A komplex szám konjugáltja és abszolútértéke

473. Írjuk fel a következő számok konjugáltját, és ábrázoljuk a komplex számsíkon:

a) 5; *b)* $2i$; *c)* $-5i$;
d) $1+i$; *e)* $-2+3i$; *f)* $8-7i$.

474. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolútértékét:

a) $3i$; *b)* $-2i$; *c)* $2-i$;
d) $5+2i$; *e)* $6-3i$; *f)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$.

475. Számítsuk ki a következő komplex számok konjugáltjának abszolútértékét. Ábrázoljuk a komplex számot és a konjugáltját is a komplex számsíkon:

a) $3-2i$; *b)* $2+7i$; *c)* $-5-3i$;
d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}i$; *e)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i$; *f)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$.

476. Milyen hosszúak az

$$1-i\sqrt{3};\quad 2i;\quad -1-i\sqrt{3}$$

csúcspontú háromszög oldalai?

477. Bontsuk fel komplex tényezők szorzatára a következő kifejezéseket:

a) a^2+b^2; *b)* a^2+4; *c)* a^2+2.

478. Igazoljuk, hogy két komplex szám összegének konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak összegével, a szorzatuk konjugáltja egyenlő a tényezők konjugáltjainak szorzatával.
Mit mondhatunk két komplex szám hányadosának konjugáltjáról?

479. Adjuk meg azokat a számokat, amelyeknek konjugáltja az eredeti szám

a) négyzete; *b)* köbe.

480. Igazoljuk, hogy ha $z=a+bi$, akkor

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leqq |z| \leqq |a|+|b|.$$

481. Bizonyítsuk be, hogy ha z_1 és z_2 komplex számok, akkor igazak a következő állítások:

a) $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$; *b)* $|z_1-z_2| \geqq ||z_1|-|z_2||$;
c) $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$; *d)* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

482. Igazoljuk, hogy egy komplex szám valós számszorosának vektora egyenlő a komplex szám vektorának valós számszorosával.

484. Igazoljuk, hogy egy komplex szám i-szeresét úgy ábrázolhatjuk, hogy a komplex szám vektorát $+90°$-kal elforgatjuk.

485. Igazoljuk, hogy

a) két komplex szám szorzatához rendelt vektor hossza egyenlő a komplex számok vektorai hosszának szorzatával.
b) két komplex szám szorzatához rendelt vektor irányszöge egyenlő a komplex számok vektorai irányszögének összegével.

A komplex számok trigonometrikus alakja

486. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

a) 1; *b)* -1; *c)* i;
d) $-i$; *e)* $2i$; *f)* $1+i$;
g) $-1+i$; *h)* $1-i$; *i)* $1+i\sqrt{3}$;
j) $\sqrt{3}-i$; *k)* $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; *l)* $3+i$.

487. Számítsuk ki a z_1z_2 szorzatot és a $\frac{z_1}{z_2}$ hányadost, ha

$$z_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

488. Írjuk fel algebrai alakban a következő komplex számokat:

a) $6(\cos 0° + i\sin 0°)$; *b)* $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
c) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; *d)* $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

489. Igazoljuk, hogy

a) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$.
b) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$.
c) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha+i\sin n\alpha$, ha $n\in\mathbf{N}^+$.

490. Számítsuk ki i nulla és pozitív egész kitevős hatványait.

491. Számítsuk ki:

a) $i+i^2+i^3+i^4$; *b)* $(1-i)^4$; *c)* $(1+i)^4$.

492. Milyen pozitív egész n-re lesz $(1+i)^n = (1-i)^n$?

493. Legyen a z komplex szám abszolútértéke 1. Határozzuk meg, hogy milyen kapcsolat van z és $\frac{1}{z}$ között. Írjuk fel mindkettőt trigonometrikus alakban is.

494. Milyen z komplex számra teljesül a következő egyenlőség:

a) $|z|-z = 1+2i$; *b)* $|z|-2z = -1-8i$; *c)* $2|z|-3z = 1-12i$;
d) $|\bar{z}| = -4z$; *e)* $z^2+|z| = 0$.

495. Legyen $z_1 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Határozzuk meg a $z = x+yi$ komplex számot úgy, hogy $z_1^2-z_1 = z^2-1$ teljesüljön.

496. Hol helyezkednek el a síkban azok a z komplex számok, amelyekre

a) $|z-z_1| = 2$; *b)* $|z-z_1| > 2$; *c)* $|z-z_1| < 2$, ahol
1. $z_1 = 2+3i$; 2. $z_1 = -1+2i$;
3. $z_1 = a+bi$, $(a, b \in \mathbf{R})$.

497. Végezzük el a következő hatványozásokat:

a) $(1+i\sqrt{3})^3$; *b)* $(1+i)^8$.

Végezzük el a hatványozást úgy is, hogy a hatvány alapját trigonometrikus alakban írjuk fel.

498. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{1}$; *b)* $\sqrt[3]{2-2i}$.

499. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket: *a)* $x^3=1$; *b)* $x^4=1$; *c)* $x^5=1$; *d)* $x^6=1$; *e)* $x^2=i$; *f)* $x^2 = 1+i$.

500. Igazoljuk, hogy az $x^n=1$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ egyenlet gyökei az

$$x_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

alakú komplex számok, és $x_k = x_1^k$.

501. Bizonyítsuk be, hogy az $x^n=1$ egyenlet gyökeinek összege zérus, ha $n \geqq 2$.

III. AZ ALGEBRA ELEMEI

III.

1. Műveletek polinomokkal

Rendezés, fokszám

1. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő változó növekedő hatványkitevői szerint:

a) $5x^3-2x+4x^4+x^2-5$;
b) $3y^2-4y^5+5y^3+2y^4+6-y$;
c) $5x^6+2-4x^2-x$.

2. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő változó csökkenő hatványkitevői szerint:

a) $x^4-3x^2+5-x+2x^3$;
b) $\frac{1}{2}y+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}y^3+3y^2$;
c) $2{,}5z^2+0{,}5-3z+5z^4$.

3. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő valamely változó növekvő hatványkitevői szerint:

a) $x^3y^2+2xy^4-x^2y^3+x^4y+5$;
b) $y^2z-3yz^3-z^2+y^3-7z^4$;
c) $xz+2x^2-3z+x^5$.

4. Melyek az egynemű algebrai kifejezések a következő egytagok között?

a) $3a^2b$; $-2ab$; $-a^2b$; $2a^3b$; $1{,}3a^2b$;
b) $\frac{1}{5}xy^3$; x^2y; $-3xy^3$; $4x^3y$;
c) xy^2z; $5xyz$; xyz^2; x^2yz; $-3xy^2z$; $2xyz^2$.

5. Melyek az egytagúak a következő algebrai kifejezések között?

a) $3a^2b$; $4a-2b$; $5b+2a$; $-\frac{a^2}{3}$; a^3b; $3a^2+2$;

b) x^2+y^2; $(x+y)^2$; $-2x^2$; $5xy$; $3(x-y)^2$;

c) $\frac{2}{5}pq$; $3p-2q+5$; $2p(p-q)^2$; $q(p-q)^2$; $5p$.

