254. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{x-1}$, $\quad x\mapsto 2^{1-x}$;

b) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{-x}$, $\quad x\mapsto 2^{1-x}$;

c) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{x-1}$, $\quad x\mapsto 2^{|x-1|}$;

d) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{|x|}$, $\quad x\mapsto 2^{|x-1|}$.

255. Ábrázoljuk milliméterpapíron a $\log_2$ és a $\log_{\frac{1}{2}}$ függvényt.

256. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $\exp_2$ és $\log_2$; $\qquad$ *c)* $\exp_{\frac{1}{2}}$ és $\log_{\frac{1}{2}}$;

b) $\exp_3$ és $\log_3$; $\qquad$ *d)* $\exp_{\frac{1}{2}}$ és $-\log_2$.

257. Tükrözzük a 3 alapú logaritmusfüggvény grafikonját az abszcisszatengelyre, az ordinátatengelyre, és írjuk le a kapott függvény menetét.

258. Tükrözzük a 3 alapú logaritmusfüggvény grafikonját a koordinátatengelyek szögfelezőire. Mi a kapott görbék egyenlete? Diszkutáljuk az e görbékkel megadott függvényeket.

259. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket.

a) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$\quad x\mapsto\log_{\frac{1}{2}} x$,
$\quad x\mapsto -\log_2 x$,
$\quad x\mapsto\log_2\dfrac{1}{x}$;

b) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$\quad x\mapsto\log_2 3$,
$\quad x\mapsto\log_2 (3x)$,
$\quad x\mapsto\log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$;

c) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$]-3;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 (x+3)$,
$]1;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 (x-1)$,
$]-\infty;1[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 (1-x)$;

d) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$ $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$\quad x\mapsto\log_2 x^3$,
$\quad x\mapsto 3\log_2 x$,
$\quad x\mapsto\log_2\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

260. Ábrázoljuk a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán megadott,

$$x\mapsto\log_3 x^4;\quad\text{illetve}\quad x\mapsto 4\log_3 x$$

hozzárendelésű függvényeket.

261. Legyen f értelmezési tartománya a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza és

$$f(x)=\log_2(8x^4)-4\log_2 x.$$

Ábrázoljuk és diszkutáljuk az f függvényt.

262. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a következő függvényt. (Az f értelmezési tartománya legyen az $\mathbf{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

a) $f(x)=\log_3|x|$; $\qquad$ *e)* $f(x)=|\log_3 x|$;

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}|x|$; $\qquad$ *f)* $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}} x|$;

c) $f(x)=\log_3|x-2|$; $\qquad$ *g)* $f(x)=|\log_3(x-2)|$;

d) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}|x-2|$; $\qquad$ *h)* $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}}(x-2)|$.

263. Vizsgáljuk az $f+g$, az $f-g$ és az fg függvény növekedési viszonyait.

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x$,

$\quad g\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto -x$,

$g\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \log_2 x$;

c) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x$,

$g\colon \mathbf{R}^-\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \log_2(-x)$;

d) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto -x$,

$g\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$.

264. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendelési szabállyal, az **R** lehető legbővebb részhalmazán megadott függvényeket, és hasonlítsuk össze a grafikonjukat.

$$x\mapsto \log_{\sqrt{2}} x;\quad x\mapsto \log_{\sqrt{2}}(-x),\quad x\mapsto \log_{\sqrt{2}}|x|.$$

Az adott függvények közül melyik leszűkítése valamelyik másiknak?

265. Mi a $h=f\circ g$, a $k=g\circ f$, az $\frac{1}{h}$ és az $\frac{1}{k}$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete, ha $f=\log_2$ és

a) $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto |x|$;

b) $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^2$;

c) $g\colon (\mathbf{R}\setminus\{0\})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \frac{1}{x}$;

d) $g\colon [0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sqrt{x}$?

22. Trigonometrikus függvények

266. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sin x$,
$x\mapsto \sin x-3$,

$x\mapsto \sin(x-3)$,
$x\mapsto 2\sin(x-3)$;

b) $[-\pi;\pi]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sin x$,
$x\mapsto \sin x+\frac{\pi}{2}$,
$x\mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,
$x\mapsto 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sin x$,
$x\mapsto 2\sin x$,
$x\mapsto \sin(2x)$,
$x\mapsto 2\sin(2x)$;

d) $[-\pi;\pi]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sin x$,
$x\mapsto \sin 2x$,
$x\mapsto \sin[2(x+1)]$,
$x\mapsto \sin(2x+1)$.

267. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a $\sin\circ f$ és az $f\circ\sin$ függvényt, ha

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \frac{1}{2}x$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x+\frac{\pi}{4}$.

268. Toljuk el a sinusfüggvény grafikonját

a) az abszcisszatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;

b) az abszcisszatengely mentén $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$ egységgel;

c) az ordinátatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;

d) az (1; 1) vektorral, a (3; 1) vektorral, a $(-2; 3)$ vektorral.

