*354. Mutassuk meg, hogy az $\left\{\frac{n+k}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k\right\}$ sorozat tagjainak szorzata $\frac{1}{k!}$.

*355. Számítsuk ki az $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3\right\}$ sorozat tagjainak szorzatát.

6. Mértani sor

356. Írjuk fel a mértani sorozathoz tartozó sor k-adik részletösszegét.

a) $\{2^n\}$; *b)* $\{(-2)^n\}$; *c)* $\left\{\frac{1}{4^{n-1}}\right\}$; *d)* $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-n}\right\}$,

e) $\{(-1)^{n+1}\}$; *f)* $\{(\sqrt{2}+1)^{-n+1}\}$; *g)* $\left\{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n-2}\right\}$;

h) $\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^{-n}\right\}$; *i)* $\left\{\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^{2n+2}\right\}$; *j)* $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-5}}\right\}$.

357. Állapítsuk meg, hogy a következő mértani sorozatokból képzett sorok közül melyek konvergensek.

a) $\{3^n\}$; *b)* $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$; *c)* $\{(\sqrt{2}+1)^{-n}\}$;

d) $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-10}\right\}$; *e)* $\{(-2)^{5-n}\}$; *f)* $\{(2-\sqrt{7})^{2n-1}\}$;

g) $\{\sqrt[5]{1{,}1^n}\}$; *h)* $\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)^{3n}\right\}$.

358. Mely a érték esetén van az alábbi mértani sorozatnak megfelelő sornak összege?

a) $\{(a+1)^n\}$; *b)* $\{(1-a)^{n+1}\}$; *c)* $\{(a-1)^{n-1}\}$; *d)* $\{(3a+2)^{2n}\}$;

e) $\{(a^2-a)^n\}$; *f)* $\{(2a-a^2)^{n+1}\}$; *g)* $\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^{-n}\right\}$; *h)* $\{(a^3+1)^n\}$;

i) $\left\{\left(\frac{a-2}{a}\right)^{n+2}\right\}$; *j)* $\left\{\left(\frac{a-3}{1-a}\right)^{n-1}\right\}$.

IV.

359. Számítsuk ki a következő sor összegét.

a) $1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots;$

b) $9-3+1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot 3^{3-n}+\ldots;$

c) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^{n-1}}+\ldots;$

d) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}+\ldots;$

e) $\sin 60^\circ+\sin^2 60^\circ+\ldots+\sin^n 60^\circ+\ldots;$

f) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(x^2+1)^n}+\ldots;$

g) $1+\frac{x}{x^2+1}+\ldots+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{n-1}+\ldots;$

h) $1+\frac{a^2}{a^4+1}+\ldots+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^{1-n}+\ldots;$

i) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots;$

j) $4-3\sqrt{2}+4{,}5-\ldots.$

360. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját, ha a hányadosa $\frac{1}{2}$ és a sorozatból képzett sor összege 3.

361. Egy mértani sor összege 4, a sor első tagja 1. Mekkora a megfelelő mértani sorozat hányadosa?

362. Jelöljük S-sel a mértani sor összegét. Határozzuk meg a_1 és q értékét, ha

a) $a_2=1{,}5,\ S=6$; *b)* $a_1+a_2=10,\ S=\frac{32}{3}$;

c) $a_2-a_1=-30,\ S=\frac{125}{6}$; *d)* $S=2a_1,\ a_5=1$;

e) $S=(1-q)^2,\ a_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^6$; *f)* $S=4,\ a_3-a_4=1$.

363. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvergens mértani sor esetén $a_1S \geqq 0$.

364. Igazoljuk, hogy $a_1 \neq 0$ esetén bármely konvergens mértani sor összege $\frac{a_1+a_2+a_3}{1-q^3}$.

365. Bizonyítsuk be, hogy egy 0 tagot nem tartalmazó mértani sor összege nem lehet $\frac{ka_1}{(1-q)^2}$, ahol k tetszőleges egész szám, a_1 a sor első tagja, q pedig a sor hányadosa.

