233. Bizonyítsuk be, hogy a $\{2n-1\}$ sorozat első k elemének összege tetszőleges $k \in \mathbf{Z}^+$ érték esetén négyzetszám.

***234.** Tekintsük az $\{n\}$ sorozat első k darab elemének összegét! Igazoljuk, hogy van olyan k érték, amelyre az összeg négyzetszám.

235. Adjunk meg olyan számtani sorozatot, amelyre tetszőleges pozitív egész k esetén teljesül, hogy a sorozat első k elemének összege:

a) $2k^2$; *b)* $3k^2$; *c)* $\frac{k^2}{2}$; *d)* k.

236. Mi az első három eleme annak a számtani sorozatnak, amely első n elemének az összege tetszőleges n esetén:

a) n^2+n; *b)* n^2-n; *c)* $5n^2-3n$; *d)* $\frac{7n^2-5n}{3}$.

237. Egy számtani sorozatnak nem eleme a 0 és az első néhány elemének ($n>2$) összege megegyezik a következő elemmel.

a) Igazoljuk, hogy a sorozat első eleme és differenciája különböző előjelű.

b) Bizonyítsuk be, hogy $a_1+a_2+\ldots+a_k = a_{k+1}$ esetén $a_1a_{k-1}<0$, ha $k>2$.

c) Oldjuk meg x-re az $a_xa_{x+1}<0$ egyenlőtlenséget, ha adott k érték esetén $a_1+a_2+\ldots+a_{2k} = a_{2k+1}$.

238. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszög egyik magasságát n egyenlő részre osztottuk és az osztópontoktól a magasságra merőleges egyeneseket húztunk. Mekkora ezen egyenesek háromszögbe eső darabjainak összhosszúsága?

4. Mértani sorozat

239. Írjuk fel az $\{a_n\}$ mértani sorozatnak az adott taggal szomszédos tagjait, ha

a) $a_2=2$, $q=4$; *b)* $a_3=4$, $q=2$; *c)* $a_4 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;

d) $a_5=7,\ q=-1$; *e)* $a_k=(-1)^{2k},\ q=-1$; *f)* $a_6=8,\ q=-2$;

g) $a_7=0,\ q=-3$; *h)* $a_8=x,\ q=x$;

i) $a_9=\dfrac{x-1}{x^2+1},\ q=x-1,\ x\neq 1$; *j)* $a_{10}=x^2,\ q=\dfrac{1}{x^2+1}$.

240. Határozzuk meg a mértani sorozat első három tagját, ha

a) $a_4=4,\ q=2$;

b) $a_6=1,\ q=\dfrac{1}{2}$;

c) $a_5=-2,\ q=-\dfrac{1}{2}$;

d) $a_7=1,\ q=-1$;

e) $a_8=0{,}1,\ q=0{,}1$;

f) $a_8=2^8,\ q=-2$;

g) $a_9=\dfrac{1}{2^8},\ q=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

h) $a_{10}=x^{10}\ q=x$;

i) $a_{10}=x^{20},\ q=\sqrt[3]{x}$;

j) $a_{10}=\dfrac{1}{x^8},\ q=-\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$.

241. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az $\{a_n\}$ sorozat elemeit, ha

a) $a_n=2^n$; *b)* $a_n=2^{n-2}$; *c)* $a_n=4^n$; *d)* $a_n=4^{-n}$;

e) $a_n=(-4)^n$; *f)* $a_n=(-2)^n$; *g)* $a_n=(-2)^{-n}$; *h)* $a_n=(-1)^n$;

i) $a_n=\sqrt{2}^{\,n-1}$; *j)* $a_n=(-\sqrt{2})^{1-n}$.

242. Mekkora lehet a mértani sorozat hányadosa, ha adott a következő két tagja:

a) $a_2=1,\ a_5=8$; *b)* $a_5=\sqrt{2},\ a_7=\sqrt{8}$; *c)* $a_3=1,\ a_9=1$;

d) $a_5=2^{10},\ a_8=4^2$; *e)* $a_7=\dfrac{1}{2},\ a_{10}=32$; *f)* $a_k=1,\ a_{2k}=1$;

g) $a_k=1,\ a_{2k+1}=-1$; *h)* $a_k=2,\ a_{k+3}=54$; *i)* $a_9=1,\ a_{k+9}=2^{2k}$;

j) $a_5=2^5,\ a_{10}=2^{-5}$.