Írjuk fel a grafikonokhoz tartozó függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, hozzárendelési szabályát.

269. Toljuk el a cosinusfüggvény grafikonját
a) az abszcisszatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;
b) az abszcisszatengely mentén $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$ egységgel;
c) az ordinátatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;
d) az (1; 1) vektorral, a (3; 1) vektorral, a $(-2; 3)$ vektorral.
Írjuk fel a grafikonokhoz tartozó függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, hozzárendelési szabályát.

270. Tükrözzük a sinus- és a cosinusgörbét a koordinátatengelyekre! Mely függvények grafikonját kaptuk meg?

271. Szűkítsük le a sinusfüggvényt egy olyan, π hosszúságú intervallumra, hogy a leszűkítésnek létezzék inverze. Ábrázoljuk ezt az inverz függvényt.

272. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket!

a) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$
$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos x - 3$,
$x \mapsto \cos (x-3)$,
$x \mapsto 2\cos (x-3)$;

b) $[-\pi; \pi]\to\mathbf{R}$,
$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos x + \frac{\pi}{2}$,
$x \mapsto \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,
$x \mapsto 2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$,
$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto 2\cos x$,
$x \mapsto \cos (2x)$,
$x \mapsto 2\cos (2x)$;

d) $[-\pi; \pi]\to\mathbf{R}$,
$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos 2x$,
$x \mapsto \cos 2(x+1)$,
$x \mapsto \cos (2x+1)$.

273. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a $\cos\circ f$ és az $f\circ\cos$ függvényt, ha
a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 3x$;
b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 3x+6$.

274. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $\mathrm{tg}\circ f$ és az $f\circ\mathrm{tg}$ függvényt, ha
a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x+2$;
b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 3x$.

275. Ábrázoljuk az **R** lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendelési szabályokkal megadott függvényeket.
a) $x\mapsto \mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{tg}\, x+2$, $x\mapsto \mathrm{tg}\,(x+2)$;
b) $x\mapsto \mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{tg}\, x-\frac{\pi}{4}$, $x\mapsto \mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;
c) $x\mapsto \mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto 2\,\mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{tg}\,(2x)$;
d) $x\mapsto \mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto \frac{1}{3}\mathrm{tg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

276. Ábrázoljuk az **R** lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendelési szabályokkal megadott függvényeket.
a) $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x+2$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\,(x+2)$;
b) $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x-\frac{\pi}{4}$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;
c) $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto 2\,\mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\,(2x)$;
d) $x\mapsto \mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto \frac{1}{3}\mathrm{ctg}\, x$, $x\mapsto \mathrm{ctg}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

277. Tükrözzük a tangensgörbét a koordinátatengelyekre. Mely függvények grafikonját kaptuk?

278. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a

$$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R};\quad x\mapsto \operatorname{tg} x$$

függvény inverzét.

279. Adjunk meg olyan – minél hosszabb – intervallumot, amelyre leszűkítve a cotangensfüggvényt, a leszűkítésnek van inverze. Ábrázoljuk ezt az inverz függvényt.

280. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $\operatorname{ctg}\circ f$ és az $f\circ\operatorname{ctg}$ függvényt, ha

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto 2x;$

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto 2x-8.$

281. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto \sin x,\quad x\mapsto \cos x,\quad x\mapsto \sin x+\cos x;$

b) $x\mapsto \sin x,\quad x\mapsto \cos x,\quad x\mapsto \sin x-\cos x;$

c) $x\mapsto \sin x,\quad x\mapsto \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\quad x\mapsto \sin x+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$

d) $x\mapsto \cos x,\quad x\mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad x\mapsto \cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$

282. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto \sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x;$

b) $x\mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x;$

c) $x\mapsto \sqrt{3}\cos x-\sin x;$

d) $x\mapsto \sin x+\sqrt{3}\cos x.$

283. Az f és a g, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény grafikonja segítségével vázoljuk fel az $f+g$ grafikonját. Mi az $f+g$ értékkészlete?

a) $f(x)=x,\quad g(x)=\sin x;$

b) $f(x)=3\sin x,\quad g(x)=\sin 3x;$

c) $f(x)=\cos x,\quad g(x)=\frac{1}{2}\cos 2x;$

d) $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x.$

284. Ábrázoljuk az $(\mathbf{R}\setminus\{0\})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto\frac{\sin x}{x}$ függvényt.

285. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt.

a) $x\mapsto \sin|2x|;$

b) $x\mapsto \cos|2x|;$

c) $x\mapsto |\sin 2x|;$

d) $x\mapsto |\cos 2x|;$

e) $x\mapsto \sin\left|\frac{\pi}{2}-x\right|;$

f) $x\mapsto \cos\left|\frac{\pi}{4}-x\right|;$

g) $x\mapsto \sin\left|x+\frac{\pi}{2}\right|;$

h) $x\mapsto \left|\cos\left|x-\frac{5\pi}{2}\right|\right|.$

286. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right);$

b) $x\mapsto \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right);$

c) $x\mapsto \sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}-2x\right);$

d) $x \mapsto |\cos x| + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

287. Van-e páros vagy páratlan az alábbi függvények között? $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2};\, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

a) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$; *c)* $f(x) = \operatorname{tg} x\,(1 + \sin^2 x)$;

b) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$; *d)* $f(x) = \sin x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

288. Melyik a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmaza, amelyen az alábbi hozzárendelési szabállyal függvény adható meg?

a) $x \mapsto \dfrac{\sin |x|}{\cos |x|}$; *e)* $x \mapsto \dfrac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \sin x}$;

b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{4}$; *f)* $x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{2 \cos x\,(1 - \operatorname{tg} x)}$;

c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{4}$; *g)* $x \mapsto \sqrt{\lg(1 - \cos^2 x)}$;

d) $x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$; *h)* $x \mapsto \sqrt{\log_2 \sin x}$.

289. Mely pontokban metszi egymást az f és a g függvény grafikonja?

a) $D_f = D_g = [0; 2\pi]$, $f(x) = 3 \sin x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$;

c) $D_f = D_g = [-\pi; \pi]$, $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

23. Függvénytranszformációk

290. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 3x$, $x \mapsto 3x - 2$, $x \mapsto 3x + 1$, $x \mapsto 3x + 5$;

b) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 2$, $x \mapsto x^2 + 1$, $x \mapsto x^2 + 5$;

c) $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin x - 2$, $x \mapsto \sin x + 1$, $x \mapsto \sin x + 5$;

d) $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto 3^x - 2$, $x \mapsto 3^x + 1$, $x \mapsto 3^x + 5$.

291. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 3x$, $x \mapsto 3(x - 2)$, $x \mapsto 3(x + 1)$, $x \mapsto 3(x + 5)$;

b) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto (x - 2)^2$, $x \mapsto (x + 1)^2$, $x \mapsto (x + 5)^2$;

c) $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, $x \mapsto \sin(\pi - x)$;

d) $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto 3^{x-2}$, $x \mapsto 3^{x+1}$, $x \mapsto 3^{x+5}$.

292. Toljuk el az

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ és a $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -x^2$

függvény grafikonját az $\mathbf{a}(3; 0)$; a $\mathbf{b}(0; -2)$; a $\mathbf{c}(4; 4)$; a $\mathbf{d}(3; -2)$ vektorral. Melyik függvények grafikonját rajzoltuk meg?

293. Melyik vektorral toltuk el az

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

függvény grafikonját, ha eredményül az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonját kaptuk?

a) $f(x) = x^2 - 5$; *e)* $f(x) = (x + 2)^2 - 4$;

b) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$; *f)* $f(x) = x^2 + 4x$;

c) $f(x) = (x + 2)^2$; *g)* $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$; *h)* $f(x) = x^2 + 12x$.

294. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x \mapsto x$, $\quad x \mapsto 2x$, $\quad x \mapsto 3x$, $\quad x \mapsto 4x$;

b) $x \mapsto -x$, $\quad x \mapsto -2x$, $\quad x \mapsto -3x$, $\quad x \mapsto -4x$;

c) $x \mapsto x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{4}x$;

d) $x \mapsto -x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{2}x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{4}x$.

295. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x \mapsto x^2$, $\quad x \mapsto 5x^2$,

$x \mapsto 5(x+2)^2$, $\quad x \mapsto 5(x+2)^2-1$;

b) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\quad x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

$x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, $\quad x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1$;

c) $x \mapsto [x]$, $\quad x \mapsto 5[x]$,

$x \mapsto 5[x+2]$, $\quad x \mapsto 5[x+2]-1$;

d) $x \mapsto \cos x$, $\quad x \mapsto 5\cos x$,

$x \mapsto 5\cos(x+2)$, $\quad x \mapsto 5\cos(x+2)-1$.

296. Ábrázoljuk a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendeléssel jellemzett függvényeket:

a) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x+2$,

$x \mapsto \operatorname{tg} x+1$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x-3$;

b) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg}(x+2)$,

$x \mapsto \operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg}(x-3)$;

c) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$,

$x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)-3$;

d) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$,

$x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)-3$.

297. Ábrázoljuk az $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ értelmezési tartományon az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket a

$$g\colon (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

függvény transzformálásával:

a) $x \mapsto \frac{1}{x+3} - 4$; $\qquad$ *e)* $x \mapsto \frac{4}{x-3} - 3$;

b) $x \mapsto \frac{2}{x-5} + 1$; $\qquad$ *f)* $x \mapsto \frac{x+5}{x+4}$;

c) $x \mapsto \frac{12}{3x-6}$; $\qquad$ *g)* $x \mapsto \frac{4x+1}{x-3}$;

d) $x \mapsto \frac{x^2-5x}{x^3-5x^2} + 2$; $\qquad$ *h)* $x \mapsto \frac{2x+1}{6-3x}$.