366. Alakítsuk törtekké a következő szakaszos tizedestörteket.

a) $0{,}\dot{3}$; *b)* $0{,}\dot{1}$; *c)* $0{,}\dot{5}$; *d)* $0{,}\dot{9}$;

e) $0{,}\dot{1}\dot{2}$; *f)* $0{,}\dot{2}\dot{1}$; *g)* $2{,}3\dot{4}\dot{5}$; *h)* $0{,}0\dot{3}\dot{9}$;

i) $0{,}\dot{1}0\dot{8}$; *j)* $0{,}61\dot{6}0\dot{3}$; *k)* $1{,}2\dot{3}4\dot{5}$.

367. Adjuk meg a műveletek eredményét tört alakban.

a) $0{,}\dot{8}+0{,}\dot{7}$; *b)* $0{,}\dot{6}^2-0{,}\dot{5}^2$; *c)* $1{,}\dot{2}\cdot 2{,}\dot{8}$;

d) $2{,}\dot{7}^3$; *e)* $\frac{1}{0{,}\dot{2}\dot{5}}$; *f)* $\left(0{,}\dot{8}0\dot{1}+\frac{1}{0{,}\dot{8}0\dot{1}}\right)^2$;

g) $\dfrac{0{,}\dot{4}\cdot 0{,}\dot{7}}{0{,}\dot{4}\dot{7}}$; *h)* $(2-0{,}\dot{2}0\dot{7})^2$; *i)* $(1{,}\dot{7}00\dot{2})^3-(0{,}\dot{8}00\dot{1})^3$;

j) $1+\dfrac{1}{0{,}\dot{4}\dot{5}}+\dfrac{1}{0{,}\dot{4}\dot{5}^2}+\dfrac{1}{0{,}\dot{4}\dot{5}^3}+\dfrac{1}{0{,}\dot{4}\dot{5}^4}$.

368. Határozzuk meg az x számjegy értékét, ha tudjuk, hogy a $0{,}\dot{4}\dot{x}$ szám egy racionális szám négyzete.

369. Oldjuk meg az x számjegyre az $1{,}\dot{x}\cdot 3{,}\dot{x}=\dfrac{9x-1}{10}$ egyenletet!

370. Tudjuk, hogy a $\dfrac{0{,}\dot{x}\dot{2}}{0{,}\dot{1}\dot{x}}$ hányados egész szám. Határozzuk meg az x számjegy értékét.

371. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszögnek rajzoljuk meg a középvonalait. A kapott háromszögnek újra rajzoljuk meg a középvonalait, ezután pedig hasonlóan haladjunk tovább. Az eljárást gondolatban végtelen sokszor elvégezzük. Határozzuk meg a keletkezett háromszögek kerületeinek, illetve területeinek az összegét.

372. Rajzoljunk egy a oldalú négyzet oldalfelező pontjai által meghatározott négyzetet. E négyzet oldalfelező pontjait összekötve egy újabb négyzetet nyerünk. Ismételjük meg az eljárást – gondolatban – a kapott négyzetek mindegyikével. Mekkora lesz a keletkezett négyzetek kerületeinek, illetve területeinek az összege?

373. Egy a oldalú négyzet oldalait osszuk fel $2:3$ arányban, a kerületen rendre ugyanolyan irányban haladva. Az osztópontok által meghatározott négyszög oldalait – az adott körüljárásnak megfelelően – szintén osszuk fel $2:3$ arányban, majd az így kapott négyszögre alkalmazzuk tovább a leírt eljárást! Határozzuk meg a keletkezett négyszögek kerületeinek, illetve területeinek az összegét.

374. Az előző feladatban leírt eljárást alkalmazva, egy a oldalú négyzetre $p:q$ arány esetén, mi lesz a keletkezett négyszögek kerületeinek, illetve területeinek az összege?

375. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszög beírt körébe szabályos háromszöget írunk. E háromszög beírt körébe szintén szabályos háromszöget írunk. Határozzuk meg az összes háromszög kerületének, illetve az összes kör területének összegét, ha az eljárást végtelen sokszor megismételjük.

