b) $x=y$; $x>y$; $x \geqq y$; $x<y$; $x \leqq y$;

c) $y = 2x-1$; $y > 2x-1$; $y \geqq 2x-1$;

d) $y = 5-3x$; $y > 5-3x$; $y \geqq 5-3x$;

e) $x+y = 4$; $x+y > 4$; $x+y \geqq 4$;

f) $x-y = 1$; $x-y > 1$; $x-y \geqq 1$;

g) $2x-y = 3$; $2x-y > 3$; $2x-y \geqq 3$;

h) $3x-4y = 12$; $3x-4y > 12$; $3x-4y \geqq 12$.

7. Függvények ábrázolása

72. Ábrázoljunk nyíldiagrammal három olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ halmaz, értékkészlete pedig a $\{0; 1; 2; 3\}$ halmaz.

73. Ábrázoljuk nyíldiagrammal az f függvényt, ha

a) $D_f = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| < 4\}$, $f(x) = \frac{|x|}{100}$;

b) $D_f = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2<x<10\}$, $f(x) = 100x+50$.

Hogyan érdemes megválasztani az egységet a két számegyenesen?

74. Rendeljük minden egyjegyű pozitív egész számhoz az osztóit! Ábrázoljuk ezt a relációt nyíldiagrammal.

75. Ábrázoljuk az f függvényt nyíldiagrammal és koordináta-rendszerben, ha $D_f = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 < |x| \leqq 5\}$ és

a) $f(x) = 6-x$; *c)* $f(x) = \frac{12}{x}$;

b) $f(x) = 6x-x^2$; *d)* $f(x) = \frac{12}{6x-x^2}$.

76. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $A(-5; 12)$, $B(-4; 3)$, $C(-3; 0)$, $D(-2; 0)$, $E(-1; 7)$, $F(0; 10)$ pontokat. Ez a ponthalmaz

egy függvény grafikonja. Írjuk fel e függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

77. Rajzoljuk meg egy koordináta-rendszerben az AB szakaszt, ha $A(-6; 3)$ és $B(4; 5)$. Melyik függvény grafikonja ez a ponthalmaz?

78. Rajzoljuk meg egy koordináta-rendszerben az AB egyenest, ha $A(-6; 3)$ és $B(4; 5)$. Melyik függvény grafikonja ez a ponthalmaz?

79. Rendeljük minden pozitív számhoz

a) önmagát;
b) az ellentettjét;
c) a nála kettővel kisebb számot;
d) a reciprokát.

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a kapott függvényt.

80. Rajzoljuk meg az f függvény grafikonját, ha $D_f = \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 7\}$ és

a) $f(x) = x-3$; *c)* $f(x) = \frac{1}{x-3}$;

b) $f(x) = (x-3)^2$; *d)* $f(x) = \left|\frac{1}{x-3}\right|$.

81. Egy beteggel kapcsolatban az alábbi megfigyelések állnak rendelkezésünkre:

		hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
hőmérséklet °C-ban	reggel 8 h-kor	38,2	37,6	37,5	37,2	37,6	36,8	36,3
	déli 12 h-kor	39,1	38,8	37,9	38,2	37,9	37,1	36,8
	este 8 h-kor	39,6	38,5	38,3	38,5	38,2	37,4	37,0
napi folyadékfogyasztás l-ben		2,5	2,6	2,1	2,2	1,4	1,5	1,2

Készítsünk e kapcsolatokat jól szemléltető grafikont.

8. Egyenes és fordított arányosság

82. Egy gyalogos, egyenletesen haladva, óránként 4 km-t tesz meg.

a) Mekkora utat tesz meg $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 2, 3, 4, 5, illetve t óra alatt?

b) Mennyi idő alatt tesz meg 2, 3, 5, 6, 10, 15, 20, illetve s km-t?

83. Készítsünk grafikont az előző feladathoz, ha tudjuk, hogy a gyalogos reggel 7 órától délután 4 óráig volt úton, de 12-től fél 2-ig pihent.

84. Egy áru kg-onként 12 Ft-ba kerül.

a) Mennyibe kerül ebből az áruból $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, 5, 15, 20, illetve p kg?

b) Hány kg vásárolható ebből az áruból 20, 36, 45, 60, 80, 200, 210, illetve q Ft-ért?

c) Készítsünk e kapcsolatokat szemléltető grafikont.

85. Egy kocsi kereke egy fordulattal 24 dm utat tesz meg.

a) Milyen kapcsolat van a fordulatok száma és a megtett út között?

b) Hányat fordul ez a kerék 60 m, 600 m, 1 km, 2,4 km út megtétele során?

c) Mekkora utat tesz meg ez a kocsi, amíg a kereke 10, 15, 20, 200, 2000 fordulatot végez?

86. Egy tucat zsebkendő 12 darabból áll.

a) Hány zsebkendő van egy olyan szállítmányban, amely 12, 48, 2000, 15 000 tucatból áll?

b) Hány tucat állítható össze egy 2000, 5000, 12 000, 100 000 db-os szállítmányból?

c) Milyen kapcsolat van a darabszám és a tucatok száma között?

87. Rendeljük minden négyzet oldalhosszúságához a négyzet

a) átlójának hosszát;

b) kerületét;

c) területét.

Egyenes arányosságok-e a kapott függvények?

88. Az alábbi táblázat három gyermek testmagasságát mutatja, különböző életkorukban:

életkor években		0	1	2	3	4	5	6	7	8
magas-ság (cm-ben)	Éva	48	78	88	94	101	107	113	120	126
	Laci	53	82	95	103	112	121	128	135	143
	Pali	50	81	90	95	105	109	116	124	135

Találunk-e itt egyenes arányosságot?

89. Adjunk meg olyan egyenes arányosságokat, amelyekben az arányossági tényező 1; 2; 5; 7,5; $\frac{1}{4}$; $-\frac{2}{3}$; -4; $-5{,}5$! Ábrázoljuk a kapott függvényeket.

90. Egyenesen arányos-e

a) az ember életkora és a testmagassága;

b) az ember életkora és a tömege;

c) az ember testmagassága és a tömege?

91. Egyenesen arányos-e

a) a négyzet kerülete és területe;

b) a kör kerülete és sugara;

c) a kör területe és átmérője;

d) a háromszög kerülete és a köré írt kör sugara?

92. Egyenesen arányos-e a sokszög

a) oldalainak száma és átlóinak száma;

b) egy csúcsból húzott átlóinak száma és szögeinek az összege;

c) belső szögeinek összege és külső szögeinek az összege?

93. Egy út építéséhez 6000 m^3 földmunka szükséges. A rendelkezésre álló gépek teljesítménye 4 m^3/h.

a) Hány óra alatt készül el a munka, ha 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 100, 150, illetve n gép áll munkába?

b) Hány gépet alkalmazzunk, hogy az út egy hónap, 1 hét, 1 nap, 6 óra, illetve t óra alatt elkészüljön?

c) Milyen összefüggés van a gépek száma és a munkaórák száma között?

94. Több jármű közlekedik egy 100 km-es útszakaszon. Sebességük rendre 1, 2, 4, 5, 10, 20, 50, 75, 100, illetve v km/h.

a) Melyik jármű mennyi idő alatt teszi meg az utat?
b) Milyen kapcsolat van a járművek sebessége és menetideje között?
c) Készítsünk e kapcsolathoz grafikont.

95. Több jármű közlekedik egy 100 km-es útszakaszon, mindegyik egyenletes sebességgel. Az út megtételéhez rendre 1, $1\frac{1}{3}$, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, illetve t órára van szükségük.
a) Melyik jármű mekkora sebességgel halad?
b) Milyen kapcsolat van a járművek sebessége és menetideje között?
c) Készítsünk e kapcsolatokhoz grafikont.

96. Facsemetéket vásárolunk 24 000 Ft-ért. A fajtától és fejlettségi foktól függően kaphatók 40, 60, 80, 100, 120, 200 Ft-os csemeték. Melyikből hányat vehetünk? Készítsünk táblázatot és grafikont.

97. Egy úton végighaladva a 2 m kerületű kerék 300-at fordul.

a) Hányat fordul ugyanezen az úton az 1,2; 2,5; 3,2; 4; 6; illetve a k m kerületű kerék?
b) Mekkora annak a keréknek a kerülete, amelyik ezen az úton 900-at, 500-at, 200-at, 150-et, 100-at, illetve f-et fordul?
c) Milyen kapcsolat van a kerék kerülete és a fordulatszám között?
d) Készítsünk e kapcsolathoz grafikont.

98. Ábrázoljunk olyan fordított arányosságokat, amelyeknek az arányossági tényezője

a) $6, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$;

b) $-6, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$.

99. Egy medencébe 12 azonos keresztmetszetű cső vezet. Ha egy csövön át engedjük a vizet, akkor a medence 48 óra alatt telik meg.
a) Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha 2, 3, 4, ..., 12 csövön át engedjük a vizet?

b) Hány csövet kell megnyitnunk, ha azt akarjuk, hogy 20, 10, 8, 4, 2 óra alatt teljék meg a medence?
c) Milyen kapcsolat van a megnyitott csövek száma és a medence megtöltéséhez szükséges idő között?
d) Készítsünk ehhez az összefüggéshez grafikont.

100. Egy medence valamely d átmérőjű csövön keresztül t óra alatt telik meg.
a) Igaz-e, hogy a d növelése a t csökkenését vonja maga után?
b) Igaz-e, hogy d és t fordítottan arányos?
c) Igaz-e, hogy d^2 és t fordítottan arányos?

101. Az f függvény fordított arányosság. Értelmezési tartománya a $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmaz, grafikonjának egy pontja: $P(-2; 6)$.
a) Határozzuk meg az arányossági tényezőt.
b) Ábrázoljuk f-et.

102. Van-e olyan egyenes- vagy fordított arányosság, amelynek a grafikonjára illeszkedik a P és Q pont, ha

a) $P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$, $Q(10; 12)$;

b) $P(-2; 3)$, $Q(-6; -9)$;

c) $P(4; 8)$, $Q(16; 2)$;

d) $P(12; 15)$, $Q(-2; -90)$.

103. Fordítottan arányos-e adott munka esetén
a) a munkához szükséges idő és a munkások átlagos teljesítménye;
b) a munkások száma és a munkához szükséges idő;
c) a munkások száma és a munkások átlagos teljesítménye?

104. Van-e egyenes vagy fordított arányosság egy körben a következő adatok között:
a) az ívek hossza és a hozzájuk tartozó kerületi szögek;
b) az ívek hossza és a hozzájuk tartozó körcikkek területe;
c) a körcikkek kerülete és területe;
d) a körcikkek kerülete és a hozzájuk tartozó ívek hossza;
e) a körcikkek területe és a hozzájuk tartozó középponti szögek?

9. Nulladfokú és elsőfokú függvények

105. Van-e nullad- vagy elsőfokú függvény az alábbiak között?

a) $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 5x + \frac{3x-2}{10-15x}$;
$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$;
$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{3x}{x^2+2}$;

b) $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2x-3}{4x-6}$;
$g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2x^2-3x}{4x-6}$;
$h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{4x-6}{2x^2-3x}$;

c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x-7)^3-(2+x)^3$;
$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x-7)^2-(2+x)^2$;
$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x-7)-(2+x)$.

106. Hányadfokúak az alábbi függvények?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	15	12	9	6	3	0	-3
$g(x)$	1,5	$\frac{9}{6}$	$4:\frac{8}{3}$	$\frac{30}{20}$	1,5	$5-\frac{7}{2}$	$\sqrt{2{,}25}$
$h(x)$	0,713	0,824	0,935	1,046	1,157	1,268	1,379

107. Az f elsőfokú $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, $f(-1)=2$ és $f(1)=8$.
a) Mennyi az $f(0)$?
b) Mennyi az $f(1000)$?
c) Ábrázoljuk az f függvényt.

108. Az f elsőfokú $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, $f(2)=11$ és $f(6)=3$. Határozzuk meg f hozzárendelési szabályát.

109. A g elsőfokú függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, $g(-3)=-12$, $g(12)=13$.
a) Ábrázoljuk a g függvényt.
b) Határozzuk meg a grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjait!

110. A h elsőfokú függvény értelmezési tartománya a $[2; 3]$ zárt intervallum; $h(2)=-6$, $h(3)=6$. Mennyi $h\left(\frac{9}{4}\right)$; $h\left(\frac{8}{3}\right)$; $h\left(\frac{17}{6}\right)$?