243. Lehet-e egy mértani sorozat harmadik, illetve hetedik tagja

a) 1 és 16; *b)* -1 és -16; *c)* -16 és -1; *d)* -1 és 16;

e) 1 és -16; *f)* 1 és 1; *g)* -1 és 1; *h)* x és x^9;

i) x^9 és x^3; *j)* x^3 és $(-x)^5$?

244. Számítsuk ki a mértani sorozat ötödik elemét, ha adott az első elem és a kvociens.

a) $a_1 = 3$; $q=2$; *b)* $a_1 = \frac{1}{2}$, $q=3$; *c)* $a_1 = -1$, $q=\sqrt{2}$;

d) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \sqrt[4]{2}$; *e)* $a_1 = |x|$, $q = \sqrt{x^2}$;

f) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $q = \sqrt[8]{x^2+1}$;

g) $a_1 = \frac{1}{x^2-x}$, $q = \sqrt{x-1}$, ha $x>1$.

245. Adjuk meg a mértani sorozat kérdezett elemét, ha ismerjük másik két elemét.

a) $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=?$;

b) $a_1=2$, $a_3=8$, $a_2=?$;

c) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_6=16$, $a_8=?$;

d) $a_5 = \frac{1}{8}$, $a_8=8$, $a_6=?$;

e) $a_1=27$, $a_4=8$, $a_6=?$;

f) $a_7=-2$, $a_{10} = \frac{1}{4}$, $a_5=?$.

246. Bizonyítsuk be, hogy bármely, pozitív tagokból álló $\{a_n\}$ mértani sorozatra igaz, hogy
a) bármely három szomszédos eleme közül a középső a közrefogó elemek mértani közepe;
b) az $(n+k)$-adik elem mértani közepe a k-adik és $(2n+k)$-adik elemnek.

247. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mértani sorozatnak a hetedik tagja pozitív, akkor végtelen sok pozitív tagja van!

248. Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege megegyezik az első hat tag összegének $\frac{5}{6}$ részével. Mi a sorozat hányadosa?

249. Adjuk meg a mértani sorozat két eleméhez a közbeesőket, ha

a) $a_4 = 1$, $a_7 = 1000$;

b) $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_7 = -\frac{27}{8}$;

c) $a_5 = -2$, $a_{10} = 2$;

d) $a_k = 4$, $a_{k+3} = 1$;

e) $a_{k+1} = 16$, $a_{k+5} = \frac{1}{16}$;

f) $a_k = a$, $a_{k+4} = \frac{1}{a}$;

g) $a_1 = 4$, $a_{2k} = -4$;

h) $a_{k-1} = a^2$, $a_{k+3} = b^2$.

250. Határozzuk meg k értékét, ha adottak a mértani sorozat alábbi adatai.

a) $a_1 = -2$, $q = -2$, $a_k = 64$;

b) $a_2 = 3$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_k = -\frac{1}{9}$;

c) $3 = \frac{a_k a_{k+2}}{a_1^2} = q^{10}$;

d) $a_2 = 1$, $a_{10}^k = a_k^{12}$.

251. Számítsuk ki az $\{a_n\}$ mértani sorozat ötödik tagját, ha tudjuk, hogy

a) $a_1 = \frac{1}{q}$, $q = a_1^2$;

b) $6a_1 = a_2 + a_3$, $q = -a_1$;

c) $a_2 = a_1^2$, $q = \frac{-8}{a_1^2}$;

d) $a_1 = \frac{a_2}{2a_3}$, $q = \frac{1}{2}$;

e) $a_1 = \frac{1}{q}$, $q = \frac{a_2 + a_3}{2}$;

f) $\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_2 + a_3}{3}$, $a_4 = -1$;

g) $q = a_2 a_3$, $a_2 + a_3 = 6$;

h) $a_1 a_2 = a_1 + a_2$, $a_3 = 3q$;

i) $a_1a_2a_3 = a_1+a_2+a_3,\ 2a_2 = a_1+a_3$;

j) $\dfrac{a_5-a_4}{a_2-a_1} = 8,\ a_5=2a_1a_2a_3a_4$.