6. Hányadfokúak a következő egytagú kifejezések?

a) $3x^2$; $-x^3$; $2x$; 3; $5x^4$;

b) $3x$; $-4y$; $2xy$; $5xy^2$; $6x^3y^4$; x^4y;

c) $2xyz$; x^2y^2z; xyz^3; xy^4z; x^5y;

d) $3x(y-z)$; $2x^2(y-z)$; $x(y-z)^2$; $-x^2(y-z)^2$.

7. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét, ha $a=\frac{1}{2}$; $b=-2$; $c=2$; $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{4}$.

a) $2ab$; $-3a^3$; $0{,}6x^2$; $-\frac{2}{5}y$; $-3b$;

b) $3x^2y$; $2xy^2$; $-x^3y$; $-x^2y^2$; $5xy$;

c) abc; $2a^2bc^2$; $-3ab^3$; $4abc^2$; $4a^2bc$.

Egytagú egész kifejezések összevonása

8. Adjuk össze az egynemű tagokat a következő kifejezésekben:

a) $5x-2x$; *b)* $4y-6y+2y$;

c) $-3a^2-4a^2$; *d)* $5x^3-x^3+2x^3$.

9. *a)* $2xy-3xy+xy$; *b)* $6p^3q+2p^3q$.

10. *a)* $6x^2-3x+x^2$; *b)* $a^2-b^2+a^2+b^2$.

11. *a)* $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{5}x^2+y^3-2x^2$;

b) $3ab-4a^2b+7ab-2a^2b+5ab-ab^2$;

c) $3{,}89a+0{,}11a-2{,}5a-b-a+1{,}5b$.

12. *a)* $\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2-a^2b-\frac{1}{5}ab^2+2a^2b$;

b) $\frac{4}{5}xy-\frac{2}{3}xyz+\frac{2}{5}xyz+0{,}3xy$;

c) $0{,}75p^2qr-0{,}5pq^2r-1{,}2p^2qr+1{,}3pq^2r-pqr$.

13. *a)* $3(x^2-y^2)-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{2}{3}(x^2-y^2)$;

b) $(a-b)^2+2(a-b)^2-4(a-b)^2$;

c) $\frac{2}{3}(x+y)^2-\frac{5}{2}(x+y)^2-\frac{5}{6}(x+y)^2$.

14. *a)* $3a^n-2a^n+4a^{n+1}-a^n-2a^{n+1}$;

b) $5x^2-3x^k+7x^2+8x^k-x^k$.

Többtagú egész kifejezések összevonása

15. Végezzük el a következő egész kifejezések összeadását:

a) $8a+(3b-2a)+5a$;

b) $5x-3+(5x+3)-7$;

c) $(12a+2b)+(4a-3b)$;

d) $(3a^2b-3ab^2)+(2ab^2-4a^2b)$;

e) $(x^2+3x-5)+(2x^2-x-1)$;

f) $(x^2+3xy+y^2)+(2x^2-4xy+2y^2)$;

g) $(10a-3b+5c)+(3a+5b-2c)$;

h) $(3x^2-ax+2a^2)+(a^2+3ax+x^2)+(x^2+a^2)$;

i) $(2a^3+3a^2b-2ab^2+b^3)+(4a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$;

j) $(5x^4-3x^3y+2x^2y^2+5xy^3+y^4)+(2x^3y-2x^2y^2-y^4)$;

k) $(2a^n-5b^m+c)+(5a^n+3b^m+3c)$.

16. Végezzük el A, B és C, illetve A és B összeadását:

a) $A=5a^4+3a^3b-2a^2b^2-4ab^3$,
$B=3a^4-8a^3b-9a^2b^2+ab^3$,
$C=6a^4+a^3b+5a^2b^2+9ab^3$;

b) $A=\frac{5}{6}x^2+1\frac{2}{3}xy+\frac{3}{4}y^2$,
$B=\frac{5}{12}x^2-\frac{4}{3}xy-\frac{7}{4}y^2$,
$C=2\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}xy-y^2$;

c) $A = 0{,}8x^4 - 1{,}2x^3y + 0{,}8x^2y^2 + 5{,}7xy^3 - 0{,}9y^4$,
$B = 0{,}2x^4 - 0{,}1y^4 + 2{,}3x^3y - 0{,}12x^2y^2 - 4{,}2xy^3$.

17. Határozzuk meg az $A+B+C$ számértékét, ha

$$a=4; \quad b=2{,}5; \quad c=\frac{1}{2}; \quad x=\frac{11}{4}; \quad y=\frac{7}{3}; \quad z=\frac{7}{2}.$$

a) $A = 3a^2b + 3b^2c + 3ac^2$, $\quad B = 3a^2b - 3b^2c + 3ac^2$,
$C = 3b^2c - 3a^2b - 3ac^2$;

b) $A = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z$, $\quad B = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z$,
$C = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z$.

18. Végezzük el a kivonásokat és a lehetséges összevonásokat:

a) $3a-(3a)$; b) $4x-(-7x)$;
c) $2a^3-(5a^3)$; d) $-a^4-(-3a^4)$;
e) $2xy-(10xy)$; f) $3x^2y-(2x^2y)$;
g) $6ab^2-(-2ab^2)$; h) $3abc-(-2abc)$;
i) $\frac{1}{2}a-(-a)$; j) $\frac{1}{5}x-\left(-\frac{2}{3}x\right)$;
k) $\frac{4}{3}x^2y-\left(-\frac{2}{5}x^2y\right)$; l) $-\frac{3}{4}ab^2-\left(\frac{2}{3}ab^2\right)$;
m) $3a^n-(-5a^n)$; n) $3x^{n+1}-(8x^{n+1})$.

19. a) $3x-(x+2y)$; b) $4a-(3+a)$;
c) $(3a-2b)-(a+b)$; d) $(3a^2-a)-(a^2-a)$;
e) $(3a^2b-2b^2)-(-2a^2b+b^2)$; f) $(x^3y-x^2)-(x^2+x^3y)$.

20. a) $(12a+5b-3c)-(-5a-7b+3c)$;
b) $(8a^2-4ab+b^2)-(b^2+2ab-a^2)$;
c) $(5ab-3bc+2ac)-(ab+bc+ac)$;
d) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)$;
e) $\left(\frac{1}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab+\frac{3}{14}bc-\frac{1}{5}ac\right)$;
f) $\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$.

21. a) $[5(a-x)^2-10(a-x)^3+3(a-x)^4]-[2(a-x)^2+8(a-x)^4-$
$-15(a-x)^3]$;
b) $[10(a+b)^4-2(a+b)^3-9(a+b)^2]-[7(a+b)^2-6(a+b)^4-$
$-12(a+b)^3-(a+b)]-4(a+b)$.

22. a) $(4a^2-2ab-b^2)-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)$;
b) $(-8x^3+4x^2-x+1)-(5x^3-8x^2-3x-1)+$
$+(2x^3-3+x^2-6x)$.

23. a) $3x-[5x-(2x-1)]$; b) $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]$.