376. Írjunk egy r sugarú körbe szabályos hatszöget. A kapott hatszög beírt körébe írjunk újra szabályos hatszöget, és így tovább. Mekkora lesz a beírt hatszögek kerületeinek, illetve területeinek az összege?

377. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°, a szemközti oldal pedig a hosszúságú. Állítsunk merőlegest az átfogóra a derékszög csúcsából, a kapott talppontból pedig a hosszabbik befogóra. A kapott talppontból újra állítsunk merőlegest az átfogóra és a kapott pontból pedig a hosszabbik befogóra. Gondolatban ismételjük meg az eljárást végtelen sokszor. Mekkora lesz az így kapott szakaszok összhosszúsága?

378. Egy α hegyesszög egyik szárán, a csúcstól c távolságra jelöljünk ki egy pontot. Vetítsük ezt merőlegesen a másik szárra. A most kapott pontot vetítsük vissza merőlegesen az első szárra, és így tovább. Mekkora a keletkezett töröttvonal hossza?

379. Egy derékszögű háromszög befogói 6 és 4 egység hosszúak. Rajzoljuk meg a legrövidebb oldalhoz tartozó súlyvonalat. E súlyvonal két háromszögre osztja az eredeti háromszöget. Az így kapott derékszögű részháromszögnek rajzoljuk meg a hosszabbik befogóhoz tartozó súlyvonalát. A keletkezett két új részháromszög közül a derékszögűre alkalmazzuk az előbb leírt eljárást, és így tovább. Határozzuk meg a kapott súlyvonalszakaszok összhosszúságát.

***380.** Egy végtelen sok szakaszból álló töröttvonal egymáshoz csatlakozó szakaszai merőlegesek egymásra. A szakaszok hossza rendre $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy a töröttvonal nem metszi önmagát!

381. Rendre kelet, észak, nyugat és dél irányba haladva mindig az előző útszakasz felét tesszük meg. A kapott pontból kiindulva megismételjük az eljárást úgy, hogy állandóan az előző útszakasz felét tesszük meg az adott irányban. Gondolatban ismételjük meg eljárásunkat végtelen sokszor. Milyen messze leszünk a kiindulási ponttól, ha utunk első szakasza 200 méter hosszú?

382. Egy r sugarú gömbbe kockát írunk, a kapott kockába pedig gömböt. E gömbbe újra kockát írunk, és így tovább. Határozzuk meg a kockák térfogatának összegét. Hányszorosa az eredeti gömb felszínének a kapott kockák felszínének összege?

383. Egy 60°-os nyílásszögű, m magasságú egyenes körkúpba gömböt írunk. A kapott gömbbe az eredetihez hasonló kúpot írunk, majd az eljárást megismételjük a kapott kúppal, és így tovább. Határozzuk meg az így keletkezett kúpok térfogatösszegét.

IV.

***384.** Egy m magasságú szabályos háromszögbe kört írunk. A körnek megrajzoljuk az egyik oldallal párhuzamos érintőjét. A keletkezett újabb szabályos háromszögbe megint kört írunk és meghúzzuk a korábban rajzolt érintővel párhuzamos érintőjét, és így tovább.

a) Mekkora a körökhöz húzott érintők háromszögbe eső darabjainak az összege?

b) Határozzuk meg a keletkezett körök kerületének összegét!

c) Hányadrésze a körök területének összege az eredeti szabályos háromszög területének?

d) Mekkora a körökbe írható négyzetek területének az összege?

e) Határozzuk meg, hogy hol lesz a keletkezett körlapokból álló rendszer súlypontja.

f) Forgassuk meg az eredeti háromszöget (és a kapott köröket is) az érintőkre merőleges magasságvonala körül. Mekkora lesz a keletkező gömbök térfogatainak az összege? Hányadrésze ez az összeg az eredeti háromszög forgatásával keletkezett kúp térfogatának?

***385.** Helyezzünk egymásra $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ egységélű kockákat úgy, hogy egy-egy lapjuk középpontja egybeessék. Határozzuk meg az ily módon keletkező „torony” magasságát, térfogatát és súlypontjának az alaplaptól mért távolságát.