252. Számítsuk ki a mértani sorozat első elemét, ha ismerjük két elemét:

a) $a_3=1,\ a_5=2$; *b*)* $a_3=2,\ a_6=\dfrac{1}{4}$; *c)* $a_2=\dfrac{1}{a},\ a_6=a^3$;

d) $a_8=a^2,\ a_{10}=b^2$; *e)* $a_4=\dfrac{1}{a^2b^3},\ a_9=a^3b^7$; *f)* $a_k=2,\ a_{k+3}=\dfrac{1}{4}$;

g) $a_{2k+1}=\dfrac{1}{a^2},\ a_{2k+3}=1$; *h)* $a_2=a+1,\ a_4=a^3-a^2-a+1$.

253. 1 és 16 közé iktassunk hét számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy mértani sorozat szomszédos tagjai legyenek.

254. $\dfrac{1}{3}$ és 3^k közé iktassunk $3k+2$ darab számot úgy, hogy azok az adott két számmal együtt egy mértani sorozat szomszédos elemeit adják.

255. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja legyen.

a) $1,\ \sqrt{a+1},\ 2$; *b)* $a+1,\ 4,\ 1$; *c)* $4,\ 3,\ a^2$;

d) $a-1,\ 2,\ a+1$; *e)* $a,\ 2,\ \dfrac{1}{a^2}$; *f)* $a^2,\ 2a,\ \dfrac{4}{a}$;

g) $a,\ a+2,\ 2a+1$; *h)* $a-9,\ a,\ 4a$; *i)* $a+2,\ a-1,\ a+3$;

j) $1,\ a+1,\ a^2-9$.

256. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha tudjuk, hogy

a) $\begin{cases} a_1+a_2 = 6 \\ a_4+a_3 = 24 \end{cases}$; *e)* $\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 42 \\ a_1a_3=64 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 80 \\ a_1 + a_3 = 10 \end{cases}$; f) $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -9 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 9 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 2{,}25 \\ a_2 + a_3 = 2{,}25 \end{cases}$; g) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a_2 + a_4 = \dfrac{3}{2}; \\ a_1 a_3 = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{a_4 - a_1}{a_2 - a_3} = 1{,}5 \\ a_1 a_2 a_3 = -1 \end{cases}$.

IV

257. Bizonyítsuk be, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$; b) 1, $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$, $81+36\sqrt{5}$;

c) $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, $26+15\sqrt{3}$;

d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}-2\sqrt{6}+5}$.

***258.** Egy növekvő mértani sorozatnak eleme az a és b szám ($0<a<b$). Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{b^3}{a^2}$ is eleme a sorozatnak.

259. Egy növekvő mértani sorozat első három tagja négyzetszám. Igaz-e, hogy a sorozatban legalább négy négyzetszám van? Állításunkat indokoljuk.

***260.** Bizonyítsuk be, hogy ha két növekvő mértani sorozat tagjai között van két-két megegyező szám, akkor a sorozatoknak végtelen sok közös eleme van.

261. Határozzuk meg x értékét, ha tudjuk, hogy az $\{1+x^n\}$ sorozat mértani.

262. Adjunk meg olyan x értéket, amelyre az $\{(x+1)^n\}$ és a $\{(2x+3)^n\}$ mértani sorozatnak végtelen sok közös tagja van!

263. Hány pozitív osztója van a mértani sorozat k-adik tagjának, ha első tagja 2 és hányadosa 3?

264. Egy k-jegyű szám számjegyei sorrendjüknek megfelelően egy szigorúan növekvő mértani sorozat tagjai. Határozzuk meg k maximális értékét.

265. Egy kétjegyű szám számjegyei és a számjegyek szorzata az adott sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Határozzuk meg a kétjegyű szám lehetséges értékeit.

266. Igaz-e, hogy egy véges sok különböző tagot tartalmazó mértani sorozat konstans sorozat?

267. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a_n\}$ egy mértani sorozat, akkor $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{4k} \geqq 0$.

268. Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amelyben bármely elemének a reciproka is szerepel.

269. Van-e olyan szigorúan monoton növekvő mértani sorozat, amelynek bármely elemével együtt az elem reciproka is eleme a sorozatnak?