111. Határozzuk meg azt a képletet, amely segítségével a Fahrenheit skála szerint mért hőmérséklet átszámítható Celsius fokokba, ha tudjuk, hogy mindkét skála egyenletes beosztású és a víz forráspontja 212 Fahrenheit fok, olvadáspontja pedig 32 Fahrenheit fok.

112. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax+5$; a értéke legyen 5; 3; 1; -1; -3; -5;
b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{3}{4}x+b$; b értéke legyen 5; 3; 1; -1; -3; -5.

113. A következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények grafikonja egy-egy egyenes. Mekkora a meredekségük?

a) $x \mapsto 5-\frac{2}{3}x$;
b) $x \mapsto (2x-1)(3+x)-2(x+1)(x-1)$;
c) $x \mapsto \frac{5x^3+10x}{x^2+2}$;
d) $x \mapsto \frac{6x-2}{5}+3x-4$.

114. Az f elsőfokú $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény. Grafikonja olyan m meredekségű egyenes, amely illeszkedik a P pontra. Adjuk meg az f hozzárendelési szabályát!

a) $m=3$, $P(0;2)$; e) $m=2{,}5$, $P(-1;4)$;

b) $m=-\frac{1}{3}$, $P(0;2)$; f) $m=-2$, $P\left(\frac{2}{3};0\right)$;

c) $m=-7$, $P(0;2)$; g) $m=\frac{3}{5}$, $P\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{5}\right)$;

d) $m=7$, $P(0;2)$; h) $m=-\frac{5}{3}$, $P(0;0)$.

115. Melyik az az elsőfokú $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, amelynek a grafikonja a P és a Q pontra is illeszkedik, ha

a) $P(0;2)$, $Q(5;0)$; c) $P(3;-1)$, $Q(11;3)$;
b) $P(0;2)$, $Q(-5;2)$; d) $P(-5;-5)$, $Q(5;5)$?

116. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f és a g függvényt, ha mindkettő értelmezési tartománya az $\mathbf{R}$ halmaz és

a) $f(x)=3x-7$, $g(x)=3x+7$;

b) $f(x)=3x-7$, $g(x)=-3x-7$;

c) $f(x)=6\left(1-\frac{x-2}{3}\right)$, $g(x)=10-2x$;

d) $f(x)=8x-5$, $g(x)=(x+2)^2-(x-2)^2$.

117. Határozzuk meg a **116.** feladatban adott két-két függvény grafikonjának közös pontjait.

118. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az f függvényt, ha

a) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{ha } x\geqq 0\\ -x, & \text{ha } x<0\end{cases}$;

b) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-5, & \text{ha } x\geqq 2\\ 3-2x, & \text{ha } x<2\end{cases}$;

c) $D_f=\mathbf{Z}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x, & \text{ha } x>6\\ 2, & \text{ha } -6\leqq x\leqq 6\\ -\frac{1}{3}x, & \text{ha } x<-6\end{cases}$;

d) $D_f=\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}3-2x, & \text{ha } x\leqq 0\\ 3, & \text{ha } 0<x<4\\ 11-2x, & \text{ha } x\geqq 4\end{cases}$.

119. Írjuk le a **118.** feladatban megadott függvények menetét (növekedés, fogyás, szélsőérték).

10. Másodfokú függvények

120. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket!

a) $x\mapsto x^2$, $x\mapsto 2x^2$, $x\mapsto 3x^2$, $x\mapsto 4x^2$;

b) $x\mapsto x^2$, $x\mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x\mapsto \frac{1}{4}x^2$, $x\mapsto \frac{1}{8}x^2$;

c) $x\mapsto -x^2$, $x\mapsto -2x^2$, $x\mapsto -3x^2$, $x\mapsto -4x^2$;

d) $x\mapsto -x^2$, $x\mapsto -\frac{1}{2}x^2$, $x\mapsto -\frac{1}{4}x^2$, $x\mapsto -\frac{1}{8}x^2$.

121. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket!

a) $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^2+1$, $x\mapsto x^2+2$, $x\mapsto x^2+4$;

b) $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^2-1$, $x\mapsto x^2-2$, $x\mapsto x^2-4$;

c) $x\mapsto -x^2$, $x\mapsto 1-x^2$, $x\mapsto 2-x^2$, $x\mapsto 4-x^2$;

d) $x\mapsto -x^2$, $x\mapsto -(x^2+1)$, $x\mapsto -(x^2+2)$, $x\mapsto -(x^2+4)$.

122. Határozzuk meg a **121.** feladatban megadott függvények zérushelyeit.

123. Ábrázoljuk az f, a g és az $f+g$ $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket, ha

a) $f(x)=3x^2$, $g(x)=-2$;

b) $f(x)=x^2$, $g(x)=5-x^2$;

c) $f(x) = 1 - x^2$, $\quad g(x) = x - 1$;

d) $f(x) = 2x^2 + x$, $\quad g(x) = 5 - 2x^2$.

124. Hányadfokú lehet két másodfokú függvény összege, különbsége, szorzata?

125. Adjunk meg két olyan másodfokú függvényt, amelyek összege

a) másodfokú;
b) elsőfokú;
c) nulladfokú.

126. Van-e olyan első- vagy másodfokú $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelynek egyik leszűkítése az f, ha

a)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	4	0	-1	0	3	8

;

b)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	3	0	-5	-12	-21

;

c)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	3	3	3	3	3	3

;

d)

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	4	0	-4	-8	-12	-16

.

127. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények zérushelyeit:

a) $x \mapsto x^2$, $\quad x \mapsto 2x^2$, $\quad x \mapsto -x^2$, $\quad x \mapsto -2x^2$;

b) $x \mapsto x^2 + x$, $\quad x \mapsto 3x - 5x^2$, $\quad x \mapsto (x+2)(x-4)+8$;

c) $x \mapsto x^2 + 4$, $\quad x \mapsto x^2 - 4$, $\quad x \mapsto 4 - x^2$;

d) $x \mapsto x^2 + 4x + 4$, $\quad x \mapsto x^2 - 6x + 8$, $\quad x \mapsto x^2 - 2x + 6$.

128. Rajzoljuk meg a következő, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények grafikonját a zérushelyek felhasználásával.

a) $x \mapsto 3x - 5x^2$, $\quad x \mapsto 2x^2 + 6x$, $\quad x \mapsto x^2 - 0{,}25x$;

b) $x \mapsto 3x^2 - 6x$, $\quad x \mapsto x + 5x^2$, $\quad x \mapsto 2x(3 - 5x)$;

c) $x \mapsto (x+5)(x-2)$, $\quad x \mapsto x^2 - 5x + 6$, $\quad x \mapsto x^2 - x - 6$;

d) $x \mapsto 5 - 2x^2$, $\quad x \mapsto (x-3)(1-2x)$, $\quad x \mapsto (x+1)(2-x)+4$.

129. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x \mapsto x^2 - 5x$, $\quad x \mapsto x^2 + 3$, $\quad x \mapsto x^2 - 5x + 3$;

b) $x \mapsto -x^2$, $\quad x \mapsto 12 - x^2$, $\quad x \mapsto 12x - x^2$;

c) $x \mapsto 5x^2 - 20$, $\quad x \mapsto 20 - 5x^2$, $\quad x \mapsto 20 + 5x^2$;

d) $x \mapsto \sqrt{3}x^2 + \sqrt{12}$, $\quad x \mapsto \sqrt{3}x^2 - \sqrt{12}$, $\quad x \mapsto \sqrt{3}x^2 - \sqrt{12}x$.

130. Van-e olyan másodfokú függvény, amelynek értékkészlete

a) a pozitív valós számok halmaza;
b) a 3-nál nem nagyobb valós számok halmaza;
c) az egész számok halmaza;
d) a $[-5; +\infty[$ félig zárt intervallum?

131. Adjunk meg olyan másodfokú $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amelynek az értékkészlete

a) csak pozitív számokból áll;
b) csak negatív számokból áll;
c) a nemnegatív számok halmaza;
d) felülről korlátos számhalmaz.

132. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f, g és h, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = (x+4)^2$, $\quad h(x) = (x+4)^2 - 5$;

b) $f(x) = 2x^2$, $\quad g(x) = 2(x+4)^2$, $\quad h(x) = 2(x+4)^2 - 5$;

c) $f(x) = -x^2$, $\quad g(x) = -(x+4)^2$, $\quad h(x) = -(x+4)^2 - 5$;

d) $f(x) = -2x^2$, $\quad g(x) = -2(x+4)^2$, $\quad h(x) = -2(x+4)^2 - 5$.

133. Ábrázoljuk az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a(x-u)^2+v$ függvényt, ha

a) $a=1, \quad u=2, \quad v=3;$

b) $a=-1, \quad u=2, \quad v=3;$

c) $a=\frac{1}{2}, \quad u=-2, \quad v=3;$

d) $a=\frac{1}{2}, \quad u=-2, \quad v=-3;$

e) $a=2, \quad u=\frac{1}{4}, \quad v=-\frac{3}{4};$

f) $a=\frac{3}{4}, \quad u=-1, \quad v=-1;$

g) $a=-1{,}5, \quad u=3, \quad v=0;$

h) $a=3, \quad u=0, \quad v=-12.$

134. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt úgy, hogy előbb elvégezzük az $f(x) = a(x-u)^2+v$ átalakítást.

a) $f(x) = x^2-6x+9;$

b) $f(x) = x^2-6x+8;$

c) $f(x) = x^2+5x+4;$

d) $f(x) = -x^2+3x-2;$

e) $f(x) = -x^2-5x-4;$

f) $f(x) = -x^2+6x-8;$

g) $f(x) = 2x^2+4x-7;$

h) $f(x) = -5x^2+20x+25.$

135. Hol metszi a koordinátatengelyeket az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonja, ha

a) $f(x) = x^2-7x+12;$

b) $f(x) = 3x^2-7x+12;$

c) $f(x) = (2x-5)(3-x);$

d) $f(x) = x(4-3x)-1;$

e) $f(x) = (x+1)^2-7;$

f) $f(x) = 3(x-5)^2+2;$

g) $f(x) = -(x-3)^2+5;$

h) $f(x) = -\frac{2}{3}(x+6)^2-2?$

136. Adjuk meg azt a másodfokú f függvényt, amelyre

a) $f(0)=0, \quad f(1)=3, \quad f(-2)=12;$
b) $f(-1)=-4, \quad f(1)=-2, \quad f(5)=26;$
c) $f(-1)=1, \quad f(1)=0, \quad f(3)=1;$
d) $f(-1)=1, \quad f(0)=5, \quad f(1)=3.$

137. Ábrázoljuk az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt és írjuk le a menetét.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & \text{ha} \quad x<2 \\ 1, & \text{ha} \quad x=2; \\ x, & \text{ha} \quad x>2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & \text{ha} \quad x\leqq 2 \\ x-2, & \text{ha} \quad x>2 \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & \text{ha} \quad x\leqq 2 \\ (x-2)(4-x), & \text{ha} \quad x>2 \end{cases};$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \text{ha} \quad x<0 \\ 0, & \text{ha} \quad x=0\,. \\ 3-x^2, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases}$

138. Megrajzolható-e egy vonallal az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonja?

a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{ha} \quad x\leqq 2 \\ \frac{1}{2}x, & \text{ha} \quad x>2 \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{ha} \quad x\leqq 2 \\ \frac{1}{2}x, & \text{ha} \quad x>2 \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha} \quad x<0 \\ x^2, & \text{ha} \quad x\geqq 0 \end{cases};$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & \text{ha} \quad |x|\geqq 1 \\ 1-2x^2, & \text{ha} \quad |x|<1 \end{cases}.$

139. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény egyik zérushelye az 5 legyen.

a) $f(x) = x^2-3x+c;$

b) $f(x) = 2x^2+x+c;$

c) $f(x) = (x-3)(2x+c);$

d) $f(x) = (x+1)(c-3x)+2.$

140. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény a szélsőértékét a -2 helyen vegye fel! Állapítsuk meg a szélsőértéket is.

a) $f(x) = x^2 + cx + 1$;

b) $f(x) = -4x^2 + cx + 12$;

c) $f(x) = (2x - c)(5 + x)$;

d) $f(x) = (x + c)(x - c) + c$.

141. Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + px + q$ függvénynek
a) a minimuma -1 legyen és ezt a 3 helyen vegye fel;
b) a minimuma 5 legyen és ezt a 0 helyen vegye fel;
c) a maximuma 700 legyen;
d) csak egy zérushelye legyen, a -10.

