrac{a}{b}=\dfrac{l}{k}$, ha $a_{l+k}=0$ és $b\neq 0$.

171. Mekkora az első eleme és differenciája annak a számtani sorozatnak, melyre teljesül, hogy $a_k+a_l=a$ és $a_n+a_m=b$, ahol a és b különböző valós paraméterek?

172. Iktassunk 1 és 10 közé 17 darab számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos elemeit alkossák.

173. A -3 és 9 közé iktasunk olyan számokat, hogy a -3-mal és 9-cel együtt egy számtani sorozat első hét elemét nyerjük.

174. $a-b$ és $a+b$ közé helyezzünk el három számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt számtani sorozatba illeszkedjenek.

175. Helyezzünk el 1 és 58 között minimális számú számot úgy, hogy azok az eredetiekkel együtt egy számtani sorozat szomszédos elemeit alkossák, ha tudjuk, hogy a számok között szerepel a 10 is. Hányadik helyen fog szerepelni a 10?

176. Egy számtani sorozat első két tagjának összege 7, harmadik és negyedik tagjának összege 19. Határozzuk meg a sorozat első négy tagját.

177. Bizonyítsuk be, hogy ha egy számtani sorozat különböző pozitív egészekből áll, akkor az elemei között végtelen sok összetett szám van.

178. Egy számtani sorozatnak eleme az 1 és a 2 is. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész szerepel a sorozat elemei között, ha $d>0$.

179. Egy számtani sorozatnak van két racionális eleme. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja racionális szám.

180. Legfeljebb hány racionális tagja lehet egy olyan számtani sorozatnak, amelynek van racionális és irracionális tagja is?

181. Adjunk meg csupa különböző irracionális számot tartalmazó számtani sorozatot.

182. Igazoljuk, hogy ha egy számtani sorozatnak van két irracionális eleme, akkor végtelen sok is van.

***183.** Legfeljebb hány egymást követő prímszám szerepelhet egy számtani sorozat egymást követő tagjaiként?

184. Bizonyítsuk be, hogy ha egy növekvő számtani sorozatnak tagja az 1 és 5, akkor a sorozatnak végtelen sok eleme négyzetszám.

185. Egy számtani sorozat mindegyik elemének abszolútértéke kisebb 5-nél. Mi a sorozat első tagja, ha a századik tag -3?

186. Egy számtani sorozat bármely két tagjának számtani közepe is tagja a sorozatnak. Mi lehet a sorozat differenciája?

187. Egy számtani sorozat mindegyik tagja irracionális szám. Szerepelhet-e valamelyik tag négyzete a sorozatban? Állításunkat igazoljuk.

188. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelynek minden tagja pozitív egész szám és tagjai között nincs négyzetszám!

189. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan számtani sorozat, amelynek tagjai között mindegyik pozitív egész szám reciproka szerepel.

190. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelynek tagjai között előfordulnak az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ számok.

191. Egy növekvő számtani sorozatnak eleme az a és b szám ($a<b$). Tagja-e a sorozatnak a $100b-99a$ szám?

192. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelynek első k darab eleme prímszám, de a $k+1$-edik eleme nem az. Legyen k értéke rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6.

193. Egy négyjegyű szám jegyei – sorrendjüknek megfelelően – egy számtani sorozat szomszédos elemei. Mi a keresett négyjegyű szám, ha a számjegyek összege 18?

194. Határozzuk meg a néggyel osztható háromjegyű számok közül azokat, amelyeknek jegyei – sorrendjüknek megfelelően – egy számtani sorozat szomszédos tagjai.

195. Határozzuk meg α értékét, ha tudjuk, hogy a sorozat első három taja egy számtani sorozat három szomszédos tagja. *a)* $\{\sin^n \alpha\}$; *b)* $\{\cos^n \alpha\}$; *c)* $\{\mathrm{tg}^n \alpha\}$.

196. Egy számtani sorozat képzési szabálya a következő: $a_{n+2}-a_n = a_1$. Határozzuk meg a sorozat első három taját, ha a hetedik tag értéke 8.

197. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan számtani sorozat, amelynek tagjai között szerepel a $\sqrt{2}$, a $\sqrt{3}$, és a $\sqrt{5}$ szám.