270. Adjunk meg olyan szigorúan monoton csökkenő mértani sorozatot, amely legalább 100 tagjának reciprokát tartalmazza.

271. Mondjunk példát olyan szigorúan monoton növekvő mértani sorozatra, amelyre teljesül, hogy mindegyik elemének négyzete is eleme a sorozatnak.

272. Lehet-e egy nem konstans mértani sorozat minden tagja négyzetszám?

273. Legfeljebb hány prímszám lehet eleme egy olyan mértani sorozatnak, amelynek első eleme 1?

274. Adjunk meg olyan növekvő mértani sorozatot, amelynek végtelen sok racionális és irracionális tagja is van.

275. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mértani sorozatnak van két racionális eleme, akkor végtelen sok is van.

276. Van-e olyan szigorúan monoton csökkenő mértani sorozat, amelynek véges sok (nem 0 számú) irracionális tagja van? Állításunkat indokoljuk!

277. Adjunk példát olyan mértani sorozatra, amelynek minden tagja irracionális szám, és a sorozat egyik tagja valamelyik elem k-szorosa, ahol k tetszőleges 1-nél nagyobb, adott pozitív egész szám.

278. Igaz-e, hogy ha egy mértani sorozat korlátos, akkor konvergens?

279. Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amelynek minden tagja egymástól különböző páratlan szám.

280. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan mértani sorozat, amelynek az összes pozitív egész szám az eleme.

281. Írjunk fel olyan mértani sorozatot, melynek az 1, a $\sqrt{2}$, és a $\sqrt[3]{2}$ számok a tagjai.

282. Lehet-e eleme egy mértani sorozatnak a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és a $\sqrt{6}$?

***283.** Legfeljebb hány szomszédos egész szám lehet egy mértani sorozat tagja?

284. Egy növekvő mértani sorozatnak tagja a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt[3]{4}$. Igazoljuk, hogy a sorozatnak végtelen sok 2-es alapú hatvány tagja van.

***285.** Bizonyítsuk be, hogy a $\{2^n\}$ mértani sorozatnak nincs három olyan tagja, amelyek egy számtani sorozat szomszédos tagjai lehetnének.

286. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\{a_n\}$ mértani sorozatra teljesül az $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2k} = (a_1 a_{2k})^k$ összefüggés.

287. Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amelynek a 0 nem eleme és bármely két szomszédos tagjának összege a tagokat követő elemmel egyenlő.

288. Határozzuk meg azokat a mértani sorozatokat, amelyek egyben számtani sorozatok is.

***289.** Bizonyítsuk be, hogy egy pozitív egészekből álló mértani sorozat egyetlen tagja sem állítható elő a sorozat más tagjainak összegeként.

290. Egy háromszög oldalhosszúságai egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Igazoljuk, hogy ha a háromszög egyik szöge 60 fokos, akkor a háromszög szabályos.

291. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy mértani sorozat három szomszédos tagja. Határozzuk meg a sorozat hányadosát!

292. Egy derékszögű háomszög három magassága egy növekvő mértani soroazt első három tagja. Igazoljuk, hogy az átfogó is eleme a sorozatnak.

***293.** Egy háromszög egyik szöge 120°, három oldalhossza pedig egy növekvő mértani sorozat három szomszédos tagja. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerülete is tagja a mértani sorozatnak!

294. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalai az adott sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor ugyanez igaz az oldalakkal szemközti szögek sinusára is.

295. Egy háromszög két oldala és az oldalak által bezárt szög szögfelező szakasza valamilyen sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a háromszög legnagyobb szögének cosinusa, ha a háromszög szögfelezőjét közrefogó oldalak aránya $1:2$?

***296.** Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara, köréírt körének sugara és kerülete egy mértani sorozat első három tagja. Mutassuk meg, hogy a hegyesszögek tangensének összege 4.

297. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalhosszai egy mértani sorozat szomszédos tagjai, akkor a sorozat hányadosa kisebb 2-nél.