142. Határozzuk meg b és c értékét úgy, hogy az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -2x^2 + bx + c$ függvénynek
a) a két zérushelye 0 és 6 legyen;
b) a maximuma 50 legyen és ezt a -3 helyen vegye fel;
c) a maximuma -5 legyen és ezt a 10 helyen vegye fel;
d) ne legyen maximuma.

143. Értelmezési tartományuk mely elemeihez rendelnek az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények pozitív, illetve negatív értéket?

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $\quad g(x) = -x^2 + 5x - 4$;

b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$, $\quad g(x) = -2x^2 + 8x - 10$;

c) $f(x) = 3(x+2)^2$, $\quad g(x) = -3(x+2)^2$;

d) $f(x) = (x-3)(x+7)$, $\quad g(x) = -(x-3)(x+7)$.

144. Melyek azok a valós számok, amelyekhez az f és a g, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény is pozitív értéket rendel?

a) $f(x) = (x+4)(x-5)$ és $g(x) = (x+2)(x-6)$;

b) $f(x) = (x+4)(x-5)$ és $g(x) = (x+2)(4-x)$;

c) $f(x) = (x+4)(x-5)$ és $g(x) = (x+5)(x-5)$;

d) $f(x) = (x+4)(x-5)$ és $g(x) = (x+5)(6-x)$.

145. Melyek azok a valós számok, amelyekhez az f és a g, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény egyenlő értéket rendel?

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ és $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = x^2 + x - 7$ és $g(x) = 6x^2 + x + 4$;

c) $f(x) = 12x - 5x^2$ és $g(x) = 5(2+x)(2-x)$;

d) $f(x) = x^2 - 5x + 11$ és $g(x) = -x^2 + 3x + 5$.

11. Lineáris törtfüggvények

146. Ábrázoljuk az f függvényt, ha $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ és

a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; *e)* $f(x) = \frac{2x+11}{x+3}$;

b) $f(x) = \frac{5}{x+3}$; *f)* $f(x) = \frac{-5}{x+3}$;

c) $f(x) = \frac{2x+6}{x+3}$; *g)* $f(x) = \frac{-2x-6}{x+3}$;

d) $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$; *h)* $f(x) = \frac{-2x-11}{x+3}$.

147. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

a) $f: (\mathbf{R}\setminus\{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x},$

$g: (\mathbf{R}\setminus\{2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-2},$

$h: (\mathbf{R}\setminus\{2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-2}+4,$

$k: (\mathbf{R}\setminus\{2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{4x-7}{x-2};$

b) $f: (\mathbf{R}\setminus\{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x},$

$g: (\mathbf{R}\setminus\{-1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x+1},$

$h: (\mathbf{R}\setminus\{5\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-5},$

$k: (\mathbf{R}\setminus\{2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \dfrac{3}{x-2}.$

148. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket! Melyik halmaz az értékkészletük?

$D_f = \mathbf{R}\setminus\{5\}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x-5};$

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{5\}, \quad g(x) = \dfrac{2}{5-x};$

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{5\}, \quad h(x) = \dfrac{2}{5-x}+1;$

$D_k = \mathbf{R}\setminus\{0; 5\}, \quad k(x) = \dfrac{7x-x^2}{5x-x^2}.$

149. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$ függvényeket! Adjuk meg az értékkészletüket.

$f(x) = \dfrac{6}{x}, \quad g(x) = \dfrac{6}{x-2}, \quad h(x) = 3+\dfrac{6}{x-2},$

$k(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2x}, \quad l(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2x}-3, \quad m(x) = \dfrac{6x^2-18x}{x^3-5x^2+6x}.$

150. Ábrázoljuk az adott f függvényt úgy, hogy előbb a törteket $\dfrac{a}{x-b}+c$ $(c \in \mathbf{Q})$ alakra hozzuk! Mi az f értékkészlete?

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-3\}, \quad f(x) = \dfrac{2x+5}{x+3};$

b) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{2-3x};$

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{7-8x}{3x+1};$

d) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{4\}, \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{8}x+4}{\sqrt{2}x-\sqrt{32}}.$

151. Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának a koordinátatengelyekkel való metszéspontjait és az aszimptotáit.

$D_f = \mathbf{R}\setminus\{-1\}, \quad f(x) = \dfrac{2x-5}{x+1}; \quad D_h = \mathbf{R}\setminus\{2{,}5\}, \quad h(x) = \dfrac{x+1}{2x-5};$

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{-1\}, \quad g(x) = \dfrac{5-2x}{x+1}; \quad D_k = \mathbf{R}\setminus\{2{,}5\}, \quad k(x) = \dfrac{x+1}{5-2x}.$

152. Határozzuk meg az f függvény grafikonjának az aszimptotáit és jelöljük meg, melyik síknegyedekben van a grafikon.

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-1\}, \quad f(x) = \dfrac{x-3}{x+1};$

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}, f(x) = \frac{2-5x}{4x+3}$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}, \ f(x) = \frac{4x+5}{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}$;

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pi\}, \qquad f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x-\pi}$.

153. Adjunk meg egy lineáris törtfüggvényt úgy, hogy a grafikonjának az aszimptotái az $x=k$ és az $y=l$ egyenletű egyenesek legyenek!

a) $k=0, \quad l=2$; *c)* $k=-2, \quad l=0$;

b) $k=5, \quad l=-1$; *d)* $k=-\frac{2}{3}, \quad l=\frac{1}{4}$.

154. Diszkutáljuk az alábbi f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4}, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\} \\ \frac{2}{3}, & \text{ha} \quad x = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

155. Diszkutáljuk az alábbi f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{4-2x}, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális} \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x \text{ racionális} \end{cases}$$

156. Az f függvény értelmezési tartománya a racionális számok halmaza,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5x+7}, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{Q} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\} \\ 0, & \text{ha} \quad x = -\frac{7}{5}. \end{cases}$$

Melyik halmaz az f értékkészlete?

157. Az f függvény értelmezési tartománya az irracionális számok halmaza, hozzárendelési szabálya

$$x \mapsto \frac{3-4x}{x+1}.$$

a) Igaz-e, hogy az f értékkészlete csak irracionális számokból áll?
b) Igaz-e, hogy az f értékkészlete az irracionális számok halmaza?

158. Az f függvény értelmezési tartománya a racionális számok halmaza,

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}x-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}x}.$$

Határozzuk meg az f értékkészletét.

159. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az f függvényt.

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}, \ f(x) = \frac{\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}}{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}}.$$

Melyik halmaz az f értékkészlete?

160. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az $f+g$, az $f-g$, a $g-f$, az $\frac{f}{g}$ és a $\frac{g}{f}$ függvényt, ha

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}, \quad f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1},$$

$$D_g = \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}, \quad g(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}.$$

161. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az $f+g$, az $f-g$, a $g-f$, az $\frac{f}{g}$ és a $\frac{g}{f}$ függvényt, ha

$D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \{-3\}, \quad f(x) = \frac{2x-5}{3+x}, \quad g(x) = \frac{1-x}{2x+6}.$

12. Előjel-, egészrész- és törtrészfüggvény

162. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az *előjelfüggvényt*. (Jele: sgn. Az x helyen felvett érték jele: sgn x.)

$$D_{sgn} = \mathbf{R}, \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ pozitív} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x \text{ negatív} \end{cases}$$

163. Ábrázoljuk az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} f(x)$ függvényt, ha

a) $f(x) = x+2;$ *e)* $f(x) = x^2-9;$

b) $f(x) = 3x-4;$ *f)* $f(x) = |x^2-9|;$

c) $f(x) = -5;$ *g)* $f(x) = -x^2-4x+5;$

d) $f(x) = x^2-6;$ *h)* $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}.$

164. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az $f+g$ és a h függvényt, ha

f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2-x-6)$,

g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(6x-2x^2)$,

h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}[(x^2-x-6)+(6x-2x^2)]$.

165. Ábrázoljuk az $(\mathbf{R} \setminus \{d\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} f(x)$ függvényt.

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}, \quad d = \frac{3}{2};$

b) $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}, \quad d = \frac{3}{2};$

c) $f(x) = \frac{4x-3}{3x+1}, \quad d = -\frac{1}{3};$

d) $f(x) = \frac{3x+1}{4x-3}, \quad d = \frac{3}{4}.$

166. Mely valós számokra igaz, hogy

a) $\operatorname{sgn} x = x;$ *d)* $|\operatorname{sgn} x| = |x|;$

b) $\operatorname{sgn} x < x;$ *e)* $|\operatorname{sgn} x| < |x|;$

c) $\operatorname{sgn} x > x;$ *f)* $|\operatorname{sgn} x| > |x|$?

167. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket!

f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (\operatorname{sgn} x)^2;$

g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x(1+\operatorname{sgn} x);$

h: $(\mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{sgn}(x^2-1)};$

k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x \operatorname{sgn}(x^2-1)$.

Van-e a függvények között olyan, amely kölcsönösen egyértelmű leképezés?

168. Ábrázoljuk az *egészrészfüggvényt*. ($[a]$ az a valós számnál nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelöli. Egészrészfüggvénynek az

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto [x]$$

függvényt nevezzük.)

169. Ábrázoljuk a *törtrészfüggvényt*. (Törtrészfüggvénynek az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x-[x]$ függvényt nevezzük.)

***170.** Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto x+[x];$ *c)* $x \mapsto [x]-x;$

b) $x \mapsto x-[x]+1;$ *d)* $x \mapsto x \cdot [x];$

e) $x \mapsto \frac{x}{2} \cdot [x]$;

f) $x \mapsto [x+3]$;

g) $x \mapsto \frac{1}{4}[x]$;

h) $x \mapsto \left[\frac{1}{4}x\right]$.

***171.** Ábrázoljuk az alábbi függvényeket.

a) $f\colon (\mathbf{R} \setminus [0; 1[) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{6}{[x]}$;

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{[x]}{6}$;

b) $f\colon (\mathbf{R} \setminus [0; 1[) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{x}{[x]}$;

$g\colon (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{[x]}{x}$.

***172.** Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $[-6; 6] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto [x-4]$;

b) $[-6; 6] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \left[\frac{1}{3}x+1\right]$;

c) $[-6; 6] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto [x^2]$;

d) $[-6; 6] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto [x^2-2x-3]$.

173. Mi az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények értékkészlete?

a) $x \mapsto 2[x]$, $\quad x \mapsto [2x]$;

b) $x \mapsto \frac{1}{3}[x]$, $\quad x \mapsto \left[\frac{1}{3}x\right]$;

c) $x \mapsto [x-5]$, $\quad x \mapsto [x-5]+2$;

d) $x \mapsto 2x-2[x]$, $\quad x \mapsto 2x-[2x]$.

13. Növekedés, fogyás, szélsőérték

174. Értelmezési tartományuk melyik részhalmazán növekedők, illetve fogyók az alábbi függvények?

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad f(x) = 4 - \frac{1}{x}$;

$D_g = \mathbf{R}$, $\quad g(x) = x^2 - 7x + 12$;

$D_h = \mathbf{R}$, $\quad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$;

$D_k = \mathbf{R}$, $\quad k(x) = |h(x)|$.

175. Van-e olyan intervallum, amelyen az alábbi f függvény szigorúan monoton fogyó?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 5x+3$;

b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{5}\right\}$, $\quad f(x) = \frac{1}{5x+3}$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = |x-2| + |x+2|$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = |x-2| - |x+2|$.

176. Állapítsuk meg az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény növekedési viszonyait.

a) $x \mapsto -x^2+7x-1$;

b) $x \mapsto 8-x^2$;

c) $x \mapsto 2x^2+5x+10$;

d) $x \mapsto 2x^2+5x-10$;

e) $x \mapsto \sqrt{2}x^2-\sqrt{3}$;

f) $x \mapsto (x+\sqrt{3})^2+\sqrt{6}$;

g) $x \mapsto 3(x-7)^2$;

h) $x \mapsto 2(1-x)^2+7$.

177. Van-e szigorúan monoton növekedő vagy szigorúan monoton fogyó az alábbi függvények között?

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{2}-\pi x$;

$g\colon [-5; 2] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto (x-3)^2$;

$h\colon]0; 6[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x+5}{2x+1}$;

$k\colon]-6; -1[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{x+5}{2x-1}$;

b) $f\colon [5; 6[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x-[x]$;

$g\colon [-2; 10] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |x+5|$;

$h\colon]-2; 0[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$;

$k\colon [-5; 5] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |x+2|-|x-2|$;

c) $f\colon [-\pi; \pi] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x$;

$g\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin \dfrac{x}{3}$;

$h\colon \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x + \cos x$;

$k\colon \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x$.