24. a) $5x+\{3y+[6z-2x-(x-z)]\}-[9x-(7y+z)]$;
b) $2a-\{2a-[2a-(2a)-2a]-2a\}-2a$.

25. Írjuk fel az $5a^2-3a-2ab+b^2$ kifejezést
a) két tag összegeként; b) két tag különbségeként.

26. Határozzuk meg az $A-[B-2A-(A-B)]$ kifejezést, ha:

$$A = a^2+2ab+b^2 \quad \text{és} \quad B = a^2-2ab-b^2.$$

27. Számítsuk ki az $5abc-\{2a^2b-[3abc-(4ab^2+a^2b)]\}$ kifejezés értékét, ha
a) $a=-2$; $b=-1$; $c=3$;
b) $a=0{,}25$; $b=0{,}5$; $c=0{,}75$.

28. Bizonyítsuk be a következő állításokat:
1. Ha két szám összegéhez hozzáadjuk a különbségüket, akkor az első szám kétszeresét kapjuk.
2. Ha két szám összegéből kivonjuk a különbségüket, a második szám kétszeresét kapjuk.

29. A természetes számok sorozatában egymást követő három szám közül a legkisebb $2k$. Írjuk fel ennek a három számnak az összegét.

30. Egymás után következő négy természetes szám közül a legkisebb $2k+1$. Írjuk fel a két középső szám összegének és a két szélső szám összegének különbségét.

31. Egy háromszög kerülete $5a+b$. Egyik oldala $a+b$, a másik oldala ennél $2a$-val kisebb. Mekkora a harmadik oldal?

32. Egy négyszög kerülete $5a+b$. Egyik oldala b, a második oldala az elsőnél $(b-a)$-val nagyobb, a harmadik oldal a másodiknál $3a$-val kisebb. Mekkora a negyedik oldal?

33. A következő kifejezések közül melyek azok, amelyek a bennük lévő betűk bármely értékénél

1. pozitívok; 2. negatívok.

a) a^2+b^2; *b)* a^2-b^2; *c)* $-a^2b^2$;
d) $(a-b)^2$; *e)* a^2+1; *f)* a^3+1;
g) $-a^2-1$; *h)* $a^2+b^2+c^2$; *i)* a^2+b^2+1;
j) a^3-1; *k)* a^4+a^2-2; *l)* $2a^2+3a^4+1$.

Egytagú egész kifejezések szorzása

Végezzük el a következő szorzásokat:

34. *a)* a^2a; *b)* $x^2(-x^3)$;
c) $(-a)a^3$; *d)* $x^n(-x^2)$;
e) $a^{n+1}a^{n-1}$; *f)* $a^{3n}a^{3n-1}$.

35. *a)* $2x^25x^3$; *b)* $-3p^2(-2p^5)$;
c) $5p^33p^5$; *d)* $-5b^24b^4$;
e) $(-2a)(-3a^4)$; *f)* $-3a^n\frac{6}{5}a^{n+1}$;
g) $3x^{n+1}\left(-\frac{1}{3}x^{n-1}\right)$; *h)* $\frac{2}{5}x^{p+1}\frac{5}{2}x^{p-1}$.

36. *a)* $2ab(-3ab^3)$; *b)* $-3x^2y(-5xy^3)$;
c) $\frac{2}{5}a^3b(-10a^2b^2)$; *d)* $-k^2l^3\frac{2}{3}kl$;
e) $0{,}6x^2y^2(-0{,}5xy)$; *f)* $2{,}4a^3b^4(-0{,}5ab^2)$.

37. *a)* $(-4a^2b^3c)(-2ab^2c^4)$; *b)* $\left(-\frac{2}{5}x^2y^3z\right)\left(-\frac{5}{2}xyz\right)$;
c) $(-2{,}5x^3y^2z)(-3{,}4x^2y^3z)$; *d)* $(-5x^{k+1})(-2x^2)$;
e) $4a^2b(-6a^{n-1}b^{n+1})$; *f)* $2(a+b)^3\,4(a+b)$.

38. *a)* $3x^2y(-2xy)\left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$;
b) $\frac{1}{3}a^2(-6a^3b)(4a^2b^2)\left(-\frac{7}{2}ab\right)$;
c) $(-2{,}5pq)\left(-\frac{2}{5}p^2q^3\right)(-0{,}1pq^3)$;

d) $2a^{n+1}(-3a^n)\left(-\frac{2}{3}a^{n-1}\right)$.

Többtagú egész kifejezés szorzása egytagú egész kifejezéssel

Végezzük el a következő szorzásokat:

39. *a)* $(a+2)3$; *b)* $(3b-3)5$;
c) $-2(3a-2b)$; *d)* $(3x-4y)8$;
e) $3(0{,}6x^2-0{,}2y^3)$; *f)* $(x^2+y)\frac{2}{3}$.

40. *a)* $(a-b)c$; *b)* $(3c-4d)x$;
c) $2a(-3a-2b)$; *d)* $-4x(5y+3x)$;
e) $(2a+3b-4c)(-5)$; *f)* $(x-y+2z)\left(-\frac{1}{2}\right)$;
g) $(2x^2-5x+3)(-2x)$; *h)* $(y^2-y+1)2y$;
i) $(3x^2-5xy+y^2)2xy$.

41. *a)* $(3x^3-5x^2+4x+3)2x^2y^2$;
b) $(a^3-2a^2b^2-2ab^3+b^3)(-3ab^2)$;
c) $(-2a^3+5a^2x^2-5ax^3+3x^4)(-3ax^2)$.

42. *a)* $(a^k+2a^2)a^n$; *b)* $(3a^{n+1}-2a^n)5a$;
c) $(4x^{2l-1}-3x^{l+1})(-3x^{l+1})$; *d)* $6x^{n-1}\left(\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{3}{4}x\right)$.

43. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

a) $x(x+y)-y(x-y)$;
b) $3(3a-3b)+5(a+b)$;
c) $6(3p+4q)-8(5p-q)+p-3q$;
d) $4(x-y+z)-2(x+y-z)-3(-x-y-z)$;
e) $2a^2-a(5b-2a)+b(b-2a)$;
f) $6a^2-5a(2b-a)+4a\left(-3a+2\frac{1}{2}b\right)$;
g) $5(2{,}4-0{,}9x+0{,}16x^2)-4(0{,}2x^2+1{,}5x-1)$;
h) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)6x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)12y$;
i) $4a-2(a-3)-3[a-3(4-2a)+8]$.

Többtagú egész kifejezés szorzása többtagú egész kifejezéssel

44. Végezzük el a következő szorzásokat:

a) $(a+b)(c+d)$; *b)* $(a-b)(c-d)$;
c) $(a+2)(a+3)$ *d)* $(2x-1)(5-3x)$;
e) $(3x+2y)(2x+3y)$; *f)* $(3a^2-2b)(2a^2+3b)$;
g) $(3ab-4a^2)(5a+2b)$; *h)* $(7x^3y^2-xy)(5xy^2-2x^2y^2)$;
i) $\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{2}{3}xy-1\frac{1}{2}x^2y\right)$;
j) $(0{,}01a^2b^3+0{,}25a^3b^3)(6a^2b^3-4a^3b^3)$;
k) $(a^2-3ab+b^2)(a^2-2ab)$.

45. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)$, ha $x=\frac{7}{4}$;
b) $(a-5)(a-1)-(a+2)(a-3)$, ha $a=-\frac{13}{5}$;
c) $(k-2)(k-3)+(k+6)(k-5)-2(k^2-7k+13)$, ha $k=5{,}6$.

46. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(x-2)(x+3)+(x+2)(x-3)$;
b) $(a-3)(a+4)-(a-2)(a+5)$;
c) $(4b^2+2a^2-4ab)(2a^2+3ab-3b^2)$;
d) $(x-a)(x-b)(x-c)$;
e) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$;
f) $(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$;
g) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$;
h) $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$.

47. A következő egyenlőségek közül melyek azok, amelyek a bennük szereplő betűk minden valós értékénél fennállnak?

a) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;
b) $(a+b)^2-(a+b)(a-b)=2b(a+b)$;
c) $(a-b)(a+b)-3ac-3bc=(a-b-3c)(a+b)$;
d) $(a-b)^2+a(a+b)=(a+b)^2+a^2$;
e) $2ab=a(a+1)+b(b-1)-(a-b)(a-b+1)$.

Nevezetes szorzatok

48. Végezzük el a következő szorzásokat:

a) $(a+b)(a-b)$; *b)* $(x-y)(x+y)$;
c) $(a+2)(a-2)$; *d)* $(x-1)(x+1)$;
e) $(2x+y)(2x-y)$; *f)* $(2b-3a)(2b+3a)$;
g) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$; *h)* $\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{3}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{4}b^2\right)$;
i) $(2xy-1)(2xy+1)$; *j)* $(3a^2+2b)(3a^2-2b)$;
k) $(0{,}2a-0{,}5b)(0{,}2a+0{,}5b)$; *l)* $(x^k+y)(x^k-y)$.

49. Végezzük el az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosság felhasználásával a következő műveleteket:

a) $31\cdot 29$; *b)* $61\cdot 59$; *c)* $199\cdot 201$;
d) $2{,}1\cdot 1{,}9$; *e)* $19{,}9\cdot 20{,}1$; *f)* $56\cdot 64$;
g) 35^2-25^2; *h)* 64^2-36^2; *i)* 328^2-172^2.

50. Melyek azonosságok a valós számok halmazán a következő egyenlőségek közül?

a) $(1+a)(1-a)(1+a^2)=1-a^4$;
b) $5a^2-3(a+1)(a-1)=2a^2+3$;
c) $7(x^2-2)-4(x+3)(x-3)=3x^2+42$;
d) $10(x^2-15)-12(x-4)(x-4)=42-2x^2$.

Végezzük el a következő szorzásokat:

51. *a)* $(a+b)(a-b)$;
b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
c) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$;
d) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
e) $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$.

52. *a)* $(a-b)(a+b)$;
b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
c) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;
d) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
e) $(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

53. Az **51.** és **52.** feladat eredményeit felhasználva, számítsuk ki a következő szorzásokat:

a) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
b) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

c) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$;
d) $(2x^2+3y^2)(4x^4-6x^2y^2+9y^4)$;
e) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$.

Egytagú algebrai kifejezések hatványa

Számítsuk ki a következő hatványokat:

54. *a)* $(x^2)^3$; *b)* $(-x^2)^3$; *c)* $-(x^2)^3$;
d) $(a^5)^{10}$; *e)* $(-a^5)^{10}$; *f)* $-(a^5)^{10}$;
g) $(a^n)^k$; *h)* $(-a^n)^k$; *i)* $-(a^n)^k$.

55. *a)* $(2a^2)^2$; *b)* $(2a^3)^2$; *c)* $(-3a)^3$;
d) $(ab)^3$; *e)* $[(-x)y]^2$; *f)* $[(-x)y]^3$;
g) $(abc)^2$; *h)* $(a^2bc^3)^2$; *i)* $(5ab^2)^2$;
j) $\left(\frac{1}{3}x^2\right)^3$; *k)* $\left(-\frac{1}{3}x^3\right)^2$; *l)* $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^3$.

56. Végezzük el a következő szorzásokat:
a) $(a^2b^3)^2(-2a^3b^2)^2$; *b)* $(-3a^3)^3\left(-\frac{2}{3}a^5\right)^3$;
c) $\left(\frac{3}{2}x^2y^3z\right)^2(-2xy^2z^3)^2$; *d)* $(a^{k+1})^2(a^{k-1})^2$;
e) $[2(x-y)^n]^4(x-y)^n$.

57. Számítsuk ki a következő hatványokat:
a) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^2$; *b)* $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3$; *c)* $\left(-\frac{a^2}{b^4}\right)^5$;
d) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$; *e)* $\left(\frac{-2a^2}{5b^3}\right)^2$; *f)* $\left(\frac{2a^2b}{3ab^2}\right)^2$.

58. Végezzük el a következő műveleteket:
a) $\left(\frac{a}{x}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)^2$; *b)* $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4\left(\frac{3ab}{2c}\right)^3$;
c) $\left(\frac{4x^2y^3}{3a^2b^4}\right)^2\left(\frac{-9a^4b^5}{16x^4y^6}\right)^3$; *d)* $\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^3\left(\frac{x^3}{y^3}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^4$.

59. Végezzük el a következő műveleteket:
a) $\left(\frac{2a^2b}{3cd^3}\right)^3 : \left(\frac{2ab^2}{3c^3d}\right)^3$; *b)* $\left(\frac{2x^4y^5}{a^2b^3}\right)^3 : \left(\frac{2x^4y^5}{a^2b^3}\right)^2$.

Többtagú kifejezések négyzete

Végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

60. *a)* $(a+b)^2$; *b)* $(a-b)^2$; *c)* $(x+y)^2$;
d) $(a+3)^2$; *e)* $(b-2)^2$; *f)* $(x+1)^2$;
g) $(2x+1)^2$; *h)* $(3a-b)^2$; *i)* $(3y+x)^2$;
j) $(3x-2y)^2$; *k)* $(5a+3b)^2$; *l)* $(a^2+1)^2$;
m) $(x^3+1)^2$; *n)* $(x^2+y^2)^2$; *o)* $(a^3-b^3)^2$.

61. *a)* $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; *b)* $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$; *c)* $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$;
d) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)^2$; *e)* $\left(\frac{2a}{3}-3b\right)^2$; *f)* $\left(1\frac{2}{3}a+2b\right)^2$;
g) $\left(-1\frac{1}{5}a+1\frac{1}{6}b\right)^2$.

62. *a)* $(0{,}2a^2-5b)^2$; *b)* $(0{,}3x^2+4y)^2$;
c) $\left(\frac{3}{4}a^2-0{,}5b^3\right)^2$; *d)* $\left(1\frac{1}{3}x^2+0{,}6y^4\right)^2$;
e) $(a^k+a)^2$; *f)* $(x^n-x)^2$;
g) $(a^{k+1}+a^k)^2$.