198. Igazoljuk, hogy az $\{a_{n+1}-2a_n\}$ sorozat számtani sorozat, ha az $\{a_n\}$ sorozat is az.

199. Bizonyítsuk be, hogy bármely számtani sorozathoz található olyan x és y valós szám, hogy a számtani sorozat előállítható $\{nx+(n+1)y\}$ alakban.

200. Igaz-e, hogy bármely pozitív tagú $\{a_n\}$ számtani sorozat tagjaira teljesül az $a_k a_{k+2} \leqq a_{k+1}^2$ összefüggés, tetszőleges k pozitív egész esetén?

201. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ számtani sorozat, akkor az $\{a_n+b_n\}$ sorozat is számtani sorozat.

202. Ha az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ számtani sorozat, akkor lehet-e az $\{a_n b_n\}$ sorozat is számtani sorozat? Állításunkat indokoljuk!

***203.** Egy számtani sorzat első három tagja négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat különbsége osztható 24-gyel.

***204.** Egy pozitív számokból álló számtani sorozat x-edik elemének ötödrésze az y-adik elem, a negyedrésze pedig az $y+2$-edik elem. Határozzuk meg a sorozat első öt elemét, ha tudjuk, hogy az első, x-edik és y-adik elem egész szám és az x-edik elem prímszám.

205. Határozzuk meg annak a számtani sorozatnak az első tagját, melyre teljesül, hogy az első három tagjának összege negyedrésze a következő három tag összegének.

206. Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z számok egy számtani sorozat szomszédos elemei, akkor az x^2+xy+y^2, x^2+xz+z^2, y^2+yz+z^2 számok is egy számtani sorozat szomszédos elemei.

207. Határozzuk meg azt a legnagyobb n pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy az n-nél kisebb négyzetszámok száma megegyezik az n-nél kisebb, 10-zel osztható pozitív egészek számával!

***208.** Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok 10 alapú hatvány van abban a számtani sorozatban, amelyben a második elem 107, a tizenegyedik elem pedig 170.

209. Egy számtani sorozat egyik tagja, e tag négyzete és köbe a sorozat három különböző indexű eleme. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja racionális szám.

***210.** Egy konstanstól különböző számtani sorozatnak eleme a második tagjának négyzete, köbe és negyedik hatványa is. Tudjuk, hogy a második tag köbe a sorozat kilencedik tagja. Határozzuk meg a sorozat első három tagját.

211. Határozzuk meg annak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögeit, amelynek oldalai egy számtani sorozat szomszédos elemei.

212. Van-e olyan háromszög, amelynek oldalai és kerülete egy számtani sorozat szomszédos tagjai?

213. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos elemei. A háromszög legnagyobb szöge kétszerese a legkisebbnek. Mekkorák az oldalak, ha szorzatuk 15 egységnyi?

214. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögei α, β, γ, a szemközti oldalak hossza pedig rendre a, b, c és ha a háromszög szögei egy számtani sorozat szomszédos tagjai az adott sorrendben, akkor $b^2 = \dfrac{a^3+c^3}{a+c}$.

215. Az a, b, c oldalú háromszög oldalaihoz írt körök sugarait jelöljük R_a, R_b, R_c-vel. A háromszög oldalainak szokásos jelölését használva igazoljuk, hogy ha $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ és $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ egy számtani sorozat szomszédos tagjai, akkor R_a, R_b, R_c is egy számtani sorozat egymást követő elemei.

216. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c oldalú háromszögre teljesül a $\dfrac{b-c}{R_a}+\dfrac{c-a}{R_b}+\dfrac{a-b}{R_c}=0$ összefüggés, ha a háromszög oldalai az adott sorrendben egy számtani sorozat szomszédos tagjai, és R_a, R_b, R_c az a, b, c oldalakhoz írt körök sugarát jelöli.

217. Határozzuk meg k értékét, ha tudjuk, hogy az $\left\{\dfrac{n-1}{2}\right\}$ sorozat első k elemének összege 390.

218. Számítsuk ki 1-től 1000-ig a természetes számok összegét.

219. Határozzuk meg a pozitív egészek összegét

a) 2-től 101-ig;
b) 32-től 102-ig;
c) n-től $2n$-ig;
d) k-tól n-ig $(k<n)$.