298. Ábrázoljuk az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt a g, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény transzformálásával. Írjuk fel az f értékkészletét.

a) $f(x) = 3-2|x+4|$, $\qquad g(x) = |x|$;

b) $f(x) = \frac{2}{3}|3x+1|-4$, $\qquad g(x) = |x|$;

c) $f(x) = -3(x-5)^2+1$, $\qquad g(x) = x^2$;

d) $f(x)=\frac{5}{2}(3-4x)^2-7$, $g(x)=x^2$;

e) $f(x)=[3+x]+2$, $g(x)=[x]$;

f) $f(x)=12-3[2x+4]$, $g(x)=[x]$;

g) $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$, $g(x)=\cos x$;

h) $f(x)=1-3\cos(2x-\pi)$, $g(x)=\cos x$.

***299.** Ábrázoljuk függvénytranszformáció felhasználásával az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x\mapsto 2\sin\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)+1$;

b) $x\mapsto \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)-3$;

c) $x\mapsto \frac{1}{4}\sin\left(-\frac{3}{5}x-\frac{\pi}{2}\right)+2$;

d) $x\mapsto \frac{5}{7}\left[\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{2\pi}{3}\right)-1\right]$.

***300.** Ábrázoljuk a tangensfüggvény transzformálásával az $\mathbf{R}$ lehető legtágabb részhalmazán az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket.

a) $x\mapsto \operatorname{tg}(2x)$, $x\mapsto \operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, $x\mapsto \operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+3$;

b) $x\mapsto -\operatorname{tg}x$, $x\mapsto -\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\mapsto 1-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

c) $x\mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)+1$;

d) $x\mapsto -\frac{3}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+4x\right)-4$.

24. Periodikus függvények

301. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények periodikusak, és határozzuk meg a periódusukat.

a) $x\mapsto\sin(2x)$;

b) $x\mapsto\sin(3x)$;

c) $x\mapsto\sin(4x)$;

d) $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{5}\right)$;

e) $x\mapsto\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

f) $x\mapsto\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

g) $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

h) $x\mapsto\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$.

302. A következő függvények közül melyik periodikus és melyik nem?

a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto|x|$;

b) $(\mathbf{R}\setminus\{0\})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{|x|}{x}$;

c) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{|x|}{x}$;

d) $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto[x]-x$;

e) $[-5;+\infty[\to\mathbf{R}$, $x\mapsto-10$;

f) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\,k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}$;

g) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\,k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{\sin x}{|\operatorname{tg}x|}$;

h) $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{\operatorname{tg}x}{|\operatorname{tg}x|}$.

303. Állapítsuk meg, hogy a **302.** feladatban megadott periodikus függvények közül melyiknek van periódusa. Adjuk meg e függvények periódusát is.

304. Igazak-e a következő állítások:

a) Az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \cos x-2\sin 3x$ függvény periodikus, a periódusa 2π;

b) az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto (x+3)^2-1$ függvény periodikus, a periódusa 3;

c) az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2(x-[x])$ függvény periodikus, a periódusa 1;

d) az $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$ függvény periodikus, a periódusa $\frac{\pi}{2}$.

***305.** Adjunk meg az alábbi hozzárendelési szabállyal két alkalmasan megválasztott értelmezési tartományon periodikus függvényt és állapítsuk meg a periódusát.

a) $x\mapsto 5\sin 3x$;

b) $x\mapsto \sin^2 x$;

c) $x\mapsto \sin\sqrt{x}$;

d) $x\mapsto \sqrt{\sin x}$;

e) $x\mapsto 3\sin x-2\cos x$;

f) $x\mapsto \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin 3x}$;

g) $x\mapsto \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{5}\right)$;

h) $x\mapsto \operatorname{ctg}(3x-4)$.

306. Válasszuk ki az alábbi függvények közül a periodikusokat, és határozzuk meg ezek periódusát.

a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \sin x-3$,
$x\mapsto \sin(x-3)$,
$x\mapsto 3\sin x$,
$x\mapsto \sin(3x)$;

b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x+\sin x$,
$x\mapsto x\sin x$,
$x\mapsto \sin x^2$,
$x\mapsto \sin^2 x$;

c) $(\mathbf{R}\setminus\{\pi+2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

d) $(\mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;

e) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \cos\left(\dfrac{2}{5}x\right)$,
$x\mapsto \cos\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,
$x\mapsto 5\cos\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,
$x\mapsto 5\cos\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2$;

f) $(\mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \lg x^2$,
$x\mapsto \lg\sin^2 x$,
$x\mapsto 5\lg\sin^2 x$,
$x\mapsto 5\lg\sin^2(x-\pi)$.

25. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

307. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket.

a) $2x+5=x-1$;

b) $(x+4)\cdot 2=3-x$;

c) $5x-1=x+1$;

d) $\dfrac{3x-2}{4}=2x+3$;

e) $\dfrac{2}{3}x+1=4-\dfrac{1}{2}x$;

f) $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{x+2}{5}$;

g) $\dfrac{2x}{4}=\dfrac{5-x}{3}$;

h) $\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{x+4}{5}$.

308. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $2x+5 > x-1$;

b) $(x+4)\cdot 2 \leqq 3-x$;

c) $5x-1 < x+1$;

d) $\frac{3x-2}{4} \geqq 2x+3$;

e) $\frac{2}{3}x+1 \leqq 4-\frac{1}{2}x$;

f) $\frac{x+4}{3} > \frac{x+2}{5}$;

g) $\frac{2x}{4} < \frac{5-x}{3}$;

h) $\frac{3-x}{2} \geqq \frac{x+4}{5}$.

309. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

a) $|x|+x = 1+2x$;

b) $|x|+x = x+2$;

c) $|x|+x = x-2$;

d) $|x|+x = 3x+1$;

e) $|x|-x = 2x-\frac{1}{4}$;

f) $|x|-x = 8$;

g) $|x|-x = -\frac{x+1}{2}$;

h) $|x|-x = 5-2x$.

310. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $|x|+x \geqq 1+2x$, $\quad |x|+x < 1+2x$;

b) $|x|+x > x+2$, $\quad |x|+x \leqq x+2$;

c) $|x|+x > x-2$, $\quad |x|+x < x-2$;

d) $|x|+x \geqq 3x+1$, $\quad |x|+x \leqq 3x+1$;

e) $|x|-x > 2x-\frac{1}{4}$, $\quad |x|-x < 2x-\frac{1}{4}$;

f) $|x|-x \geqq 8$, $\quad |x|-x \leqq 8$;

g) $|x|-x > -\frac{x+1}{2}$, $\quad |x|-x < -\frac{x+1}{2}$;

h) $|x|-x \geqq 5-2x$, $\quad |x|-x < 5-2x$.

311. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x-1|-3 = \frac{2-x}{6}$, $\quad |x-1|-3 < \frac{2-x}{6}$;

b) $|x-1|-3 = 2-|x|$, $\quad |x-1|-3 > 2-|x|$;

c) $|x-1|-3 = 1-|4x|$, $\quad |x-1|-3 \leqq 1-|4x|$;

d) $|x-1|-3 = 3-|x-1|$, $\quad |x-1|-3 \geqq 3-|x-1|$.

312. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x| = |x-3|$, $\quad |x| < |x-3|$;

b) $\left|\frac{2}{3}x\right| = |x-3|$, $\quad \left|\frac{2}{3}x\right| < |x-3|$;

c) $3-|x| = |x-3|$, $\quad 3-|x| \leqq |x-3|$;

d) $4-|x| = |x-3|$, $\quad 4-|x| \leqq |x-3|$.

313. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x+4| = 5-|x-1|$, $\quad |x+4| < 5-|x-1|$;

b) $|x-2| = 3-|x+1|$, $\quad |x-2| > 3-|x+1|$;

c) $|x+3| = 4+|x+2|$, $\quad |x+3| \leqq 4+|x+2|$;

d) $|x-1| = 2+|x+2|$, $\quad |x-1| \geqq 2+|x+2|$.

314. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket.

a) $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{3}$ $\quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\})$;

b) $\dfrac{2}{x+3} < 4 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\});$

c) $\dfrac{4}{x-1} > 3x+1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\});$

d) $\dfrac{6}{x+1} < 2-x \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\});$

e) $\dfrac{x-1}{x-2} < 1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\});$

f) $\dfrac{x+3}{x+1} \geqq x \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\});$

g) $\dfrac{x}{2-x} < x+1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\});$

h) $\dfrac{1-2x}{3x+4} > \dfrac{1}{2}x-1 \qquad \left(x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\right).$

315. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 = x+6, \qquad x^2 \leqq x+6;$

b) $3x^2 - x + 3 = 0, \qquad 3x^2 - x + 3 > 0;$

c) $x^2 + |x| - 2 = 0, \qquad x^2 + |x| - 2 \leqq 0;$

d) $x^2 = |x|, \qquad x^2 < |x|;$

e) $x^2 = x^3, \qquad x^2 > x^3;$

f) $x^4 = x^2, \qquad x^4 \geqq x^2;$

g) $x^3 = 1-x, \qquad x^3 < 1-x;$

h) $x^4 + x^2 = 2x-1, \qquad x^4 + x^2 < 2x-1.$

316. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $\sin x = x, \qquad \sin x > x;$