63. *a)* $\left(\frac{3}{4}a^4b-\frac{2}{3}ab^3\right)^2$; *b)* $\left(\frac{5}{6}x^3y^2+\frac{3}{5}xy\right)^2$;
c) $\left(\frac{2}{3}a^3b^4-2\frac{1}{2}a^5b\right)^2$; *d)* $\left(\frac{4}{5}a^3b^3-1\frac{1}{4}a^2b^3\right)^2$.

64. *a)* $(a+b+c)^2$; *b)* $(a-b+c)^2$;
c) $(x+2y+z)^2$; *d)* $(2x-y-z)^2$.

65. Írjuk fel a következő háromtagú kifejezéseket kéttagú kifejezések négyzeteiként:
a) a^2+2a+1; *b)* $4x^2-4xy+y^2$;
c) $b^2-6bc+9c^2$; *d)* $25x^2+20xy+4y^2$;

e) $4x^6-12x^3y^2+9y^4$; f) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$;

g) $\frac{16}{9}a^6b^6-2a^5b^6+\frac{9}{16}a^4b^6$; h) $0{,}09x^4-2{,}4x^2y+16y^2$.

66. Egészítsük ki a következő kifejezéseket úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzetével legyenek egyenlők:

a) $x^2+2xy+\ldots$; b) $a^2-2ab+\ldots$;

c) $4c^2+4cd+\ldots$; d) $\frac{4}{9}k^2-kl+\ldots$;

e) $25a^2+\ldots+16b^2$; f) $1+\ldots+25x^2$;

g) $36p^2+\ldots+25q^2$; h) $\frac{1}{4}x^2+\ldots+\frac{4}{9}z^2$;

i) $4+\ldots+36a^2b^2$; j) $\frac{4}{9}x^2y^2+\ldots+1$.

67. Írjuk fel a következő háromtagú kifejezéseket egy kéttagú kifejezés és egy szám összegeként:

a) $x^2+6x+13$; b) $x^2-10x+26$;

c) $x^2+4x+17$; d) $-3-2x+x^2$;

e) $\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{5}a+\frac{11}{25}$; f) $32+28a+49a^2$.

68. A $(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25$ azonosságot felhasználva végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

a) 25^2; b) 45^2; c) 65^2; d) 125^2; e) 145^2; f) 165^2.

69. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(a+b)^2-(a-b)^2$; b) $(x+2)^2+3(x+1)^2$;

c) $2(y-2)^2-3(y+3)^2$; d) $5(3-5a)^2-5(3a-7)(3a+7)$;

e) $(a-1)^2-3(a+1)^2-5(a-1)(a+1)$;

f) $-(2+x)^2-3(1-x)^2+2(1-x)(1+x)$;

g) $(a+1)(a-1)(a^2-1)$; h) $(a+2)^2(a-2)^2$;

i) $(a+b+c)(a+b-c)$; j) $(a-b+c)(a-b-c)$;

k) $(x+2y+3z)(x-2y+3z)$; l) $(a+2b-4c)(a-2b-4c)$;

m) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

70. A következő egyenlőségek közül melyek az azonosságok a valós számok halmazán?

a) $(a-b)^2+(a+b)(a-b) = 2a(a-b)$;

b) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a-b-c)^2 = 8ac$;

c) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad+bc)^2$;

d) $25(a^2+b^2) = (3a+4b)^2+(4a-3b)^2$;

e) $(a-b)^2-(b-a)^2 = 1$.

Többtagú kifejezések köbe

Végezzük el a következő köbre emeléseket:

71. a) $(a+b)^3$; b) $(a-b)^3$; c) $(c+d)^3$;

d) $(p-q)^3$; e) $(a+2)^3$; f) $(3-a)^3$;

g) $(a-2b)^3$; h) $(2a+3b)^3$; i) $\left(4a+\frac{b}{2}\right)^3$;

j) $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^3$; k) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^3$; l) $(a^2+b^2)^3$;

m) $(x^2-y^2)^3$.

72. a) $(4a^3+5b^2)^3$; b) $(7k^3+2l^2)^3$;

c) $(0{,}5x+0{,}1y)^3$; d) $(0{,}2a-0{,}1b)^3$;

e) $\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{3}x^2y\right)^3$; f) $\left(0{,}2a^2b-\frac{5}{3}ab^2\right)^3$;

g) $(x^n-1)^3$.

Egytagú kifejezés osztása egytagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat:

73. a) $8a:4$; b) $30x:(-3)$;

c) $(-12x):(-4)$; d) $\left(-\frac{3}{4}a\right):\frac{2}{3}$;

e) $\frac{6}{7}x^2:(-3)$; f) $\left(-2\frac{3}{4}a^3\right):3$;

g) $1\frac{5}{6}a:\left(-\frac{5}{6}\right)$; h) $\left(-1\frac{1}{2}x^2\right):\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

74. a) $10a:2a$; b) $(-6x):2x$;

c) $1{,}5b:0{,}5b$; d) $0{,}3a^2:(-0{,}01a^2)$.

75. a) $8ab:4b$; b) $6xy:(-2x)$;

c) $4abc:2a$; d) $8a^2b^2:2a^2$.

76. *a)* $a^6 : a^2$; *b)* $x^5 : x^3$;
c) $c^5 : (-c)$; *d)* $a^{10} : (-a^5)$.

77. *a)* $a^k : a^n$; *b)* $a^{k+1} : a^k$;
c) $x^{2k+1} : x^{k+1}$; *d)* $x^{n+1} : x^{n-1}$.

78. *a)* $6a^3b : 2ab$; *b)* $-9xy^2 : 3xy$;
c) $16x^2y^2 : 4x^2y$; *d)* $2a^4b^3 : 5a^2b^3$;
e) $15a^2b^2c : (-5abc)$; *f)* $-6a^3b^2c : (-2abc)$.

79. *a)* $6(x+y)^3 : 2(x+y)$; *b)* $12(a-b)^4 : [-3(a-b)^2]$;
c) $4(x-y)^5 : \frac{1}{2}(x-y)^3$; *d)* $8(x+2y)^{k+1} : 2(x+2y)^k$.

Többtagú kifejezés osztása egytagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat, és vizsgáljuk meg azt is, hogy a változók milyen értékeire van értelmezve a hányados:

80. *a)* $(6a+15b) : 3$; *b)* $(10+20x) : 5$;
c) $(3ab+12ac) : 3a$; *d)* $(15xy-10xz) : 5x$;
e) $(16x^3y-24x^2y^2) : 8x^2y$;
f) $(9xy^2+15x^3y^4) : (-3xy^2)$.

81. *a)* $(4a+6b-8) : 2$; *b)* $(10x^3-5x^2+20x) : 5x$;
c) $(12a^4-8a^3+4a^2) : 4a^2$;
d) $(3a^2b^3-15a^2b^2+18a^3b^2) : 3a^2b^2$;
e) $(12x^3y^2-4x^2-16x^4y^3) : (-4x^2)$;
f) $(15a^3b^5-10a^4b^4-25a^5b^3) : 5a^3b^3$.

