

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \sin x - 2 \sin^2 x = \cos^2 x$

b) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$

2. Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2 -nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben? Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg!

3. Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő!

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása!

4. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$.

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészen kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen!

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

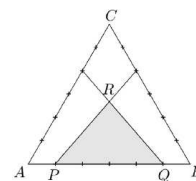
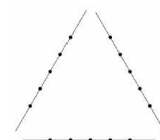
b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt?

6. Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.

a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül?

Az egyenlő oldalú ABC háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget.

b) Számítsa ki a PQR háromszög területének pontos értékét!

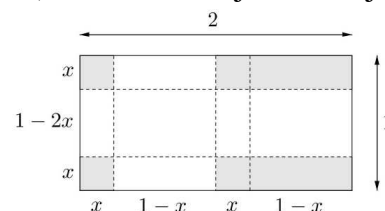


7. Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglalatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter \times 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagvesztéssel.)

a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen?

Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).



b) Hány különböző kód lehetséges?

8. a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja!

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

III. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F . Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

9. Éva egy 7×7 -es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe a 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta?

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz!

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz!

		91				
				11		

Pontszámok:

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9a	9b	9c
5	7	6	5	8	6	4	5	5	5	11	6	10	11	5	8	8	5	6	5