b) $\cos x = x, \qquad \cos x > x;$

c) $\sin x = \cos x, \qquad \sin x > \cos x;$

d) $\sin x + \cos x = 1, \qquad \sin x + \cos x > 1;$

e) $\sin x - \cos x = 1, \qquad \sin x - \cos x > 1;$

f) $2\cos x = \sin x, \qquad 2\cos x > \sin x;$

g) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) > \cos x;$

h) $1 + \sin x = \cos x, \qquad 1 + \sin x > \cos x.$

317. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $2^x \leqq 1, \qquad 2^x \leqq x+1, \qquad 2^x \leqq x-1;$

b) $2^x > x^2, \qquad 2^x > -x^2, \qquad 2^x > 1-x^2;$

c) $\log_2 x > 1, \quad \log_2 x > 1-x, \quad \log_2 x > 2-x \quad (x \in \mathbf{R}^+);$

d) $\log_{0,5} x > 1, \quad \log_{0,5} x > 1-x, \quad \log_{0,5} x > 2-x \quad (x \in \mathbf{R}^+).$

318. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} x+y &> 10 \\ y &< 15 \end{aligned}\right\};$ *e)* $\left.\begin{aligned} x+y &< 7 \\ xy &> 10 \end{aligned}\right\};$

b) $\left.\begin{aligned} 0 < x+y &< 10 \\ 0 < y &< 15 \end{aligned}\right\};$ *f)* $\left.\begin{aligned} x+y^2 &< 6 \\ x^2+y &< 10 \end{aligned}\right\};$

c) $\left.\begin{aligned} y &< x+3 \\ x+y &> 0 \end{aligned}\right\};$ *g)* $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &\leqq 13 \\ xy &> -6 \end{aligned}\right\};$

d) $\left.\begin{aligned} x-3 < y &< x+3 \\ -x < y &< 5-x \end{aligned}\right\};$ *h)* $\left.\begin{aligned} x^2-x+y &< 4 \\ 2x-y^2 &> 0 \end{aligned}\right\}.$

26. Szélsőérték-feladatok

319. Van-e legkisebb vagy legnagyobb területű a 2 m kerületű téglalapok között?

320. Van-e legkisebb vagy legnagyobb kerületű a 12 dm^2 területű téglalapok között?

321. Vizsgáljuk a 10 cm sugarú körbe írt téglalapokat. Közülük melyiknek

a) legnagyobb a területe;
b) legnagyobb a kerülete;
c) legkisebb a területe;
d) legkisebb a kerülete?

322. Vizsgáljuk a 10 cm sugarú kör köré írt rombuszokat. Közülük melyiknek

a) legnagyobb a területe;
b) legnagyobb a kerülete;
c) legkisebb a területe;
d) legkisebb a kerülete?

323. Bontsunk fel egy 12 cm hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy maximális, illetve minimális legyen:

a) a részek hosszúságának a szorzata;
b) a részek fölé rajzolt négyzetek területének az összege;
c) a részek fölé rajzolt négyzetek területének a különbsége;
d) a részek fölé rajzolt négyzetek kerületének az összege;
e) a részek fölé rajzolt félkörök területének az összege;
f) a részek fölé rajzolt félkörök kerületének az összege;
g) a részek fölé rajzolt szabályos háromszögek területének az összege;
h) a részek fölé rajzolt szabályos háromszögek kerületének az összege.

324. Bontsuk fel a k számot két összeadandóra úgy, hogy a tagok négyzetének az összege maximális, illetve minimális legyen.

a) $k=10$; *c)* $k=0$;
b) $k=24$; *d)* $k=-25$.

325. Hogyan válasszuk meg valamely 1 ha területű, téglalap alakú

ültetvény méreteit, ha azt kívánjuk, hogy a bekerítéshez a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség és

a) a területnek nincs természetes határa;
b) a területnek egy természetes határa van;
c) a területnek két természetes határa van?

(A természetes határ helyettesíti a kerítést.)

326. 3 m hosszúságú, 60 cm szélességű bádoglapból vályút készítünk úgy, hogy a két szélét felhajtjuk. Milyen szélesre válasszuk a felhajtott részt, hogy a vályú keresztmetszete a lehető legnagyobb legyen, ha a felhajtott és a megmaradó rész szöge mindkét oldalon *a)* 90°; *b)* 120°; *c)* 150°?

327. Van-e az adott kerületű téglalap átlójának maximális és minimális értéke? Ha van, határozzuk meg.

***328.** Határozzuk meg az adott kerületű derékszögű háromszög átfogójának a minimális értékét! Létezik-e az átfogónak maximális értéke?

329. Mekkora a 10 cm sugarú gömbbe írt maximális palástú forgáshenger sugara és magassága?

330. Határozzuk meg az $x+\dfrac{1}{x}$ szám

a) minimumát, ha az x pozitív szám;
b) maximumát, ha az x negatív szám.

331. Egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogóinak hossza a, illetve b. Mennyi az a^6+b^6 minimális és maximális értéke?