82. *a)* $(2x^2-4x+2) : \frac{1}{2}$;
b) $(3x^3+6x^2-2x) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$;
c) $(4xy^2-16x^2y^2-12x^3y) : \frac{4}{3}xy$;
d) $\left(4a^5b^2-\frac{4}{9}a^4b^5+\frac{2}{3}a^3b^6\right) : \frac{2}{3}a^3b^2$;
e) $(0{,}01a^4-0{,}02a^3+0{,}04a^2+0{,}002a) : 0{,}01a$;
f) $[5(a-b)^4-10(a-b)^3+25(a-b)^2] : 5(a-b)^2$.

Többtagú kifejezés osztása többtagú kifejezéssel

Végezzük el a következő osztásokat:

83. *a)* $(3a+3b) : (a+b)$; *b)* $(5a-5b) : (a-b)$;
c) $(ax+ay) : (x+y)$; *d)* $(xy-xz) : (y-z)$.

84. *a)* $(x^2-8x+7) : (x-7)$; *b)* $(a^2-2a-15) : (a-5)$;
c) $(6x^2+5x-6) : (2x+3)$; *d)* $(12a^2+a-20) : (4a-5)$.

85. *a)* $(x^3-6x^2-5x+30) : (x-6)$;
b) $(x^3-x^2-x+1) : (x+1)$;
c) $(6a^3+a^2-29a+21) : (2a-3)$;
d) $(x^2y^2+x^4-x^3y-xy^3) : (x^2+y^2)$.

86. *a)* $(15a^4-a^3-a^2+41a-70) : (3a^2-2a+7)$;
b) $(4a^4-24a^2b^2-14a^3b-54b^4) : (a^2-3ab-9b^2)$;
c) $(17x^2-6x^4+5x^3-23x+7) : (7-3x^2-2x)$.

Azonosságok alkalmazásával írjuk fel a következő osztások hányadosait:

87. *a)* $(a^2-b^2) : (a+b)$; *b)* $(a^2-b^2) : (a-b)$;
c) $(a^4-b^4) : (a+b)$; *d)* $(a^4-b^4) : (a-b)$;
e) $(a^3+b^3) : (a+b)$; *f)* $(a^5+b^5) : (a+b)$.

88. *a)* $(x^2-1) : (x+1)$; *b)* $(x^3+1) : (x+1)$;
c) $(x^3-1) : (x-1)$; *d)* $(x^4-1) : (x-1)$;
e) $(x^5+1) : (x+1)$; *f)* $(x^6-1) : (x-1)$.

89. *a)* $(x^2-9) : (x+3)$; *b)* $(x^2-16) : (x-4)$;
c) $(25-a^2) : (5+a)$; *d)* $(1-4x^2) : (1+2x)$.

90. *a)* $(16a^2-9b^2) : (4a+3b)$; *b)* $(49x^2-81y^2) : (7x+9y)$;
c) $(100a^2-64b^2) : (10a-8b)$.

91. *a)* $(x^4-y^4) : (x^2+y^2)$; *b)* $(x^4-y^4) : (x^2-y^2)$;
c) $(a^6-1) : (a^3+1)$; *d)* $(a^{10}-b^8) : (a^5-b^4)$.

92. *a)* $(a^2+2ab+b^2) : (a+b)$; *b)* $(x^2-2xy+y^2) : (x-y)$;
c) $(a^4-2a^2b^2+b^4) : (a^2-b^2)$.

93. *a)* $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) : (a+b)$;
b) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3) : (x-y)$;
c) $(c^3+3c^2d+3cd^2+d^3) : (c^2+2cd+d^2)$.

94. *a)* $(a^3+8) : (a+2)$; *b)* $(a^3-27) : (a-3)$;

c) $(8x^3-1):(2x-1)$; *d)* $(8y^3+27):(2y+3)$;

e) $(x^9-y^3):(x^3-y)$; *f)* $\left(\frac{x^3}{8}+1\right):\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

g) $\left(b^3-\frac{1}{8}\right):\left(b-\frac{1}{2}\right)$; *h)* $\left(\frac{8}{27}+x^3\right):\left(\frac{2}{3}+x\right)$.

95. *a)* $(a^3+b^3):(a^2-ab+b^2)$; *b)* $(c^3-d^3):(c^2+cd+d^2)$;

c) $(x^3-1):(x^2+x+1)$.

Ismétlő feladatok polinomokkal való műveletekre

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

96. *a)* $2(a-b)^2-2(a+b)^2-4(a+b)(a-b)$;

b) $(4x+13)(x^2+1)-(4x-3)(x+2)^2$;

c) $(1-a)(1+a^2)+(1+a)(1+a^2)-2(1+a)(a-1)$;

d) $(x^2+2)^2-(x-2)(x+2)(x^2+4)$;

e) $3(a-2)-\frac{2}{3}(6a+1)(6a-1)+5a^2$;

f) $(a^3-3)^3-(a-2)(a^2+4)(a+2)$.

97. *a)* $\{[ax-2(a+2)][a(x-1)+2]+(4-a^2)+3a^2x\}:2ax$;

b) $[3(x-a)-3(x-c)+4(a-c)]:\frac{1}{2}(x-a)$;

c) $[9(x-1)-5(3x-1)+2(3x+2)]:(x^2-2)$;

d) $[a(a+2b)+b^2][a^2-b(2a-b)]:[(a-b)(a+b)]$;

e) $[a^2(a-3b)-b^2(b-3a)]:(a-b)$;

f) $\{(x^2-1)[x^2(x^2+1)+1]\}:\{(x+1)[x^2-(x-1)]\}$;

g) $[(2x-3)^3-(2x-3)^2-(2x-3)-(2x-3)(2x+3)-$
$-(2x+3)(4x^2-6x+9)]:2(2x-3)$;

h) $(64a^2-9b^2):(8a-3b)-(4a^2-b^2):(2a+b)$;

i) $(64x^3-27y^3):(4x-3y)-(2x+3y)^2$.

98. A természetes számok sorozatában két egymást követő egész szám négyzetének különbsége 33. Melyik ez a két szám?

99. A természetes számok sorozatában két egymást követő páros szám négyzetének különbsége 28. Melyik ez a két szám?

100. Két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége 64. Melyik ez a két szám?

***101.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$ és $a^3+b^3+c^3=0$, akkor $a^n+b^n+c^n=0$, ha $n>0$, páratlan szám.

2. Polinomok szorzattá alakítása

A tényezők kiemelése

102. Határozzuk meg a következő kifejezések legnagyobb közös osztóját:

a) a^2b; ab^2; *b)* $3a^2b^3$; $12a^3b^2$;

c) $x^5y^4z^2$; $x^6y^3z^4$; *d)* $15x^3y^2z^4$; $20x^2y^3z^5$;

e) $3ab$; $6a^2b^2$; $12a^3b^3$; *f)* $2abc^2$; $3a^2bc$; $4ab^2c^2$.

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

103. *a)* $3a+3b$; *b)* $10x-5y$;

c) $ax+bx$; *d)* a^2+a;

e) $ca-cb$; *f)* $4-6x$;

g) $5ab+5ac$; *h)* $3xy-6xz$;

i) $15ax-10ay$; *j)* $-2xy-4ay$.

