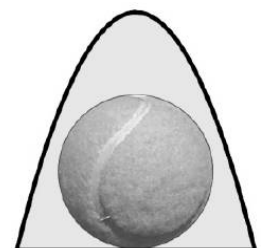


I.

1. Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.
- a) Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva?
- A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a $12\,400 \text{ m}^2$ területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2 -ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe $12\,270 \text{ m}^2$ lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.
- b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a $12\,400 \text{ m}^2$ -es olajfolt teljes eltávolítása?
2. A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.
- a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz!
- A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya 2, a területe pedig éppen 1 m^2 .
- b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve!
- Ha az A0-s papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Ha az A1-es papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A2-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os”. A „80 g-os” jelzés azt jelenti, hogy 1 m^2 területű másolópapír tömege 80 gramm.
- c) Egy csomagban 500 darab A4-es, „80 g-os” papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g ?
3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!
- a)
$$\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$$
4. Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszélet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszéletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2,6y = 0$.
- a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszélet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!
- A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)



- b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egyik az A futószalagra kerül, a másik a B futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az A futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g és 46 g.

- a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik!

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30° -os szöveget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

- b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát!

6. A H halmaz a nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.*

- a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

- b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Az $ABCDE$ konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

- c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezzük zöldre. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

- d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!

7. Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

- a) Igazolja, hogy $x = -15$ -ben abszolút minimuma, $x = 0$ -ban lokális maximuma, $x = 9$ -ben lokális minimuma van a függvénynek!

- b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

- c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x) dx$ határozott integrál értékét!

8. Dani sportlövészedszere jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

- a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

- b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

- c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

9. Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül

kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával.

Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$!

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes!

Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 6$ cm, $b = 8$ cm és $c = 10$ cm. Megrajzoljuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsa ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól!

Pontszámok:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1a | 1b | 2a | 2b | 2c | 3a | 3b | 4a | 4b | 5a | 5b | 6a | 6b | 6c | 6d | 7a | 7b | 7c | 8a | 8b | 8c | 9a | 9b | 9c |
| 4 | 6 | 4 | 4 | 5 | 7 | 7 | 8 | 6 | 5 | 11 | 3 | 3 | 5 | 5 | 9 | 4 | 3 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 7 |