27. Vegyes feladatok

332. Tükrözzük az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 3x-4$ függvény grafikonját

a) az abszcisszatengelyre;
b) az ordinátatengelyre;
c) az $y=x$ egyenletű egyenesre;
d) az $y=-x$ egyenletű egyenesre.

Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

333. Transzformáljuk az origóból 2 arányú középpontos hasonlósággal az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonját! Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$;

b) $f(x) = x^2$;

c) $f(x) = 5 - x^2$;

d) $f(x) = x^2 - 6x$;

e) $f(x) = |x|$;

f) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

g) $f(x) = x^2 - 16$;

h) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2}, & \text{ha } |x| \leqq 4 \\ x^2 - 16, & \text{ha } |x| > 4 \end{cases}$

334. Transzformáljuk a $P(10; 4)$ pontból $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonját. Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

a) $f(x) = 1 - x$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$;

c) $f(x) = |x|$;

d) $f(x) = 4 - |x - 10|$;

e) $f(x) = x^2$;

f) $f(x) = 4 - x^2$;

g) $f(x) = 4(x - 10)^2$;

h) $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{20x - x^2}, & \text{ha } x \in [0; 20]; \\ 4, & \text{ha } x \notin [0; 20]. \end{cases}$

***335.** Melyik az az elsőfokú f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre minden valós x esetén

a) $f(x) + f(x+1) = 2x + 4$;

b) $f(x) + f(x+2) = 10x$;

c) $f(x+1) - f(x-1) = 6$;

d) $f(2x) + f(x+1) = 12x + 4$?

336. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az

$$f: (\mathbf{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + \frac{x+1}{|x+1|}$$

függvényt!

337. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto 2|x-3| - |x+1| + 0{,}5|x-2|$;

b) $x \mapsto |x+1| + |x-2| - 3|x|$;

c) $x \mapsto \sqrt{(x-3)^2} + x - 3$;

d) $x \mapsto \sqrt{x^4} - 2x\sqrt{x^2} + 1$.

338. Milyen kapcsolat van az alábbi függvények grafikonja között?

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2 + 4,$

$g: (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3 + 4x}{x},$

$h: (\mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}.$

339. Adjunk meg olyan halmazt, amelyen az $x \mapsto 9x - x^3$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény

a) korlátos;
b) nem korlátos;
c) páros;
d) páratlan;
e) sem nem páros, sem nem páratlan;
f) páros is és páratlan is;
g) két zérushelye van;
h) van maximuma is és minimuma is.

340. Értelmezzünk függvényt a valós számok halmazának a lehető legbővebb részhalmazán az alábbi hozzárendelési szabályokkal.

$$x \mapsto 2x - 5, \quad x \mapsto \sqrt{(2x-5)^2}, \quad x \mapsto (\sqrt{2x-5})^2.$$

Milyen kapcsolat van e három függvény között?

341. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto (x-5) + \sqrt{(x-5)^2}$;

b) $x \mapsto (x-5) - \sqrt{(x-5)^2}$;

c) $x \mapsto (\sqrt{x^2}-1)(\sqrt{x^2}+1)$;

d) $x \mapsto (\sqrt{x^2}-1)(x+1)$.

342. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket:

a) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

b) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{10}{x^2+1}$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

d) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$;

e) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

f) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x+1}$;

g) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$, $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

h) $D_f=[-5;5]$, $f(x)=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

343. Ábrázoljuk azonos koordináta-rendszerben a következő három $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt, és állapítsuk meg a grafikonok közötti kapcsolatot.

$$f(x)=2x,\quad g(x)=2x-1,\quad h(x)=x+[x].$$

344. Értelmezzük az f és a g függvényt az alábbi hozzárendelési szabályokkal az $\mathbf{R}$ lehető legbővebb részhalmazán. Egyenlő-e az f és a g függvény vagy nem?

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}$;

b) $f(x)=\lg(x^2)$, $g(x)=2\lg x$;

c) $f(x)=\sqrt{(1-3x)^2}$, $g(x)=1-3x$;

d) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^3-x^2}$, $g(x)=\dfrac{3x}{x^2-x}$;

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$;

f) $f(x)=\sqrt[3]{x^5-x^6}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x^2-x^3}$;

g) $f(x)=x$, $g(x)=10^{\lg x}$;

h) $f(x)=\lg(x^2-6x+10)^4$, $g(x)=4\lg(x^2-6x+10)$.

345. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket és írjuk le a növekedési viszonyaikat (a [...] az egészrészt jelzi).

a) $x\mapsto\dfrac{x}{\operatorname{sgn}(x^2+2)}$;

b) $x\mapsto x(1+\operatorname{sgn}x)$;

c) $x\mapsto\dfrac{x}{2+\operatorname{sgn}x}$;

d) $x\mapsto(1+\operatorname{sgn}\sin x)\sin x$;

e) $x\mapsto[\operatorname{sgn}x]$;

f) $x\mapsto\operatorname{sgn}[x]$;

g) $x\mapsto[\sin x]$;

h) $x\mapsto[2\sin x]$.