178. A következő függvények közül melyiknek van minimuma vagy maximuma?

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x+\sqrt{3}$;

$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto (x-5)^2+1$;

$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |2x+1|$;

$k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x-[x]$;

b) $f\colon [3; 12[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x+\sqrt{3}$;

$g\colon [3; 12[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto (x-5)^2+1$;

$h\colon [3; 12[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |2x+1|$;

$k\colon [3; 12[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x-[x]$.

179. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit.

$f\colon [-4; 7[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x^2-6x$;

$g\colon [-4; 7[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2+x-6$;

$h\colon [-4; 7[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2-15x-100$;

$k\colon [-4; 7[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2-4x-21$.

180. Adjunk meg olyan $D \subset \mathbf{R}$ halmazt, amelyen az

$$x \mapsto |x|; \quad x \mapsto |x-4|; \quad x \mapsto |x|+|x-4|$$

hozzárendeléssel jellemzett függvények mindegyike szigorúan monoton.

181. Írjuk le a következő függvények menetét!

a) $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{2}{x-3}$;

b) $\mathbf{Q}^* \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{5}{x}+1$ ($\mathbf{Q}^*$ az irracionális számok halmaza);

c) $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{2-x}{3x+1}-4$;

d) $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{2}{5x-21}$.

182. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Határozzuk meg az f legkisebb értékét.

a) $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = x^2-x+1$;

c) $f(x) = x^4-x^2+2$;

d) $f(x) = (x-2)^4+1$.

183. Adjunk meg olyan $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely

a) szigorúan monoton fogyó és csak pozitív értékeket vesz fel;

b) a negatív számok halmazán szigorúan monoton növekedő, a nemnegatív számok halmazán állandó;

c) amelynek van maximuma is és minimuma is;

d) amelynek nincs sem maximuma, sem minimuma.

184. Melyik monoton az alábbi függvények közül?

a) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \log_2 x$;

b) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $[-4; +\infty[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x+4}$;

d) $[-2; 15] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt[3]{x-10}$.

14. Függvény leszűkítése és kiterjesztése

185. Ábrázoljuk az alábbi függvényeknek a $[-1; 5]$ intervallumra való leszűkítését. Melyik halmaz a kapott függvények értékkészlete?

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |x|$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{(x+3)^2} - 3$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x - \left[\frac{x}{10}\right]$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 5 - |x-5|$;

b) $[-4; 4] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2$,

$[-10; 10] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{|x|}$,

$[-5; 5] \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 100$,

$]-10; 6[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$.

186. Adjuk meg a következő függvények olyan leszűkítését, amelyek szigorúan monotonok.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$, $\qquad \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\quad x \mapsto (x+1)(x-5)$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 12x - x^2$, $\qquad \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\quad x \mapsto x^2 - 2x^3$;

b) $(\mathbf{R} \setminus \{5\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{2-3x}{x-5}$,

$(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x - \frac{1}{x}$,

$(\mathbf{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{2}{x+1} - 7$,

$(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}}$.

187. Milyen kapcsolat van az f, a g és a h függvény között?

a) f: $[2; 7[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 3x+1$;

g: $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 3x+1$;

h: $\{2; 3; 4\} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 3x+1$;

b) f: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{4x^2-1}{2x+1}$;

g: $\{x \in \mathbf{Q} \mid x < 5\} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto 2x - 1$;

h: $\left(\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{4x^2-1}{2x-1} - 2$.

188. Adjuk meg az

$$[1; 2] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 6-x^2$$

függvény olyan kiterjesztését, amelynek az értékkészlete a

a) $[0; 6]$; *c)* $[-3; 6]$;

b) $]0; 6[$; *d)* $[2; 5]$.

189. Adjuk meg a

$$[0; 5] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5-x$$

függvénynek az **R** halmazra való olyan kiterjesztését, amelynek az eredeti függvényével azonos az értékkészlete.

190. Terjesszük ki az **R** halmazra a

$$[0; 2] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2-2x$$

függvényt úgy, hogy az értékkészlete ne változzék! Hány ilyen kiterjesztés létezik?

191. Milyen kapcsolat van az f és a g függvény között, ha $f(x) = \dfrac{x+3}{2x^2+5x-3}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ és

a) $D_f = D_g = \mathbf{N}$;

b) $D_f = D_g = [2; +\infty[$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$?

192. Értelmezzünk függvényeket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán az

$$x \mapsto \frac{x+5}{x^2+5x}; \quad x \mapsto \frac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}; \quad x \mapsto \frac{\log_2 (x+1) + \log_2 x}{x \log_2 (x^2+x)}$$

hozzárendelési szabályokkal. Igaz-e, hogy e függvények egyike egy másiknak a leszűkítése?

15. Függvény abszolútértéke

193. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |x+1|$, $x \mapsto |x+2|$, $x \mapsto |x+3|$;

b) $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |-x|$, $x \mapsto -|x|$; $x \mapsto =1-|x|$;

c) $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |2x|$, $x \mapsto 2|x|$, $x \mapsto 2|-x|$;

d) $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |x-1|$, $x \mapsto |3(x-1)|$, $x \mapsto |3x-3|+1$.

194. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket és írjuk fel az értékkészletüket.

a) $x \mapsto |x^2|$; $x \mapsto |x^2|-6$, $x \mapsto |x^2-6|$, $x \mapsto |x^2-6|-2$;

b) $x \mapsto |x^2-2x-3|$, $x \mapsto |x^2-2x-3|+1$, $x \mapsto ||x^2-2x-3|+1|$;

c) $x \mapsto |5-x^2|$, $x \mapsto |5-x^2|-2$, $x \mapsto ||5-x^2|-2|$;

d) $x \mapsto |x^2-6x+9|$ $x \mapsto |x^2-6x+9|-5$, $x \mapsto ||x^2-6x+9|-5|$.

195. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto x+|x|$, $x \mapsto x-|x|$, $x \mapsto x|x|$;

b) $x \mapsto 2x+|2x|$, $x \mapsto 2x-|2x|$, $x \mapsto 2x|2x|$;

c) $x \mapsto x|x|-1$, $x \mapsto x(|x|-1)$, $x \mapsto x(|x|+1)$;

d) $x \mapsto x^2+x|x|$, $x \mapsto x^2-x|x|$, $x \mapsto x|x|-x^2$.

196. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a következő függvényeket.

a) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = |x-3|$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$;

c) $D_f = D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2-|x|}$, $g(x) = \sqrt{x^2+|x|}$.

197. Ábrázoljuk a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, írjuk le a menetüket, állapítsuk meg az értékkészletüket.

a) $x \mapsto |x|$, $\quad x \mapsto |x+4|$, $\quad x \mapsto |x|+|x+4|$;

b) $x \mapsto |x|$, $\quad x \mapsto |x-2|$, $\quad x \mapsto |x|-|x-2|$;

c) $x \mapsto |x+3|$, $\quad x \mapsto |x-3|$, $\quad x \mapsto |x+3|+|x-3|$;

d) $x \mapsto |x+1|$, $\quad x \mapsto |x-5|$, $\quad x \mapsto |x+1|-|x-5|$;

e) $x \mapsto |x+2|$, $\quad x \mapsto |x+3|$, $\quad x \mapsto -|x+2|-|x+3|$;

f) $x \mapsto |2x-1|$, $\quad x \mapsto |4-3x|$, $\quad x \mapsto |2x-1|+|4-3x|$;

g) $x \mapsto |2{,}5x-10|$; $\quad x \mapsto 3|x|$, $\quad x \mapsto |2{,}5x-10|-3|x|$;

h) $x \mapsto 4\left|\frac{2}{3}x+1\right|$, $\quad x \mapsto |2-3x|$, $\quad x \mapsto 4\left|\frac{2}{3}x+1\right|+|2-3x|$.

198. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket és írjuk le a menetüket.

a) $x \mapsto |2^x|$, $\quad x \mapsto 2^{|x|}$;

b) $x \mapsto |\sin x|$, $\quad x \mapsto \sin |x|$;

c) $x \mapsto |\cos x|$, $\quad x \mapsto \cos |x|$;

d) $x \mapsto \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$, $\quad x \mapsto \sin\left|x-\frac{\pi}{6}\right|$.

199. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket:

a) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = |\sin|x||$;

b) $D_g=\mathbf{R}$, $\quad g(x) = |\cos|x||$;

c) $D_h=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi;\ n\in\mathbf{Z}\right\}$, $\quad h(x) = |\mathrm{tg}|x||$;

d) $D_k=\mathbf{R}\setminus\{n\pi;\ n\in\mathbf{Z}\}$, $\quad k(x) = |\mathrm{ctg}|x||$.

200. Ábrázoljuk a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket.

Írjuk fel a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét.

a) $x \mapsto \log_2 x$, $\quad x \mapsto |\log_2 x|$, $\quad x \mapsto \log_2 |x|$;

b) $x \mapsto \lg(x-3)$, $\quad x \mapsto |\lg(x-3)|$, $\quad x \mapsto \lg|x-3|$;

c) $x \mapsto \log_{0,2} x$, $\quad x \mapsto |\log_{0,2} x|$, $\quad x \mapsto \log_{0,2}|x|$;

d) $x \mapsto 0{,}2^x$, $\quad x \mapsto |0{,}2^x|$, $\quad x \mapsto 0{,}2^{|x|}$.

201. Határozzuk meg az f, a g és az $f+g$ függvények értékkészletét és rajzoljuk meg a grafikonjukat.

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{2\}$, $\quad f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$;

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\quad g(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$;

b) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{2\}$, $\quad f(x) = \frac{3x-6}{|x-2|}$;

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\quad g(x) = \frac{5x+5}{|x+1|}$;

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{3\}$, $\quad f(x) = \frac{4x-12}{|x-3|}$;

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{4\}$, $\quad g(x) = \frac{|8-2x|}{2x-8}$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$,

$f(x) = \frac{\cos x+|\cos x|}{|\cos x|}$, $\quad g(x) = \frac{\sin x-|\sin x|}{|\sin x|}$.

202. Mely intervallumokon növekedők és melyeken fogyók a következő $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények? Állapítsuk meg a minimumhelyeket.

a) $x \mapsto \big||x|-3|-1\big|$;

b) $x \mapsto \left|||5-2x|+3|-1\right|$;

c) $x \mapsto \left|||2-x|-1|-2\right|-1$;

d) $x \mapsto \left|||3x+2|-2|+1\right|-4|$.

16. Függvény számszorosa, műveletek függvényekkel

203. Diszkutáljuk a cf, az $f+g$ és a $cf+g$ függvényt.

a) $c=3$, $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=6x+3$;

b) $c=-\frac{1}{2}$, $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=5x-2$, $g(x)=2-4x$;

c) $c=2$, $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $g(x)=\frac{2}{x^2+1}$;

d) $c=-\frac{1}{3}$, $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=|3x-12|$, $g(x)=|4-x|$.

204. Ábrázoljuk az f, a g, az $\frac{f}{g}$ és a $\frac{g}{f}$ függvényt, és határozzuk meg a zérushelyeit.

a) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4x$, $g(x)=3x-12$;

b) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4$, $g(x)=5x+10$;

c) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=1{,}5$;

d) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$.

205. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az f, a g, az $f+g$ és az $f-g$ függvényt.

a) $D_f=D_g=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $g(x)=x-\frac{1}{x}$;

b) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=x+|x|$, $g(x)=x-|x|$;

c) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=3x-x^2$, $g(x)=3x+x^2$;

d) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{(x-5)^2}$, $g(x)=x+5$;

e) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=|\sin x|$;

f) $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=|\cos x|$, $g(x)=\cos x$;

g) $D_f=D_g=\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$, $g(x)=1$;

h) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}$; $D_g=\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\sin x}{|\sin x|}$, $g(x)=1$.

206. Állapítsuk meg az $f+g$ és az $\frac{f}{g}$ függvény értelmezési tartományát, növekedési viszonyait és értékkészletét. $D_f=D_g=\mathbf{R}$ és

a) $f(x)=2x+5$, $g(x)=2x-5$;

b) $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$;

c) $f(x)=x^2-5x+4$, $g(x)=x-1$;

d) $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-5x+4$.

207. Mi az $f+g$, az $f-g$, a $g-f$ és az $(fg)^2$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete, ha

f: $[0;+\infty[\ \to \mathbf{R}$, $x\mapsto\sqrt{x}$;

g: $]-\infty;4]\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\sqrt{4-x}$?