220. Határozzuk meg a kétjegyű páratlan számok összegét!

221. Mekkora a háromjegyű páros számok összege?

222. Határozzuk meg a 101 és 501 közé eső olyan természetes számok összegét, amelyek

a) oszthatók 2-vel; *c)* oszthatók 5-tel;

b) oszthatók 3-mal; *d)* 12-vel osztva 7 maradékot adnak!

223. Az $\{1+2n\}$ sorozat tagjait összeadjuk az első elemmel kezdve, a k-adikkal bezáróan. Legalább mekkora k értéke, ha az összeg nagyobb 1986-nál?

224. Az $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$ sorozat első k darab tagját összeadjuk. Legfeljebb mekkora lehet a k értéke, ha az összeg 200-nál kisebb?

225. Egy számtani sorozat differenciája 4, az első 20 elem összege 0. Mekkora a sorozat tizedik eleme?

226. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat, akkor az $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ is számtani sorozat, ahol $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$.

227. Az $\{a_n\}$ sorozatról tudjuk, hogy tetszőleges k pozitív egész esetén $a_1+a_2+\ldots+a_k = k^2$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat számtani sorozat. Mi a századik tagja a sorozatnak?

228. Egy számtani sorozat első eleme $\frac{1}{7}$, differenciája $\frac{1}{3}$. Tudjuk, hogy a sorozat első k elemének összege egész szám. Határozzuk meg k minimumát.

229. Egy csökkenő számtani sorozat első 17 tagjának összege 0. Hány darab pozitív tagja van a sorozatnak?

230. Négy pozitív egész szám egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. Határozzuk meg a számokat, ha összegük 26, szorzatuk pedig 880.

231. Igazoljuk, hogy bármely korlátos számtani sorozatnak van véges határértéke.

232. Egy számtani sorozat első 101 tagjának összege megegyezik a sorozat 5001-edik tagjával. Határozzuk meg az $\frac{a_{100}}{a_2}$ arányt, feltéve, hogy $a_1 \neq 0$.

233. Bizonyítsuk be, hogy a $\{2n-1\}$ sorozat első k elemének összege tetszőleges $k \in \mathbf{Z}^+$ érték esetén négyzetszám.

***234.** Tekintsük az $\{n\}$ sorozat első k darab elemének összegét! Igazoljuk, hogy van olyan k érték, amelyre az összeg négyzetszám.

235. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelyre tetszőleges pozitív egész k esetén teljesül, hogy a sorozat első k elemének összege:

a) $2k^2$; *b)* $3k^2$; *c)* $\frac{k^2}{2}$; *d)* k.

236. Mi az első három eleme annak a számtani sorozatnak, amely első n elemének az összege tetszőleges n esetén:

a) n^2+n; *b)* n^2-n; *c)* $5n^2-3n$; *d)* $\frac{7n^2-5n}{3}$.

237. Egy számtani sorozatnak nem eleme a 0 és az első néhány elemének ($n>2$) összege megegyezik a következő elemmel.

a) Igazoljuk, hogy a sorozat első eleme és differenciája különböző előjelű.

b) Bizonyítsuk be, hogy $a_1+a_2+\ldots+a_k = a_{k+1}$ esetén $a_1a_{k-1}<0$, ha $k>2$.

c) Oldjuk meg x-re az $a_xa_{x+1}<0$ egyenlőtlenséget, ha adott k érték esetén $a_1+a_2+\ldots+a_{2k} = a_{2k+1}$.

238. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszög egyik magasságát n egyenlő részre osztottuk és az osztópontoktól a magasságra merőleges egyeneseket húztunk. Mekkora ezen egyenesek háromszögbe eső darabjainak összhosszúsága?

4. Mértani sorozat

239. Írjuk fel az $\{a_n\}$ mértani sorozatnak az adott taggal szomszédos tagjait, ha

a) $a_2=2$, $q=4$; *b)* $a_3=4$, $q=2$; *c)* $a_4=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$;