

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

(a) $\sqrt{-2x+6} = x+1$

(b) $2\log_4 x^2 + 3\log_4 x^3 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $\angle BAD = \angle BCD = 100,3^\circ$.

(a) Számítsa ki a négyszög területét!

Az $ABCD$ konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.)

(b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk?

3. Van egy részvénytársaságunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131 400 Ft. Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140 400 Ft-ra növekedne.

(a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból?

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.

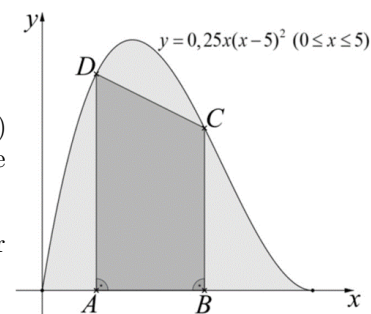
(b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

4. Adott az $x = 0,25x(x-5)^2$ ($0 \leq x \leq 5$) egyenletű görbe.

(a) Igazolja, hogy az origó és az $(5; 0)$ pont is rajta van a görbén!

Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1; 0)$, illetve a $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0; 5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

(b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznek is pontja lesz?



II.

5. (a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

$Az x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

(b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

$Az f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \frac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ intervallum.

(c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz?

6. Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálójája (ismeretségi gráfja).

(Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálójája akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.)

A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A -nak 5, B -nek 4, C -nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

(a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálójája?

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

(b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálójája?

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen.

(c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?

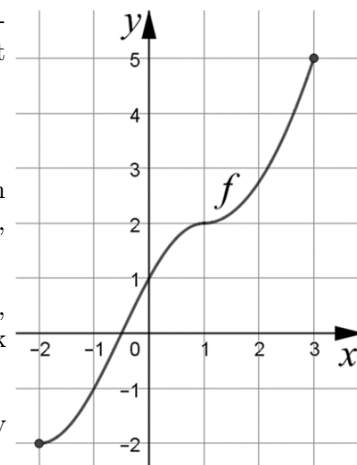
7. Egy nyolcfős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kíséreltek meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7.

(a) Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását!

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45° -os szögre törekszik a dobás indításánál.

(b) Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0; 2)$ és a $Q(4, 6; 3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45° ! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg!

Az ábrán a $[-2; 3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható.



(c) Adja meg az f **inverzfüggvényének** értelmezési tartományát, értékészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából!

8. Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n -szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbb{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

(a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!

(b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50 000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50 000 Ft-osból.

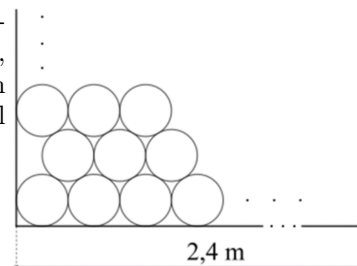
(c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét!

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50 000
nyeremény valószínűsége	0,95		

9. Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.

(a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni!

(b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak?



Kiderült, hogy a fák egy részében megtelepedtek a szűbogarak. Bármelyik fát kiválasztva 4% annak a valószínűsége, hogy van benne szű. Az egyik vásárló cég 50 fát vett.

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy szűrágta fa kerül a rakományába?

1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
5	6	9	6	6	7	2	10	6	5	5	3	9	4	4	8	4	3	9	4	8	4	4