208. Legyen f és g értelmezési tartománya a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza. Létezik-e az $f+g$ és az $\frac{f}{g}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az értelmezési tartományát!

a) $f(x) = 3\sqrt{x^2-9}$, $\quad g(x) = \sqrt{18-2x^2}$;

b) $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$, $\quad g(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$;

c) $f(x) = \sqrt{15-3x}$, $\quad g(x) = \lg(x^2-10x+21)$;

d) $f(x) = \lg(4-x^2)$, $\quad g(x) = \lg(-x^2+8x-15)$.

17. Páros és páratlan függvények

209. Van-e páros vagy páratlan az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények között? Ha igen, melyek ezek?

a) $x\mapsto x^2-3x$, $\quad x\mapsto x^3-3x$, $\quad x\mapsto x^4-3x$, $\quad x\mapsto x^4-3x^2$;

b) $x\mapsto |x|+5$, $\quad x\mapsto |x+5|$, $\quad x\mapsto |2-|x||+1$;

c) $x\mapsto 2x^3-6x^2+x-7$; $\quad x\mapsto x^4+3x^2+12$,

d) $x\mapsto \dfrac{3}{1+x^2}$, $\quad x\mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$, $\quad x\mapsto \dfrac{2x-3}{1+x^2}$.

210. Melyik függvény páros vagy páratlan az alábbiak közül?

a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{-2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$;

b) $D_f = [0; +\infty[$, $\quad f(x) = x^3-\dfrac{2}{3}x$;

c) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$;

d) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$.

211. Igazoljuk, hogy az f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény páratlan, és adjuk meg olyan leszűkítését, amely páros!

a) $f(x) = x^3-x$; $\quad$ *c)* $f(x) = \sin x$;

b) $f(x) = x(x^2-2)(x^2-5)$; $\quad$ *d)* $f(x) = \sin^3 x+3\sin x$.

212. Igazoljuk, hogy értelmezhető az $\mathbf{R}$ halmazon függvény az

$$x\mapsto \lg(x+\sqrt{1+x^2})$$

hozzárendeléssel, és e függvény páratlan.

213. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$x\mapsto \lg\frac{1+x}{1-x}$$

hozzárendeléssel függvény értelmezhető. Igazoljuk, hogy e függvény páratlan.

214. Van-e páros vagy páratlan az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények között? Ha igen, melyek ezek?

$$x\mapsto 2^x, \quad x\mapsto 2^x+2^{-x}, \quad x\mapsto 2^x-2^{-x}, \quad x\mapsto \frac{2^x-1}{2^x+1}.$$

215. Igazoljuk, hogy

a) két páros függvény összege páros;

b) két páratlan függvény összege páratlan;

c) két páros függvény szorzata páros;

d) két páratlan függvény szorzata páros.

216. Adjunk meg olyan páros és olyan páratlan függvényt, amelyeknek

a) az összege páros;

b) az összege páratlan;

c) a szorzata páros;

d) a szorzata páratlan.

217. Adjunk a c számnak olyan értéket, hogy az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény páros legyen.

a) $x\mapsto 2x^6-cx^4+3x^2+1$; $\quad$ *c)* $x\mapsto (x^2+cx-1)^2$;

b) $x\mapsto 5x^4+cx^3-3x^2$; $\quad$ *d)* $x\mapsto (x^3-x+c)(x^3+x+c)$.

218. Melyik halmazra szűkítsük le az f függvényt, hogy a leszűkítés páros függvény legyen?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = |x+2| + |x-6|$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x(x^2-12)$;

c) $D_f = [-5; 8]$, $f(x) = x^4 + \cos x$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = ||x+2| - |x-2||$.

219. Melyik halmazra szűkítsük le az f függvényt, hogy a leszűkítés páratlan függvény legyen?

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 5$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } |x| \geqq 2; \\ 2x, & \text{ha } |x| < 2; \end{cases}$

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & \text{ha } x \leqq -\frac{1}{2}; \\ 2x-x^2, & \text{ha } x > -\frac{1}{2}; \end{cases}$

d) $D_f = [-10; 12]$, $f(x) = \sin x \cos^2 x$.

220. Írjuk fel az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 12$$

polinomfüggvényhez a

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

és a

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

függvényt. Igazoljuk, hogy g páros, h páratlan függvény és $g+h=f$.

221. Legyen f az $\mathbf{R}$ halmazon értelmezett polinomfüggvény. Igazoljuk, hogy a

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

páros, a

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

pedig páratlan függvény és

$$g+h=f.$$

***222.** Igazoljuk, hogy ha f valamely $[-a; a]$ $(a \in \mathbf{R})$ intevallumon értelmezett függvény, akkor felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére.

18. Korlátos függvények

223. Korlátos-e alulról vagy felülről az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény?

a) $x \mapsto |x|$;

b) $x \mapsto 1 + |x-2|$;

c) $x \mapsto 1 - |x-2|$;

d) $x \mapsto |x| - |x-2|$.

224. Ábrázoljuk és vizsgáljuk korlátosság szempontjából az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt. Adjuk meg olyan leszűkítését, amely korlátos.

a) $x \mapsto |x| + x$;

b) $x \mapsto |x| - x$;

c) $x \mapsto x - |x|$;

d) $x \mapsto x|x|$.

225. Válasszuk meg a c számot úgy, hogy az alábbi függvény korlátos legyen.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 5 - cx^3$;

b) $(\mathbf{R} \setminus \{3\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{c}{x-3}$;

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin(x+c)$;

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{|x+c|}$.

19. Összetett függvények

226. Melyik két függvény összetétele az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény?

a) $x \mapsto (x^2-1)^3$; $\quad$ *c)* $x \mapsto |2x^2-3x|$;

b) $x \mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $\quad$ *d)* $x \mapsto \sqrt[3]{1-x^6}$.

227. Írjuk fel az $f \circ g$ összetett függvény hozzárendelési szabályát.

a) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = |x|$, $\quad g(x) = 3x-4$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = x^2$, $\quad g(x) = 3x-4$;

c) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = x-1$, $\quad g(x) = 3x-4$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \sin x$, $\quad g(x) = 3x-4$.

228. Létezik-e az $f \circ g$ függvény? Ha igen, adjuk meg az értelmezési tartományát.

a) f: $[0; +\infty[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x}$,
$\quad g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x$;

b) f: $[0; +\infty[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sqrt{x}$,
$\quad g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \cos x - 2$;

c) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \sin x$,
$\quad g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \cos x$;

d) f: $]0; +\infty[\to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \log_2 x$,
$\quad g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto |x|-x$.

229. Ábrázoljuk nyíldiagrammal az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényt.

f: $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto \frac{x}{3}$,

g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\quad x \mapsto x^2$.

Egyenlő-e az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvény?

230. Írjuk fel az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát (a lehető „legegyszerűbb" alakban).

a) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \sin x$, $\quad g(x) = x+\pi$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \sin x$, $\quad g(x) = \frac{\pi}{2} - x$;

c) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \cos x$, $\quad g(x) = x + \frac{7\pi}{3}$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \cos x$, $\quad g(x) = \frac{12\pi}{5} - x$.

231. Adjuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényt.

a) $D_f = [0; +\infty[$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$,
$\quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x}$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = x^2+5$,
$\quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x}$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 2-3x$,
$\quad D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x}$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 2-3x$,
$\quad D_g = \mathbf{R}$, $\quad g(x) = x^2-4$.

232. Melyik halmazon értelmezhető függvény az

$$x \mapsto \lg \sin x$$

hozzárendelési szabállyal? Adjunk meg két olyan függvényt, amelyeknek ez az összetétele.

233. Adjuk meg az $f \circ f$ függvényt.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 3x+1$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2-9$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = (x-3)^2$;

d) $D_f = [-1; 1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

234. Az f függvény értelmezési tartománya a $]0; 2]$ intervallum. Melyik halmazon értelmezhető az $f \circ g$ összetett függvény?

a) $D_g = \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{5}$;

b) $D_g = \mathbf{R}$, $g(x) = 4x$;

c) $D_g = [0; +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x}$;

d) $D_g = \mathbf{R}$, $g(x) = x-[x]$.

235. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a $\operatorname{sgn} \circ f$ és az $f \circ \operatorname{sgn}$ függvényt, ha

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;

b) $f: (\mathbf{R} \setminus \{3\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2}{x-3}$;

c) $f: (\mathbf{R} \setminus \{3\}) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$;

d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$.

20. Függvény inverze

236. Válasszuk ki az alábbi függvények közül azokat, amelyeknek van inverzük és adjuk meg az inverz függvényeket.

$f: [-3; 3] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x+5$;

$g: [0; 10] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{5}{2}x-1$;

$h: [-2; 18] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2+1$;

$k: [1; 8] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2-5$.

237. Ábrázoljuk nyíldiagrammal is és koordináta-rendszerben is az f függvényt és az inverzét.

$D_f = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| < 6\}$, $f(x) = \left(x-\frac{1}{4}\right)^2$.

238. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és az inverzüket ugyanabban a koordináta-rendszerben.

a) $D_f = [0; +\infty[$, $f(x) = x^2$;

b) $D_f = [0; 16]$, $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{3}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq 1 \\ -x, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$.

239. Adjuk meg az f függvénynek olyan leszűkítését, amelynek van inverze.

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2-7x-8$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 3x$;

c) $D_f = [-3; 3]$, $f(x) = \sqrt{9-x^2}$;

d) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

e) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$;

f) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = x-[x]$;

g) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 8x-2x^3$;

h) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2-7x+12|$.

240. Ábrázoljuk az inverzükkel közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

a) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$,

$D_g = \mathbf{R}$, $g(x) = 3^x$,

$D_h = \mathbf{R}$, $h(x) = 4^x$;

b) $D_f = \mathbf{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

$D_g = \mathbf{R}$, $g(x) = 3^{-x}$,

$D_h = \mathbf{R}$, $h(x) = 4^{-x}$;

c) $D_f =]0; +\infty[$, $f(x) = \log_2 x$,

$D_g =]0; +\infty[$, $g(x) = \log_3 x$,

$D_h =]0; +\infty[$, $h(x) = \log_4 x$;

d) $D_f =]0; +\infty[$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,

$D_g =]0; +\infty[$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$,

$D_h =]0; +\infty[$, $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

241. Határozzuk meg a következő függvények inverzét, és ábrázoljuk ezeket koordináta-rendszerben.

$D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$,

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$,

$D_h = \mathbf{R}\setminus\{1\}$, $h(x) = \frac{x}{x-1}$,

$D_k = \mathbf{R}$, $k(x) = \sqrt[3]{x+4}$.

242. Adjunk meg néhány olyan $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt, amely azonos az inverzével. Milyen tulajdonságú ponthalmaz e függvények grafikonja?

243. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeknek van inverzük és adjuk meg az inverz függvényeket.

$f(x) = x^3$, $g(x) = (x-1)^3$, $h(x) = (x+2)^3$,

$k(x) = x^3+6x^2+12x$, $l(x) = x^3-3x^2+3x+4$.

21. Exponenciális és logaritmusfüggvények

244. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket közös koordináta-rendszerben.

a) $D_f = D_g = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 4\}$,

$f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

b) $D_f = D_g = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$,

$f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

c) $D_f = D_g = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$,

$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;

d) $D_f = D_g = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3\}$,

$f(x) = 10^x, \quad g(x) = 0{,}1^x.$

245. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az n és az m alapú exponenciális függvényt, ha

a) $n = 2, \quad m = \frac{1}{2}$;

b) $n = 2, \quad m = 4$;

c) $n = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{4}$;

d) $n = \frac{1}{2}, \quad m = 4$.

246. Diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 5^x$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{1}{5}\right)^x$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto -5^x$;

b) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3^x$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto |3^x|$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \to 3^{|x|}$;

c) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 3^x, & \text{ha } x < 0 \\ 3^{-x}, & \text{ha } x \geqq 0 \end{cases}$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3^{-|x|}$;

d) $\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2^x$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2^{x+3}$,

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2^{|x+3|}$.

247. Melyik számot rendeli az $\exp_2$ függvény a következő számokhoz?

a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64;

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$;

c) $-1, -2, -4, -8, -16, -32, -64$;

d) $1, -1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 5, -5, -\frac{1}{5}$.

248. Melyik számokhoz rendeli az $\exp_2$ függvény az alábbi számokat?

a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64;

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$;

c) $-1, -2, -4, -8, -16, -32, -64$;

d) $1, -1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 5, -5, -\frac{1}{5}$.

249. Számítsuk ki az $\exp_{10}$ függvény helyettesítési értékét a 2, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $2^{-1,5}$, 0,413, 1,413, 2,413 helyeken.