104. *a)* x^2+xy; *b)* $ab-b^2$;

c) a^4-a^3; *d)* x^3-x^4;

e) $5x^3+10x^2$; *f)* $8a^4-12a^2$;

g) $15y^3-5y$; *h)* $18x^6-24x^3$;

i) $ab^2+a^2b^3$; *j)* $a^4x^2+a^3x^4$.

105. *a)* a^n+a^{n+1}; *b)* $x^{k+n}-x^k$;

c) $a^{3k}-a^{2k}$; *d)* $5a^{k+2}-10a^2$.

106. Mely x értékekre

1. pozitív; 2. nulla; 3. negatív

a következő kifejezések helyettesítési értéke?

a) x^2+2x; *b)* $2x^2-6x$; *c)* $12x-3x^2$.

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

107. *a)* $ax+bx+cx$; *b)* a^3-2a^2-a;

c) $5x^2y-10xy+5xy^2$; *d)* $-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^3$;

e) $10a^4b^3-15a^4b^2+20a^3b^4$.

108. *a)* $a(x+y)+b(x+y)$; *b)* $x(a+2)-y(a+2)$;

c) $2a(a-b)+5b(a-b)$; *d)* $3x(a+b)+2y(a+b)$;

e) $x(a-b)+y(b-a)$; *f)* $x(y-z)-a(z-y)$;
g) $2a(x-5)-3b(5-x)$; *h)* $6(x-2)+2b(2-x)$.

109. *a)* $5a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$;
b) $x(a^2+b^2)-3y(a^2+b^2)-2z(a^2+b^2)$;
c) $a(x-2)+b(2-x)+c(x-2)$;
d) $a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5c(x+y-z)$.

Szorzattá alakítás csoportosítással

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

110. *a)* $3a(x+y)+x+y$; *b)* $3b(x-y)+x-y$;
c) $2a(x+y)-x-y$; *d)* $4x(a-b)-a+b$;
e) $b(a+b)-ax-bx$; *f)* $2y(x-y)-ax+ay$.

111. *a)* $ax+ay+bx+by$; *b)* $ax-ay+bx-by$;
c) $a^2+ab+ac+bc$; *d)* x^3+3x^2+3x+9;
e) $x^2-xy-2x+2y$.

112. *a)* $3ax-4by-4ay+3bx$;
b) $5bx-6ax-5by+6ay$;
c) $10a^2+21xy-14ax-15ay$;
d) $12a^2-6ab+3b^2-6ab$;
e) $x+x^2-x^3-x^4$.

113. *a)* x^2+5x+6; *b)* x^2-6x+8;
c) x^2-x-12; *d)* $a^2-2a-15$.

114. Számítsuk ki – szorzattá alakítás után – az $x^2-11x+10$ kifejezés helyettesítési értékeit, ha $x=0$; 1; 2; 3; 4; 5; 5,5; 6; 7; 8.

115. A változó mely értékeire
nagyobb nullánál; kisebb nullánál; nulla
a következő polinomok helyettesítési értéke?
a) x^2+4x+3; *b)* $x^2+7x+10$; *c)* $x^2+7x-30$;
d) $2x^2-4x-6$; *e)* $-x^2+6x-8$; *f)* $-x^2+2x+3$.

Szorzattá alakítás azonosságok alkalmazásával

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

116. *a)* a^2-b^2; *b)* x^2-y^2; *c)* k^2-1^2;
d) a^2-4; *e)* a^2-9; *f)* $25-x^2$;

g) a^2-1; *h)* $1-x^2$; *i)* $4a^2-9$;
j) a^2-9b^2; *k)* $\frac{1}{4}a^2-b^2$; *l)* $y^2-\frac{1}{16}x^2$;
m) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$; *n)* $4x^2-\frac{1}{25}y^2$; *o)* $\frac{64}{81}a^2-\frac{9}{64}b^2$.

117. *a)* a^2b^2-9; *b)* $16-x^2y^2$; *c)* $\frac{1}{16}x^2y^2-25$;
d) $a^2x^2-\frac{b^2}{4}$; *e)* $\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{25}y^2$; *f)* $1-0{,}01a^2$.

118. *a)* $4a^4-9$; *b)* $4-a^4b^4$; *c)* $a^2-x^2y^2$;
d) x^2-y^4; *e)* $16a^4-9b^2$; *f)* $36a^4-49b^6$.

119. A változó mely értékeire
pozitív; negatív; nulla
a következő különbségek értéke?
a) a^2-9; *b)* $25-b^2$; *c)* $1-a^2$; *d)* $\frac{1}{25}-x^2$.

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

120. *a)* $(x+3y)^2-z^2$; *b)* $(3a+2b)^2-9c^2$;
c) $(x+y)^2-9y^2z^4$; *d)* $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$;
e) $(x+1)^2-\frac{1}{4}x^2$; *f)* $(a-b)^2-0{,}04a^2$.

121. *a)* $a^2-(2b+c)^2$; *b)* $9a^2-(x-y)^2$;
c) $0{,}25x^2-(1{,}2a+b)^2$; *d)* $1-(2a-3b)^2$.

122. *a)* $1-(a^2+b^2)^2$; *b)* $x^4y^2-(x-y)^2$;
c) $(a+2b)^2-(c+3d)^2$; *d)* $(1+x)^2-(y-z)^2$.

123. *a)* $4(x+y)^2-z^2$; *b)* $25(a-b)^2-16$;
c) $\frac{4}{9}(x-y)^2-81$; *d)* $\frac{16}{49}(a+b)^2-25$.

124. *a)* $4(a-b)^2-(a+b)^2$; *b)* $(3a-2b)^2-(a+b)^2$;
c) $(b+5c)^2-9(b-c)^2$; *d)* $(x-2y)^2-4(x+y)^2$;
e) $16(x-y)^2-25(x+y)^2$; *f)* $4(3x+5y)^2-16(2x-y)^2$.

125. *a)* $a^2+2ab+b^2$; *b)* x^2+y^2-2xy;
c) a^2-6a+9; *d)* x^2-2x+1;

e) $4a^2+4a+1$; *f)* $9x^2-6x+1$;
g) $-a^2-2a-1$; *h)* $a^4+2a^2b+b^2$;
i) $25y^4-10y^2x+x^2$; *j)* $-x^4+2zx^2-z^2$;
k) $9a^4+6a^2b^2+b^4$; *l)* $25x^4-10x^2y^2+y^4$.

126. *a)* x^3+y^3; *b)* x^3-y^3; *c)* p^3+q^3; *d)* a^3+8;
e) x^3-1; *f)* y^3+1; *g)* a^3+27; *h)* $1-p^3$;
i) $1+8b^3$; *j)* $27x^3-8y^3$.

127. *a)* $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
b) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$;
c) $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3$;
d) $b^3-6b^2c+12bc^2-8c^3$.

128. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos páros szám négyzetének különbsége osztható 4-gyel.

129. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal.

Tényezőkre bontás különböző módszerek alkalmazásával

Bontsuk tényezőkre a következő kifejezéseket:

130. *a)* $3a^2-3b^2$; *b)* $5p^2-5$;
c) x^3-x^2; *d)* a^3b-ab^3;
e) $5a^2-20b^2$; *f)* $x^4y^2-x^2y^4$.

