Problémások

Feladatok a teljes indukció módszerére

2020. március 23.

1. Feladat - Bernoulli-egyenlőtlenség

Ha $a \in \mathbb{R}$ és $a > -1$, valamint $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Ezt hívják **Bernoulli-egyenlőtlenség**nek.

Bizonyítás: Bizonyítás teljes indukcióval.

1. Megnézem, hogy $n = 1$-re igaz-e.

$$(1+a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz:

$$(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a$$

3. Ekkor belátom, *kedves barátom*, hogy $n = k+1$-re is igaz.

$$(1+a)^{(k+1)} \geq 1 + (k+1) \cdot a$$

A baloldalt átalakítva, majd az indukciós feltételt beírva:

$$(1+a)^{(k+1)} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) = 1+ka+a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$$

■

2. Feladatok

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
2. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) =?$

4. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

5. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

6. $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$

7. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} =?$

8. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

9. $\left(1 - \dfrac{4}{9}\right)\left(1 - \dfrac{4}{16}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{4}{n^2}\right) =?$

10. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots \dfrac{n-1}{n!} =?$

11. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots \dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{n}{2}$