250. Tükrözzük a 2 alapú exponenciális függvény grafikonját
a) az abszcisszatengelyre;
b) az ordinátatengelyre;
c) az $y = x$ egyenletű egyenesre;
d) az $y = -x$ egyenletű egyenesre;
e) az origóra.
Írjuk le a kapott grafikonnal megadott függvény menetét!

251. Írjuk le az $f+g$, az $f-g$, az fg és az $\frac{f}{g}$ függvény menetét, ha

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2^x; \qquad g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x.$

252. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{4^x - 4}{2^x + 2}$

függvényt.

253. Írjuk le az

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 3^{2-x}$

függvény menetét! Az $\exp_3$ függvénytől milyen transzformációs lépések vezetnek e függvényhez?

254. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{x-1}$, $\quad x\mapsto 2^{1-x}$;

b) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{-x}$, $\quad x\mapsto 2^{1-x}$;

c) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{x-1}$, $\quad x\mapsto 2^{|x-1|}$;

d) $x\mapsto 2^x$, $\quad x\mapsto 2^{|x|}$, $\quad x\mapsto 2^{|x-1|}$.

255. Ábrázoljuk milliméterpapíron a $\log_2$ és a $\log_{\frac{1}{2}}$ függvényt.

256. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $\exp_2$ és $\log_2$; $\qquad$ *c)* $\exp_{\frac{1}{2}}$ és $\log_{\frac{1}{2}}$;

b) $\exp_3$ és $\log_3$; $\qquad$ *d)* $\exp_{\frac{1}{2}}$ és $-\log_2$.

257. Tükrözzük a 3 alapú logaritmusfüggvény grafikonját az abszcisszatengelyre, az ordinátatengelyre, és írjuk le a kapott függvény menetét.

258. Tükrözzük a 3 alapú logaritmusfüggvény grafikonját a koordinátatengelyek szögfelezőire. Mi a kapott görbék egyenlete? Diszkutáljuk az e görbékkel megadott függvényeket.

259. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket.

a) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$x\mapsto\log_{\frac{1}{2}} x$,
$x\mapsto -\log_2 x$,
$x\mapsto\log_2\dfrac{1}{x}$;

b) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$x\mapsto\log_2 3$,
$x\mapsto\log_2(3x)$,
$x\mapsto\log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$;

c) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$]-3;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2(x+3)$,
$]1;+\infty[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2(x-1)$,
$]-\infty;1[\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2(1-x)$;

d) $]0;+\infty[\to\mathbf{R}$ $\quad x\mapsto\log_2 x$,
$x\mapsto\log_2 x^3$,
$x\mapsto 3\log_2 x$,
$x\mapsto\log_2\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

260. Ábrázoljuk a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán megadott,

$$x\mapsto\log_3 x^4;\quad\text{illetve}\quad x\mapsto 4\log_3 x$$

hozzárendelésű függvényeket.

261. Legyen f értelmezési tartománya a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza és

$$f(x)=\log_2(8x^4)-4\log_2 x.$$

Ábrázoljuk és diszkutáljuk az f függvényt.

262. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a következő függvényt. (Az f értelmezési tartománya legyen az $\mathbf{R}$ lehető legbővebb részhalmaza.)

a) $f(x)=\log_3|x|$; $\qquad$ *e)* $f(x)=|\log_3 x|$;

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}|x|$; $\qquad$ *f)* $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}} x|$;

c) $f(x)=\log_3|x-2|$; $\qquad$ *g)* $f(x)=|\log_3(x-2)|$;

d) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}|x-2|$; $\qquad$ *h)* $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}}(x-2)|$.

263. Vizsgáljuk az $f+g$, az $f-g$ és az fg függvény növekedési viszonyait.

a) $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto x$,
$g\colon\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $\quad x\mapsto\log_2 x$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto -x$,

$g\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2 x$;

c) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x$,

$g\colon \mathbf{R}^-\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2(-x)$;

d) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto -x$,

$g\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$.

264. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendelési szabállyal, az **R** lehető legbővebb részhalmazán megadott függvényeket, és hasonlítsuk össze a grafikonjukat.

$$x \mapsto \log_{\sqrt{2}} x; \quad x \mapsto \log_{\sqrt{2}}(-x), \quad x \mapsto \log_{\sqrt{2}}|x|.$$

Az adott függvények közül melyik leszűkítése valamelyik másiknak?

265. Mi a $h = f\circ g$, a $k = g\circ f$, az $\frac{1}{h}$ és az $\frac{1}{k}$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete, ha $f=\log_2$ és

a) $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto |x|$;

b) $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$;

c) $g\colon (\mathbf{R}\setminus\{0\})\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$;

d) $g\colon [0; +\infty[\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$?

22. Trigonometrikus függvények

266. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket.

a) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$,

$x \mapsto \sin x - 3$,

$x \mapsto \sin(x-3)$,

$x \mapsto 2\sin(x-3)$;

b) $[-\pi; \pi]\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$,

$x \mapsto \sin x + \frac{\pi}{2}$,

$x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$x \mapsto 2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $[0; 2\pi]\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$,

$x \mapsto 2\sin x$,

$x \mapsto \sin(2x)$,

$x \mapsto 2\sin(2x)$;

d) $[-\pi; \pi]\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$,

$x \mapsto \sin 2x$,

$x \mapsto \sin[2(x+1)]$,

$x \mapsto \sin(2x+1)$.

267. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a $\sin\circ f$ és az $f\circ\sin$ függvényt, ha

a) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$;

b) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x+\frac{\pi}{4}$.

268. Toljuk el a sinusfüggvény grafikonját

a) az abszcisszatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;

b) az abszcisszatengely mentén $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$ egységgel;

c) az ordinátatengely mentén 1, 2, 3, -1, -2, -3 egységgel;

d) az (1; 1) vektorral, a (3; 1) vektorral, a $(-2; 3)$ vektorral.

Írjuk fel a grafikonokhoz tartozó függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, hozzárendelési szabályát.

269. Toljuk el a cosinusfüggvény grafikonját

a) az abszcisszatengely mentén 1, 2, 3, −1, −2, −3 egységgel;

b) az abszcisszatengely mentén $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$ egységgel;

c) az ordinátatengely mentén 1, 2, 3, −1, −2, −3 egységgel;

d) az (1; 1) vektorral, a (3; 1) vektorral, a (−2; 3) vektorral.

Írjuk fel a grafikonokhoz tartozó függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, hozzárendelési szabályát.

270. Tükrözzük a sinus- és a cosinusgörbét a koordinátatengelyekre! Mely függvények grafikonját kaptuk meg?

271. Szűkítsük le a sinusfüggvényt egy olyan, π hosszúságú intervallumra, hogy a leszűkítésnek létezzék inverze. Ábrázoljuk ezt az inverz függvényt.

272. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket!

a) $[0; 2\pi] \to \mathbf{R}$

$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos x - 3$,
$x \mapsto \cos(x-3)$,
$x \mapsto 2\cos(x-3)$;

b) $[-\pi; \pi] \to \mathbf{R}$,

$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos x + \frac{\pi}{2}$,
$x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
$x \mapsto 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $[0; 2\pi] \to \mathbf{R}$,

$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto 2\cos x$,
$x \mapsto \cos(2x)$,
$x \mapsto 2\cos(2x)$;

d) $[-\pi; \pi] \to \mathbf{R}$,

$x \mapsto \cos x$,
$x \mapsto \cos 2x$,
$x \mapsto \cos 2(x+1)$,
$x \mapsto \cos(2x+1)$.

273. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a $\cos \circ f$ és az $f \circ \cos$ függvényt, ha

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x$;

b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x+6$.

274. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a $\operatorname{tg} \circ f$ és az $f \circ \operatorname{tg}$ függvényt, ha

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x+2$;

b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x$.

275. Ábrázoljuk az **R** lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendelési szabályokkal megadott függvényeket.

a) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x + 2$, $x \mapsto \operatorname{tg}(x+2)$;

b) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{4}$, $x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto 2\operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{tg}(2x)$;

d) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

276. Ábrázoljuk az **R** lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendelési szabályokkal megadott függvényeket.

a) $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x + 2$, $x \mapsto \operatorname{ctg}(x+2)$;

b) $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x - \frac{\pi}{4}$, $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \mapsto 2\operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg}(2x)$;

d) $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

277. Tükrözzük a tangensgörbét a koordinátatengelyekre. Mely függvények grafikonját kaptuk?

d) $x \mapsto |\cos x| + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

287. Van-e páros vagy páratlan az alábbi függvények között?

$D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\}$,

a) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;

b) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x\,(1 + \sin^2 x)$;

d) $f(x) = \sin x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

288. Melyik a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmaza, amelyen az alábbi hozzárendelési szabállyal függvény adható meg?

a) $x \mapsto \dfrac{\sin |x|}{\cos |x|}$;

b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{4}$;

c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{4}$;

d) $x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$;

e) $x \mapsto \dfrac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \sin x}$;

f) $x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{2 \cos x\,(1 - \operatorname{tg} x)}$;

g) $x \mapsto \sqrt{\lg\,(1 - \cos^2 x)}$;

h) $x \mapsto \sqrt{\log_2 \sin x}$.

289. Mely pontokban metszi egymást az f és a g függvény grafikonja?

a) $D_f = D_g = [0; 2\pi]$, $f(x) = 3 \sin x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

b) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$;

c) $D_f = D_g = [-\pi; \pi]$, $f(x) = \cos 3x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$;

d) $D_f = D_g = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

23. Függvénytranszformációk

290. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 3x$, $x \mapsto 3x - 2$, $x \mapsto 3x + 1$, $x \mapsto 3x + 5$;

b) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 2$, $x \mapsto x^2 + 1$, $x \mapsto x^2 + 5$;

c) $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin x - 2$, $x \mapsto \sin x + 1$, $x \mapsto \sin x + 5$;

d) $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto 3^x - 2$, $x \mapsto 3^x + 1$, $x \mapsto 3^x + 5$.

291. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto 3x$, $x \mapsto 3(x - 2)$, $x \mapsto 3(x + 1)$, $x \mapsto 3(x + 5)$;

b) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto (x - 2)^2$, $x \mapsto (x + 1)^2$, $x \mapsto (x + 5)^2$;

c) $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, $x \mapsto \sin(\pi - x)$;

d) $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto 3^{x-2}$, $x \mapsto 3^{x+1}$, $x \mapsto 3^{x+5}$.

292. Toljuk el az

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ és a $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -x^2$

függvény grafikonját az $\mathbf{a}(3; 0)$; a $\mathbf{b}(0; -2)$; a $\mathbf{c}(4; 4)$; a $\mathbf{d}(3; -2)$ vektorral. Melyik függvények grafikonját rajzoltuk meg?

293. Melyik vektorral toltuk el az

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

függvény grafikonját, ha eredményül az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény grafikonját kaptuk?

a) $f(x) = x^2 - 5$;

b) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$;

c) $f(x) = (x + 2)^2$;

d) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$;

e) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$;

f) $f(x) = x^2 + 4x$;

g) $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

h) $f(x) = x^2 + 12x$.

294. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x \mapsto x$, $\quad x \mapsto 2x$, $\quad x \mapsto 3x$, $\quad x \mapsto 4x$;

b) $x \mapsto -x$, $\quad x \mapsto -2x$, $\quad x \mapsto -3x$, $\quad x \mapsto -4x$;

c) $x \mapsto x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{2}x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{4}x$;

d) $x \mapsto -x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{2}x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{4}x$.

295. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x \mapsto x^2$, $\quad x \mapsto 5x^2$,

$x \mapsto 5(x+2)^2$, $\quad x \mapsto 5(x+2)^2-1$;

b) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\quad x \mapsto 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

$x \mapsto 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, $\quad x \mapsto 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1$;

c) $x \mapsto [x]$, $\quad x \mapsto 5[x]$,

$x \mapsto 5[x+2]$, $\quad x \mapsto 5[x+2]-1$;

d) $x \mapsto \cos x$, $\quad x \mapsto 5\cos x$,

$x \mapsto 5\cos(x+2)$, $\quad x \mapsto 5\cos(x+2)-1$.

296. Ábrázoljuk a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendeléssel jellemzett függvényeket:

a) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x+2$,

$x \mapsto \operatorname{tg} x+1$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg} x-3$;

b) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg}(x+2)$,

$x \mapsto \operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto \operatorname{tg}(x-3)$;

c) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$,

$x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)-3$;

d) $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$,

$x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x+1)-3$.

