



# Oktatási Hivatal

---

**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
2012-2013. tanévi első fordulójának feladatai  
matematikából, a II. kategória számára**

1. Mely  $x$  és  $y$  valós számok elégítik ki a  $\sqrt{x} = 2 - y$ ,  $\sqrt{y} = x - 2$  egyenletrendszert?
2. Egy négyzetet az egyik csúcsából induló két egyenes három egyenlő területű részre oszt.
  - (a) Milyen arányú részekre osztja a két egyenes négyzetbe eső szakaszát a szakaszokat metsző átló?
  - (b) Legyen a négyzetbe írt kör területe  $T$ , a két egyenes és az őket metsző átló által bezárt háromszög beírt körének területe  $t$ . Határozzuk meg  $T : t$  értékét.
3. Hányféleképpen juthatunk a koordinátarendszer origójából a  $(4;2)$  pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?
4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész  $n$  esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$$

5. Igazoljuk, hogy a rekurzióval definiált alábbi sorozat minden tagja pozitív egész szám.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.