***346.** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $\big|\,||x|-1|-2\,\big|=\dfrac{x+6}{4}$;

b) $\left|1+\left|\dfrac{x-4}{5}\right|-x\right|=3$;

c) $[|x-3|-2]=2-2x$; (a [...] az egészrészt jelzi);

d) $[\sqrt{x^2+14x+49}-2]+\dfrac{2x+9}{2}=0$ (a [...] az egészrészt jelzi).

*347. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\left|\,||x|-1|-2\,\right| < \dfrac{x+6}{4}$;

b) $\left|1+\left|\dfrac{x-4}{5}\right|-x\right| \geqq 3$;

c) $[|x-3|-2] > 2-2x$; (a [...] az egészrészt jelzi);

d) $[\sqrt{x^2+14x+49}-2]+\dfrac{2x+9}{2} \leqq 0$ (a [...] az egészrészt jelzi).

348. Oldjuk meg grafikusan a

$$\operatorname{sgn}\left(1-\frac{3}{x-2}\right) = |x+3|-2 \qquad (x\neq 2)$$

egyenletet.

349. Igazoljuk, hogy ha

$$f\colon (\mathbf{R}\setminus]-2;2[) \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2-4},$$

$$g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad x\mapsto \sqrt{x^2+4}$$

és $a \in [1;+\infty[$, akkor $f\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+g\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = 2a$.

***350.** Ábrázoljuk az

$$f\colon ([-2;5]\setminus[0;1[) \to \mathbf{R}, \qquad x\mapsto \frac{1}{|[x]|}$$

függvényt. Mekkora lehet annak az egyenesnek a meredeksége, amely illeszkedik a koordináta-rendszer $P(0;2)$ pontjára és két pontban metszi az f függvény grafikonját?

***351.** Van-e olyan $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, amely minden valós értéket pontosan két helyen vesz fel?

***352.** Melyik az az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre $f(1)=0$ és minden $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ esetén

$$|f(a)-f(b)| = a-b?$$

353. Oldjuk meg grafikusan az **N** halmazon a

$$7[\sqrt{x}]+1 = x$$

egyenletet! (A [...] az egészrészt jelzi.)

354. Mennyi az együtthatók összege az alábbi kifejezés polinomalakjában?

a) $(3a^2-5a+6)^2$;

b) $(a-2)^7$;

c) $(4a^4-3a^3+2a^2-a+10)^2$;

d) $(3a^6+5a^5-6a^4+a^3-3a^2+4a-5)^{1000}$.

355. Bontsuk fel az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt egy páros és egy páratlan függvény összegére.

a) $x\mapsto 5x^6-3x^4+2x^3-x+7$;

b) $x\mapsto \sin^2 x+3\cos x-5x+1$;

c) $x\mapsto 2^x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+3\cos x$;

d) $x\mapsto 5-\cos^3 x$.

356. Írjuk fel az

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad x\mapsto 2x^2+5x-3$$

függvényt két, szigorúan monoton növekedő függvény különbségeként.

***357.** Valamely $f\colon \mathbf{N}^+\to\mathbf{R}$ függvényre

$$f(2^k) = 2^{k+1}-1 \qquad (k\in\mathbf{N})$$

és

$$f(f(n)) = 4n-3 \qquad (n\in\mathbf{N}^+).$$

Mennyi az $f(1985)$?

*358. Valamely $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ függvényre $f(1)=1$ és minden $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Z}$ esetén

$$f(a-b^2) = f(a)+(b^2-2a)f(b).$$

Mennyi az $f(1987)$?

*359. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto ax+b \quad (a \neq 0),$$

akkor nem lehet az $|f(0)-1|$, az $|f(1)-3|$ és az $|f(2)-9|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

*360. Van-e olyan $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

a) $f(f(n)) = n$;

b) $f(f(n)) = n+1$;

c) $f(f(n)) = n+2$;

d) $f(f(n)) = 2n$;

e) $f(f(n)) = 4n$;

f) $f(f(n)) = n^4$?

II. FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA, HATÁRÉRTÉKE, DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA

1. Folytonos és szakadásos függvények

1. Folytonos-e az f függvény a -2 helyen?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2}$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$, ha $x \neq -2$; $f(-2)=0$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+3}$, ha $x \neq -3$; $f(-3)=10$.

2. Hol folytonos és hol szakadásos az egészrész-, illetve a törtrész-függvény?

3. Hol folytonosak és hol szakadásosak az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények?

a) $x \mapsto x+[x]$;

b) $x \mapsto [x]+[-x]$;

c) $x \mapsto [x]+\sqrt{x-[x]}$;

d) $x \mapsto [x]\cdot(x-[x])$.