297. Ábrázoljuk az $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ értelmezési tartományon az alábbi hozzárendelési szabállyal megadott függvényeket a

$$g\colon (\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

függvény transzformálásával:

a) $x \mapsto \frac{1}{x+3}-4$; $\qquad$ *e)* $x \mapsto \frac{4}{x-3}-3$;

b) $x \mapsto \frac{2}{x-5}+1$; $\qquad$ *f)* $x \mapsto \frac{x+5}{x+4}$;

c) $x \mapsto \frac{12}{3x-6}$; $\qquad$ *g)* $x \mapsto \frac{4x+1}{x-3}$;

d) $x \mapsto \frac{x^2-5x}{x^3-5x^2}+2$; $\qquad$ *h)* $x \mapsto \frac{2x+1}{6-3x}$.

298. Ábrázoljuk az f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt a g, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény transzformálásával. Írjuk fel az f értékkészletét.

a) $f(x) = 3-2|x+4|$, $\qquad g(x) = |x|$;

b) $f(x) = \frac{2}{3}|3x+1|-4$, $\qquad g(x) = |x|$;

c) $f(x) = -3(x-5)^2+1$, $\qquad g(x) = x^2$;

d) $f(x)=\frac{5}{2}(3-4x)^2-7,\quad g(x)=x^2;$

e) $f(x)=[3+x]+2,\quad g(x)=[x];$

f) $f(x)=12-3[2x+4],\quad g(x)=[x];$

g) $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4,\quad g(x)=\cos x;$

h) $f(x)=1-3\cos(2x-\pi),\quad g(x)=\cos x.$

***299.** Ábrázoljuk függvénytranszformáció felhasználásával az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényeket:

a) $x\mapsto 2\sin\left(\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)+1;$

b) $x\mapsto \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)-3;$

c) $x\mapsto \frac{1}{4}\sin\left(-\frac{3}{5}x-\frac{\pi}{2}\right)+2;$

d) $x\mapsto \frac{5}{7}\left[\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{2\pi}{3}\right)-1\right].$

***300.** Ábrázoljuk a tangensfüggvény transzformálásával az **R** lehető legtágabb részhalmazán az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket.

a) $x\mapsto \mathrm{tg}\,(2x),\quad x\mapsto \mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right),\quad x\mapsto \mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+3;$

b) $x\mapsto -\mathrm{tg}\,x,\quad x\mapsto -\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\quad x\mapsto 1-\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right);$

c) $x\mapsto \frac{1}{3}\mathrm{tg}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)+1;$

d) $x\mapsto -\frac{3}{4}\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+4x\right)-4.$

24. Periodikus függvények

301. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvények periodikusak, és határozzuk meg a periódusukat.

a) $x\mapsto\sin(2x);$

b) $x\mapsto\sin(3x);$

c) $x\mapsto\sin(4x);$

d) $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{5}\right);$

e) $x\mapsto\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right);$

f) $x\mapsto\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right);$

g) $x\mapsto\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$

h) $x\mapsto\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right).$

302. A következő függvények közül melyik periodikus és melyik nem?

a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto |x|;$

b) $(\mathbf{R}\setminus\{0\})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \frac{|x|}{x};$

c) $]0;+\infty[\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \frac{|x|}{x};$

d) $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})\to\mathbf{R},\quad x\mapsto [x]-x;$

e) $[-5;+\infty[\to\mathbf{R},\quad x\mapsto -10;$

f) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \frac{\sin x}{\mathrm{tg}\,x};$

g) $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \frac{\sin x}{|\mathrm{tg}\,x|};$

h) $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\to\mathbf{R},\quad x\mapsto \frac{\mathrm{tg}\,x}{|\mathrm{tg}\,x|}.$

303. Állapítsuk meg, hogy a **302.** feladatban megadott periodikus függvények közül melyiknek van periódusa. Adjuk meg e függvények periódusát is.

304. Igazak-e a következő állítások:

a) Az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \cos x - 2\sin 3x$ függvény periodikus, a periódusa 2π;

b) az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto (x+3)^2-1$ függvény periodikus, a periódusa 3;

c) az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto 2(x-[x])$ függvény periodikus, a periódusa 1;

d) az $\left(\mathbf{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4};\ k\in\mathbf{Z}\right\}\right)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}$ függvény periodikus, a periódusa $\frac{\pi}{2}$.

***305.** Adjunk meg az alábbi hozzárendelési szabállyal két alkalmasan megválasztott értelmezési tartományon periodikus függvényt és állapítsuk meg a periódusát.

a) $x \mapsto 5\sin 3x$;

b) $x \mapsto \sin^2 x$;

c) $x \mapsto \sin\sqrt{x}$;

d) $x \mapsto \sqrt{\sin x}$;

e) $x \mapsto 3\sin x - 2\cos x$;

f) $x \mapsto \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin 3x}$;

g) $x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}\right)$;

h) $x \mapsto \operatorname{ctg}(3x-4)$.

306. Válasszuk ki az alábbi függvények közül a periodikusokat, és határozzuk meg ezek periódusát.

a) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x - 3$,
$x \mapsto \sin(x-3)$,
$x \mapsto 3\sin x$,
$x \mapsto \sin(3x)$;

b) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto x+\sin x$,
$x \mapsto x\sin x$,
$x \mapsto \sin x^2$,
$x \mapsto \sin^2 x$;

c) $(\mathbf{R}\setminus\{\pi+2k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

d) $(\mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;

e) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$,
$x \mapsto \cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$,
$x \mapsto 5\cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{4}\right)$,
$x \mapsto 5\cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{4}\right)-2$;

f) $(\mathbf{R}\setminus\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\})\to\mathbf{R}$, $x \mapsto \lg x^2$,
$x \mapsto \lg\sin^2 x$,
$x \mapsto 5\lg\sin^2 x$,
$x \mapsto 5\lg\sin^2(x-\pi)$.

25. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

307. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket.

a) $2x+5 = x-1$;

b) $(x+4)\cdot 2 = 3-x$;

c) $5x-1 = x+1$;

d) $\dfrac{3x-2}{4} = 2x+3$;

e) $\dfrac{2}{3}x+1 = 4-\dfrac{1}{2}x$;

f) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{x+2}{5}$;

g) $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{5-x}{3}$;

h) $\dfrac{3-x}{2} = \dfrac{x+4}{5}$.

308. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $2x+5 > x-1$;

b) $(x+4)\cdot 2 \leqq 3-x$;

c) $5x-1 < x+1$;

d) $\frac{3x-2}{4} \geqq 2x+3$;

e) $\frac{2}{3}x+1 \leqq 4-\frac{1}{2}x$;

f) $\frac{x+4}{3} > \frac{x+2}{5}$;

g) $\frac{2x}{4} < \frac{5-x}{3}$;

h) $\frac{3-x}{2} \geqq \frac{x+4}{5}$.

309. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

a) $|x|+x = 1+2x$;

b) $|x|+x = x+2$;

c) $|x|+x = x-2$;

d) $|x|+x = 3x+1$;

e) $|x|-x = 2x-\frac{1}{4}$;

f) $|x|-x = 8$;

g) $|x|-x = -\frac{x+1}{2}$;

h) $|x|-x = 5-2x$.

310. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $|x|+x \geqq 1+2x$, $\quad |x|+x < 1+2x$;

b) $|x|+x > x+2$, $\quad |x|+x \leqq x+2$;

c) $|x|+x > x-2$, $\quad |x|+x < x-2$;

d) $|x|+x \geqq 3x+1$, $\quad |x|+x \leqq 3x+1$;

e) $|x|-x > 2x-\frac{1}{4}$, $\quad |x|-x < 2x-\frac{1}{4}$;

f) $|x|-x \geqq 8$, $\quad |x|-x \leqq 8$;

g) $|x|-x > -\frac{x+1}{2}$, $\quad |x|-x < -\frac{x+1}{2}$;

h) $|x|-x \geqq 5-2x$, $\quad |x|-x < 5-2x$.

311. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x-1|-3 = \frac{2-x}{6}$, $\quad |x-1|-3 < \frac{2-x}{6}$;

b) $|x-1|-3 = 2-|x|$, $\quad |x-1|-3 > 2-|x|$;

c) $|x-1|-3 = 1-|4x|$, $\quad |x-1|-3 \leqq 1-|4x|$;

d) $|x-1|-3 = 3-|x-1|$, $\quad |x-1|-3 \geqq 3-|x-1|$.

312. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x| = |x-3|$, $\quad |x| < |x-3|$;

b) $\left|\frac{2}{3}x\right| = |x-3|$, $\quad \left|\frac{2}{3}x\right| < |x-3|$;

c) $3-|x| = |x-3|$, $\quad 3-|x| \leqq |x-3|$;

d) $4-|x| = |x-3|$, $\quad 4-|x| \leqq |x-3|$.

313. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $|x+4| = 5-|x-1|$, $\quad |x+4| < 5-|x-1|$;

b) $|x-2| = 3-|x+1|$, $\quad |x-2| > 3-|x+1|$;

c) $|x+3| = 4+|x+2|$, $\quad |x+3| \leqq 4+|x+2|$;

d) $|x-1| = 2+|x+2|$, $\quad |x-1| \geqq 2+|x+2|$.

314. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket.

a) $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{3}$ $\quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\})$;

b) $\dfrac{2}{x+3} < 4 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\});$

c) $\dfrac{4}{x-1} > 3x+1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\});$

d) $\dfrac{6}{x+1} < 2-x \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\});$

e) $\dfrac{x-1}{x-2} < 1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\});$

f) $\dfrac{x+3}{x+1} \geqq x \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\});$

g) $\dfrac{x}{2-x} < x+1 \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{2\});$

h) $\dfrac{1-2x}{3x+4} > \dfrac{1}{2}x-1 \qquad \left(x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\right).$

315. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 = x+6, \qquad x^2 \leqq x+6;$

b) $3x^2-x+3 = 0, \qquad 3x^2-x+3 > 0;$

c) $x^2+|x|-2 = 0, \qquad x^2+|x|-2 \leqq 0;$

d) $x^2=|x|, \qquad x^2<|x|;$

e) $x^2=x^3, \qquad x^2>x^3;$

f) $x^4=x^2, \qquad x^4 \geqq x^2;$

g) $x^3 = 1-x, \qquad x^3 < 1-x;$

h) $x^4+x^2 = 2x-1, \qquad x^4+x^2 < 2x-1.$

316. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket:

a) $\sin x = x, \qquad \sin x > x;$

b) $\cos x = x, \qquad \cos x > x;$

c) $\sin x = \cos x, \qquad \sin x > \cos x;$

d) $\sin x + \cos x = 1, \qquad \sin x + \cos x > 1;$

e) $\sin x - \cos x = 1, \qquad \sin x - \cos x > 1;$

f) $2\cos x = \sin x, \qquad 2\cos x > \sin x;$

g) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) > \cos x;$

h) $1+\sin x = \cos x, \qquad 1+\sin x > \cos x.$

317. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $2^x \leqq 1, \qquad 2^x \leqq x+1, \qquad 2^x \leqq x-1;$

b) $2^x > x^2, \qquad 2^x > -x^2, \qquad 2^x > 1-x^2;$

c) $\log_2 x > 1, \quad \log_2 x > 1-x, \quad \log_2 x > 2-x \quad (x \in \mathbf{R}^+);$

d) $\log_{0,5} x > 1, \log_{0,5} x > 1-x, \log_{0,5} x > 2-x \quad (x \in \mathbf{R}^+).$

318. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} x+y &> 10 \\ y &< 15 \end{aligned}\right\};$

b) $\left.\begin{aligned} 0 < x+y &< 10 \\ 0 < y &< 15 \end{aligned}\right\};$

c) $\left.\begin{aligned} y &< x+3 \\ x+y &> 0 \end{aligned}\right\};$

d) $\left.\begin{aligned} x-3 < y &< x+3 \\ -x < y &< 5-x \end{aligned}\right\};$

e) $\left.\begin{aligned} x+y &< 7 \\ xy &> 10 \end{aligned}\right\};$

f) $\left.\begin{aligned} x+y^2 &< 6 \\ x^2+y &< 10 \end{aligned}\right\};$

g) $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &\leqq 13 \\ xy &> -6 \end{aligned}\right\};$

h) $\left.\begin{aligned} x^2-x+y &< 4 \\ 2x-y^2 &> 0 \end{aligned}\right\}.$

26. Szélsőérték-feladatok

319. Van-e legkisebb vagy legnagyobb területű a 2 m kerületű téglalapok között?

320. Van-e legkisebb vagy legnagyobb kerületű a 12 dm^2 területű téglalapok között?

321. Vizsgáljuk a 10 cm sugarú körbe írt téglalapokat. Közülük melyiknek

a) legnagyobb a területe;
b) legnagyobb a kerülete;
c) legkisebb a területe;
d) legkisebb a kerülete?