298. Számítsuk ki a mértani sorozat első öt tagjának összegét, ha

a) $a_1=2,\ q=3$;

b) $a_1=\dfrac{1}{2},\ q=-1$;

c) $a_1=3,\ q=-2$;

d) $a_4=10,\ q=3$;

e) $a_2=1,\ a_4=2$;

f) $a_{10}=1,\ a_{20}=\dfrac{1}{32}$;

g) $a_2=a,\ a_4=\dfrac{1}{a}$;

h) $a_1=\dfrac{1}{1+a+a^2+a^3+a^4},\ q=\dfrac{1}{a}$.

299. Jelöljük a mértani sorozat első n elemének összegét S_n-nel. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját, ha

a) $q=2,\ S_5=31$;

b) $q=-2,\ S_5=66$;

c) $a_6=9a_2,\ S_5=49$;

d) $S_{10}=30,\ S_{20}=60$;

e) $S_3=1$, $S_4=3S_2$;

f) $S_5=-2$, $S_7-S_4=a_5$;

g) $S_4=60$, $S_6=63$;

h) $a_2=2$, $S_4=5$.

300. Egy mértani sorozat első tíz páratlan indexű elemének összege 1, az első tíz páros indexű elem összege $\sqrt{2}$. Mekkora a sorozat első eleme?

301. Bizonyítsuk be, hogy $k \geqq 2$ esetén az $\{a_n\}$ pozitív tagokból álló mértani sorozatra teljesül az $a_1+a_2+\ldots+a_{2k+1} \geqq (2k+1)a_{k+1}$ összefüggés!

302. Egy számtani sorozat három szomszédos tagjának összege 21. Ha a három taghoz rendre 3-at, 1-et és 3-at adunk, akkor egy mértani sorozat szomszédos elemeihez jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát!

303. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 52. Ha az első taghoz 2-t, a másodikhoz 10-et, a harmadikhoz pedig 2-t adunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait nyerjük. Adjuk meg a mértani sorozat első elemét és hányadosát!

304. Egy monoton növekvő számtani sorozat első, negyedik és tizedik tagja egy mértani sorozat első három tagja. A számtani sorozat nyolcadik tagja 10. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját!

305. Egy konstanstól különböző mértani sorozat első és második tagja, valamint az első és harmadik tagjának számtani közepe egy számtani sorozat három szomszédos tagja. Mi a mértani sorozat hányadosa?

306. Három, 0-tól különböző szám egy mértani sorozat első három tagja. Ha az első számhoz 2-t, a másikhoz 1-et, a harmadikhoz -1-et adunk, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Tudjuk, hogy az utóbbi három szám közül az egyik 3-mal egyenlő. Határozzuk meg az eredeti három szám összegének lehetséges értékeit.

307. A pozitív tagokból álló $\{a_n\}$ mértani sorozatból képzett sorozatok közül melyek számtani, illetve mértani sorozatok?

a) $\{2a_n\}$; *b)* $\{a_n+a_{n+1}\}$; *c)* $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$; *d)* $\{a_n^2\}$;

IV.

e) $\{\log_2 a_n\}$; *f)* $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$; *g)* $\left\{\frac{na_{n+2}}{a_n}\right\}$; *h)* $\left\{\frac{a_n}{a_1}\right\}$;

i) $\{\sqrt{a_n}\}$; *j)* $\left\{2n\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}\right\}$.

5. Sorok

308. Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első öt tagjának összegét, ha

a) $a_n=2$; *b)* $a_n=n$; *c)* $a_n=2n-5$;

d) $a_n=n^2$; *e)* $a_n=2^{n-1}$; *f)* $a_n=n^2-3n$;

g) $a_n=\frac{1}{n}$; *h)* $a_n=n^{n-1}$; *i)* $a_n=\frac{1}{n}\cdot(-1)^n$;

j) $a_n=(-2)^{1-n}$.

309. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=2$, $a_{n+1}=-a_n$. Határozzuk meg a sorozat első 100, illetve első 101 tagjának összegét.

310. Határozzuk meg a következő sorozat első 100 tagjának összegét.

a) $\{-2\}$; *b)* $\{n-1\}$; *c)* $\{2n-1\}$;

d) $\{2^n\}$; *e)* $\{2^{n-100}\}$; *f)* $\{2^{-n}\}$;

g) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$; *h)* $\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\}$; *i)* $\left\{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right\}$;

j) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$.