

I.

1. Legyen az x pozitív valós szám.

- a) Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!
- b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás! Válaszát indokolja!
Ha $x > 27$, akkor a 27-nek és az x -nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél.
- c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

2. Ádámék kerti zuhanyozójának tartálya egy feketére festett, forgáshenger alakú, acéllemezből készült hordó. A henger átmérője 50 cm, magassága 80 cm.

- a) Számítsa ki a hordó térfogatát és felszínét! (A lemez vastagsága a hordó méreteihez viszonyítva elhanyagolható.) A térfogatot egész literre, a felszínt egész négyzetdeciméterre kerekítve adja meg!

A megadott méretű hordót úgy szerelik fel, hogy a forgástengelye vízszintes legyen. Ebben a helyzetben – a beömlő nyílás miatt – csak 40 cm magasságig lehet feltölteni vízzel.

- b) A teljes térfogatának hány százalékáig tölthető fel a vízszintes tengelyű tartály?



3. Egy kisváros vasútállomásáról munkanapokon 16 vonat indul, ezek indulási időpontjáról kimutatást vezetnek. A mellékelt táblázat ezt mutatja egy adott munkanap esetében. A vasútállomás pontosságra vonatkozó előírása szerint munkanapokon a vonatok legalább egyharmadának pontosan kell indulnia az állomásról, továbbá a késéseknek sem az átlaga, sem a mediánja nem haladhatja meg a 3 percet.

- a) Legfeljebb hány perc késéssel indulhat a választott munkanapon az utolsó két vonat, hogy mindegyik előírás teljesüljön?
(A késéseket egész percekben mérik, a pontos indulást 0 perces késésnek számítják, a vonatok a menetrendben előírt indulási időpontjuknál korábban nem indulhatnak el.)

Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett.

- b) Határozza meg p értékét!

4. Egy kis boltban három különböző ízesítésű csokoládé kapható: epres, málnás és narancsos.

- a) Ha összesen öt tábla csokoládét akarunk ebben a boltban vásárolni, és csak az ízesítéseket vesszük figyelembe, akkor hány különböző lehetőségünk van?

A Finom csokoládé csomagolásán az áll, hogy a tömege 100 g. A gyártó cég a saját megbízhatóságát így reklámozza: 99,9% annak a valószínűsége, hogy egy csokoládészelet tömege legalább 100 gramm.

- b) Ha a reklám állítása igaz, akkor legalább hány szelet Finom csokoládét kell (véletlenszerűen) vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 0,05 valószínűséggel legyen közöttük 100 grammnál kisebb tömegű is?

(Számításaiban a vásárlást modellezze visszatevéses mintavétellel!)

Indulás időpontja		
menetrend szerint	ténylegesen	késés (perc)
6:10	6:10	0
6:32	6:33	1
8:10	8:10	0
8:32	8:38	6
10:10	10:15	5
10:32	10:37	5
12:10	12:10	0
12:32	12:35	3
14:10	14:14	4
14:32	14:40	8
16:10	16:17	7
16:32	16:32	0
18:10	18:14	4
18:32	18:32	0
20:10		
20:32		

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát egyértelműen jelölje meg!

5. a) Adja meg az $5x^2 + 5y^2 - 14x + 22y - 11 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(-5; 7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(-4; 14)$ pont.

- b) Írja fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!
 c) Határozza meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

A koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontját rácspontnak nevezzük, ha x és y egész számok.

- d) Hány rácsponton megy át a k körvonal?

6. A 11. b osztály a következő tanévre nyolc kötelező olvasmányt kapott. Ezek közül kettő ugyanannak a szerzőnek a munkája, a többi szerzőnek csak egy-egy könyve van az olvasmányok között. Andi még nyáron szeretne elolvasni a nyolc könyv közül hármat. A nyarat a nagyszüleinél tölti, ezért a kiválasztott három könyvet magával viszi.

- a) Hányféleképpen választhatja ki Andi, hogy melyik három könyvet vigye magával, ha azt szeretné, hogy a három könyv három különböző szerző műve legyen?

Az osztály tanulói közül hatan: Andi, Barbara, Csilla, Dani, Elek és Feri moziba mennek.

- b) Hányféleképpen ülhetnek le hat egymás melletti székre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellett?

Három lány és n fiú véletlenszerű elrendezésben leül egy sorba.

- c) Határozza meg n értékét, ha $\frac{1}{26}$ annak a valószínűsége, hogy a három lány egymás mellett ül!

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2.$$

- a) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) + g(x)| \geq 8$ egyenlőtlenséget!

- b) Igazolja, hogy a $[2; 8]$ intervallumon az f és a g függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

- c) Határozza meg azt a t valós számot a $[2; 8]$ intervallumban, amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon.

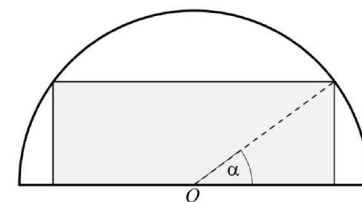
(Egy $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon megegyezik az x tengely, az $x = a$, az $x = b$ egyenletű egyenesek és a függvény grafikonja által meghatározott síkidom területével.)

8. Egy színházban a jegyek az I., a II. vagy a III. árkategóriába tartoznak. Az egyik esti előadásra összesen 200 jegyet adtak el. Az eladott jegyek között a III. árkategóriájúak száma a másik két árkategóriába tartozó jegyek együttes számának kétharmada, az I., illetve II. árkategóriájú jegyek számának aránya pedig 9:11 volt.

- a) Hány jegyet adtak el az egyes árkategóriákban?

Egy várrom területén szabadtéri színházat alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: O a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög

pedig α ; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.)



- b) Hogyan kell megválasztani az α szöveget, hogy a színpad területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a legnagyobb terület?

9. a) Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5. Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa 2. Az 1000-nél kisebb pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy olyan számot választottunk, amely tagja valamelyik sorozatnak?

Válaszát $\frac{p}{q}$ alakban adja meg úgy, hogy p és q pozitív egészek és relatív prímek legyenek!

- b) Három teljes gráf pontjainak száma egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja!

(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

Pontszámok:

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	9a	9b
6	3	3	4	10	7	7	5	6	3	3	5	5	4	4	8	4	5	7	6	10	9	7