322. Vizsgáljuk a 10 cm sugarú kör köré írt rombuszokat. Közülük melyiknek

a) legnagyobb a területe;
b) legnagyobb a kerülete;
c) legkisebb a területe;
d) legkisebb a kerülete?

323. Bontsunk fel egy 12 cm hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy maximális, illetve minimális legyen:

a) a részek hosszúságának a szorzata;
b) a részek fölé rajzolt négyzetek területének az összege;
c) a részek fölé rajzolt négyzetek területének a különbsége;
d) a részek fölé rajzolt négyzetek kerületének az összege;
e) a részek fölé rajzolt félkörök területének az összege;
f) a részek fölé rajzolt félkörök kerületének az összege;
g) a részek fölé rajzolt szabályos háromszögek területének az összege;
h) a részek fölé rajzolt szabályos háromszögek kerületének az összege.

324. Bontsuk fel a k számot két összeadandóra úgy, hogy a tagok négyzetének az összege maximális, illetve minimális legyen.

a) $k=10$; *c)* $k=0$;
b) $k=24$; *d)* $k=-25$.

325. Hogyan válasszuk meg valamely 1 ha területű, téglalap alakú ültetvény méreteit, ha azt kívánjuk, hogy a bekerítéshez a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség és

a) a területnek nincs természetes határa;
b) a területnek egy természetes határa van;
c) a területnek két természetes határa van?

(A természetes határ helyettesíti a kerítést.)

326. 3 m hosszúságú, 60 cm szélességű bádoglapból vályút készítünk úgy, hogy a két szélét felhajtjuk. Milyen szélesre válasszuk a felhajtott részt, hogy a vályú keresztmetszete a lehető legnagyobb legyen, ha a felhajtott és a megmaradó rész szöge mindkét oldalon *a)* 90°; *b)* 120°; *c)* 150°?

327. Van-e az adott kerületű téglalap átlójának maximális és minimális értéke? Ha van, határozzuk meg.

***328.** Határozzuk meg az adott kerületű derékszögű háromszög átfogójának a minimális értékét! Létezik-e az átfogónak maximális értéke?

329. Mekkora a 10 cm sugarú gömbbe írt maximális palástú forgáshenger sugara és magassága?

330. Határozzuk meg az $x+\frac{1}{x}$ szám

a) minimumát, ha az x pozitív szám;
b) maximumát, ha az x negatív szám.

331. Egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogóinak hossza a, illetve b. Mennyi az a^6+b^6 minimális és maximális értéke?

27. Vegyes feladatok

332. Tükrözzük az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 3x-4$ függvény grafikonját

a) az abszcisszatengelyre;
b) az ordinátatengelyre;
c) az $y=x$ egyenletű egyenesre;
d) az $y=-x$ egyenletű egyenesre.

Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

333. Transzformáljuk az origóból 2 arányú középpontos hasonlósággal az f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény grafikonját! Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

a) $f(x) = \frac{2}{3}x+1$; *e)* $f(x) = |x|$;

b) $f(x) = x^2$; *f)* $f(x) = \sqrt{|x|}$;

c) $f(x) = 5-x^2$; *g)* $f(x) = x^2-16$;

d) $f(x) = x^2-6x$; *h)* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16-x^2}, & \text{ha } |x| \leq 4 \\ x^2-16, & \text{ha } |x| > 4 \end{cases}$.

334. Transzformáljuk a $P(10; 4)$ pontból $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal az f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény grafikonját. Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

a) $f(x) = 1-x$; *e)* $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x-1$; *f)* $f(x) = 4-x^2$;

c) $f(x) = |x|$; *g)* $f(x) = 4(x-10)^2$;

d) $f(x) = 4-|x-10|$; *h)* $f(x) = \begin{cases} 4-\sqrt{20x-x^2}, & \text{ha } x \in [0; 20]; \\ 4, & \text{ha } x \notin [0; 20]. \end{cases}$

***335.** Melyik az az elsőfokú f, $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre minden valós x esetén

a) $f(x)+f(x+1) = 2x+4$; *c)* $f(x+1)-f(x-1) = 6$;

b) $f(x)+f(x+2) = 10x$; *d)* $f(2x)+f(x+1) = 12x+4$?

336. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az

$$f: (\mathbf{R}\setminus\{-1\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x+\frac{x+1}{|x+1|}$$

függvényt!

337. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto 2|x-3|-|x+1|+0{,}5|x-2|$;

b) $x \mapsto |x+1|+|x-2|-3|x|$;

c) $x \mapsto \sqrt{(x-3)^2}+x-3$;

d) $x \mapsto \sqrt{x^4}-2x\sqrt{x^2}+1$.

338. Milyen kapcsolat van az alábbi függvények grafikonja között?

$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2+4,$

$g: (\mathbf{R}\setminus\{0\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3+4x}{x},$

$h: (\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4-16}{x^2-4}.$

339. Adjunk meg olyan halmazt, amelyen az $x \mapsto 9x-x^3$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény

a) korlátos;
b) nem korlátos;
c) páros;
d) páratlan;
e) sem nem páros, sem nem páratlan;
f) páros is és páratlan is;
g) két zérushelye van;
h) van maximuma is és minimuma is.

340. Értelmezzünk függvényt a valós számok halmazának a lehető legbővebb részhalmazán az alábbi hozzárendelési szabályokkal.

$$x \mapsto 2x-5, \quad x \mapsto \sqrt{(2x-5)^2}, \quad x \mapsto (\sqrt{2x-5})^2.$$

Milyen kapcsolat van e három függvény között?

341. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt.

a) $x \mapsto (x-5)+\sqrt{(x-5)^2}$;

b) $x \mapsto (x-5)-\sqrt{(x-5)^2}$;

c) $x \mapsto (\sqrt{x^2}-1)(\sqrt{x^2}+1)$;

d) $x \mapsto (\sqrt{x^2}-1)(x+1)$.

342. Ábrázoljuk és diszkutáljuk az alábbi függvényeket:

a) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = x+\dfrac{1}{x}$;

b) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{10}{x^2+1}$;

c) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

d) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) = x+\dfrac{1}{x^2}$;

e) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

f) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3-2}{x+1}$;

g) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

h) $D_f=[-5;5]$, $\quad f(x) = \dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

343. Ábrázoljuk azonos koordináta-rendszerben a következő három $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, és állapítsuk meg a grafikonok közötti kapcsolatot.

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 2x-1, \quad h(x) = x+[x].$$

344. Értelmezzük az f és a g függvényt az alábbi hozzárendelési szabályokkal az $\mathbf{R}$ lehető legbővebb részhalmazán. Egyenlő-e az f és a g függvény vagy nem?

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad g(x) = \sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}$;

b) $f(x) = \lg(x^2)$, $\quad g(x) = 2\lg x$;

c) $f(x) = \sqrt{(1-3x)^2}$, $\quad g(x) = 1-3x$;

d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3-x^2}$, $\quad g(x) = \dfrac{3x}{x^2-x}$;

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$, $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5-x^6}$, $\quad g(x) = x\sqrt[3]{x^2-x^3}$;

g) $f(x) = x$, $\quad g(x) = 10^{\lg x}$;

h) $f(x) = \lg(x^2-6x+10)^4$, $\quad g(x) = 4\lg(x^2-6x+10)$.

345. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket és írjuk le a növekedési viszonyaikat (a [...] az egészrészt jelzi).

a) $x \mapsto \dfrac{x}{\operatorname{sgn}(x^2+2)}$;

b) $x \mapsto x(1+\operatorname{sgn} x)$;

c) $x \mapsto \dfrac{x}{2+\operatorname{sgn} x}$;

d) $x \mapsto (1+\operatorname{sgn}\sin x)\sin x$;

e) $x \mapsto [\operatorname{sgn} x]$;

f) $x \mapsto \operatorname{sgn}[x]$;

g) $x \mapsto [\sin x]$;

h) $x \mapsto [2\sin x]$.

***346.** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket:

a) $\left|\,||x|-1|-2\,\right| = \dfrac{x+6}{4}$;

b) $\left|1+\left|\dfrac{x-4}{5}\right|-x\right| = 3$;

c) $[|x-3|-2] = 2-2x$; (a [...] az egészrészt jelzi);

d) $[\sqrt{x^2+14x+49}-2]+\dfrac{2x+9}{2} = 0$ (a [...] az egészrészt jelzi).

***347.** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\left|||x|-1|-2\right| < \dfrac{x+6}{4}$;

b) $\left|1+\left|\dfrac{x-4}{5}\right|-x\right| \geqq 3$;

c) $[|x-3|-2] > 2-2x$; (a [...] az egészrészt jelzi);

d) $[\sqrt{x^2+14x+49}-2]+\dfrac{2x+9}{2} \leqq 0$ (a [...] az egészrészt jelzi).

348. Oldjuk meg grafikusan a

$$\operatorname{sgn}\left(1-\frac{3}{x-2}\right) = |x+3|-2 \qquad (x \neq 2)$$

egyenletet.

349. Igazoljuk, hogy ha

$$f\colon (\mathbf{R} \setminus]-2;2[) \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2-4},$$
$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2+4}$$

és $a \in [1;+\infty[$, akkor $f\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+g\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = 2a$.

***350.** Ábrázoljuk az

$$f\colon ([-2;5] \setminus [0;1[) \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{|[x]|}$$

függvényt. Mekkora lehet annak az egyenesnek a meredeksége, amely illeszkedik a koordináta-rendszer $P(0;2)$ pontjára és két pontban metszi az f függvény grafikonját?

***351.** Van-e olyan $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amely minden valós értéket pontosan két helyen vesz fel?

***352.** Melyik az az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $f(1)=0$ és minden $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ esetén

$$|f(a)-f(b)| = a-b?$$

353. Oldjuk meg grafikusan az **N** halmazon a

$$7[\sqrt{x}]+1 = x$$

egyenletet! (A [...] az egészrészt jelzi.)

354. Mennyi az együtthatók összege az alábbi kifejezés polinomalakjában?

a) $(3a^2-5a+6)^2$;

b) $(a-2)^7$;

c) $(4a^4-3a^3+2a^2-a+10)^2$;

d) $(3a^6+5a^5-6a^4+a^3-3a^2+4a-5)^{1000}$.

355. Bontsuk fel az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt egy páros és egy páratlan függvény összegére.

a) $x \mapsto 5x^6-3x^4+2x^3-x+7$;

b) $x \mapsto \sin^2 x+3\cos x-5x+1$;

c) $x \mapsto 2^x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+3\cos x$;

d) $x \mapsto 5-\cos^3 x$.

356. Írjuk fel az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto 2x^2+5x-3$$

függvényt két, szigorúan monoton növekedő függvény különbségeként.

***357.** Valamely $f\colon \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$ függvényre

$$f(2^k) = 2^{k+1}-1 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

és

$$f(f(n)) = 4n-3 \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$

Mennyi az $f(1985)$?

***358.** Valamely $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ függvényre $f(1)=1$ és minden $a \in \mathbf{Z}$ és $b \in \mathbf{Z}$ esetén

$$f(a-b^2) = f(a)+(b^2-2a)f(b).$$

Mennyi az $f(1987)$?

***359.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto ax+b \quad (a \neq 0),$$

akkor nem lehet az $|f(0)-1|$, az $|f(1)-3|$ és az $|f(2)-9|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

***360.** Van-e olyan $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

a) $f(f(n)) = n$;

b) $f(f(n)) = n+1$;

c) $f(f(n)) = n+2$;

d) $f(f(n)) = 2n$;

e) $f(f(n)) = 4n$;

f) $f(f(n)) = n^4$?

II. FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA, HATÁRÉRTÉKE, DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA

1. Folytonos és szakadásos függvények

1. Folytonos-e az f függvény a -2 helyen?

a) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2}$;

b) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$, ha $x \neq -2$; $f(-2) = 0$;

c) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+2}$;

d) $D_f=\mathbf{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+3}$, ha $x \neq -3$; $f(-3) = 10$.

2. Hol folytonos és hol szakadásos az egészrész-, illetve a törtrész-függvény?

3. Hol folytonosak és hol szakadásosak az alábbi $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények?

a) $x \mapsto x+[x]$;

b) $x \mapsto [x]+[-x]$;

c) $x \mapsto [x]+\sqrt{x-[x]}$;

d) $x \mapsto [x] \cdot (x-[x])$.