131. *a)* $2x^2+4xy+2y^2$; *b)* $3a^2-6a+3$;
c) $3xy^2+6xy+3x$; *d)* $2a-4ab+2ab^2$;
e) $4ax-8ax^2+4ax^3$; *f)* $4x^2-4xz-3x+3z$.

132. *a)* $a^2-2ab+b^2-c^2$; *b)* $x^2-2xy+y^2-4$;
c) $9-x^2+2xy-y^2$; *d)* $1-p^2-2pq-q^2$;
e) $4a^2-20ab+25b^2-16$; *f)* $25x^2-4a^2+12ab-9b^2$.

133. *a)* a^2-b^2-a-b; *b)* x^2-y^2+x+y;
c) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$; *d)* $a^2+2ab+b^2-ac-bc$;
e) $x^5-x^3+x^2-1$; *f)* a^3-8+6a^2-12a;
g) $a^3+a^2b-ab^2-b^3$; *h)* $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

134. *a)* a^4-b^4; *b)* a^6-b^6;
c) $(a+b)^3-(a-b)^3$; *d)* $a^6-a^4+2a^3+2a^2$.

***135.** *a)* a^4+a^2+1; *b)* a^8+a^4+1;

c) $x^3+6x^2+11x+6$; *d)* $2x^3+x^2-4x+12$;
e) $x^3+8x^2+17x+10$; *f)* $x^4+x^3+6x^2+5x+5$;
g) $x^4-12x^3+47x^2-60x$; *h)* $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

***136.** Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:
a) $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$;
b) $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$;
c) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

***137.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x+y+z=0$, akkor

$$x^3+x^2z+y^2z-xyz+y^3=0.$$

3 Algebrai törtek

Az algebrai tört fogalma, egyszerűsítése

138. Az ismeretlenek mely értékeire lesz nulla a következő törtek helyettesítési értéke?

a) $\frac{x}{y}$; - számláló - nevező *b)* $\frac{x+2}{x}$; *c)* $\frac{a-5}{b}$;
d) $\frac{x(x+2)}{x+3}$; *e)* $\frac{a(b-2)}{b-3}$; *f)* $\frac{5x^2-x}{2y}$;
g) $\frac{a^2-4}{a+3}$; *h)* $\frac{6q^2+3q}{5q+1}$; *i)* $\frac{(a+b)^2}{2a}$;
j) $\frac{(a-b)^3}{a+b}$; *k)* $\frac{a+2b}{a+5}$.

139. Az ismeretlenek mely értékeinél nem értelmezhetők a következő törtek?

a) $\frac{5}{x-1}$; *b)* $\frac{3}{2x}$; *c)* $\frac{a}{a-3}$; $a \neq 3$
d) $\frac{x-2}{x}$; *e)* $\frac{x-3}{x+3}$; $x \neq (-3)$ *f)* $\frac{a+3}{a^2}$;

g) $\dfrac{b}{b^2+3}$; *h)* $\dfrac{b-2}{b^2-4}$; *i)* $\dfrac{a+2}{a(a-2)}$;

j) $\dfrac{x-a}{x+a}$; *k)* $\dfrac{a+2}{(a-3)(a+1)}$; *l)* $\dfrac{x-a}{(x+a)(x-3a)}$;

m) $\dfrac{x-a}{x^2+a^2}$.

140. Hogyan változik a következő kifejezések értéke, ha az a és b értékét ötszörösére növeljük?

a) $\dfrac{a}{b}$; *b)* $\dfrac{a-b}{a}$; *c)* $\dfrac{a-b}{a+b}$;

d) $\dfrac{a^3}{b^2}$; *e)* $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$; *f)* $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

141. Megváltozik-e a következő kifejezések előjele, ha a változók helyére azok (-1)-szeresét helyettesítjük?

a) $\dfrac{3}{x}$; *b)* $\dfrac{5}{x^2}$; *c)* $\dfrac{7}{x^3}$;

d) $\dfrac{x^2+2}{x}$; *e)* $\dfrac{a}{a^2+3}$; *f)* $\dfrac{a^2}{a^2+2}$;

g) $\dfrac{x^2+5}{x^2+2}$; *h)* $\dfrac{a^3}{a^6+1}$; *i)* $\dfrac{a^2+a^4}{a^3-a}$.

142. Egyszerűsítsük a következő törteket. Változik-e a törtek értelmezési tartománya?

a) $\dfrac{6a}{9b}$; *b)* $\dfrac{-2a}{4b}$; *c)* $\dfrac{ab}{ac}$;

d) $\dfrac{5ax^2}{10a}$; *e)* $\dfrac{12ab^3}{4ab}$; *f)* $\dfrac{8ax}{12ay}$;

g) $\dfrac{5ax}{-5ax^2}$; *h)* $\dfrac{2axy}{3ay}$; *i)* $\dfrac{12a^3}{4a^2b}$;

j) $\dfrac{6a^3b^5}{2a^2b}$; *k)* $\dfrac{12x^2y^3z}{16xy^2z^3}$; *l)* $\dfrac{3(x+y)^2}{x+y}$;

m) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$; *n)* $\dfrac{5a}{5a+15b}$; *o)* $\dfrac{2a-4}{3(a-2)}$;

p) $\dfrac{5x(y+3)}{6y+18}$; *r)* $\dfrac{x-y}{y-x}$; *s)* $\dfrac{a(x-a)}{b(a-x)}$;

t) $\dfrac{7xy^3(2a-3b)}{14xy(3b-2a)}$; *u)* $\dfrac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$; *v)* $\dfrac{2ac-4bc}{a^3c-4acb^2}$.

143. Egyszerűsítsük a következő törtkifejezéseket a változók megengedett értékei mellett:

a) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$; *b)* $\dfrac{x+2}{x^2-4}$; *c)* $\dfrac{3a^2-3}{7a+7}$;

d) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$; *e)* $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; *f)* $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$;

g) $\dfrac{3a^2-3b^2}{2a^2-4ab+2b^2}$; *h)* $\dfrac{9x^2+18xy+9y^2}{12x^2-12y^2}$; *i)* $\dfrac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}$;

j) $\dfrac{a^3-b^3}{a^4-b^4}$; *k)* $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$; *l)* $\dfrac{3a+6}{a^3+8}$;

m) $\dfrac{4x^3y+4xy^3}{x^4-y^4}$; *n)* $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{3a^4-3b^4}$; *o)* $\dfrac{25a^2-25b^2}{(5a-5b)^2}$;

p) $\dfrac{ax+bx-ay-by}{7x-7y}$; *q)* $\dfrac{a^2+2ac+c^2}{a^2+ac-ax-cx}$; *r)* $\dfrac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$;

s) $\dfrac{(x+y)^2-a^2}{x+y+a}$; *sz)* $\dfrac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$; *t)* $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$;

u) $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}$; *v)* $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$; *w)* $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$;

**x)* $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; **y)* $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$; **z)* $\dfrac{x^4-x^3-4x^2+4x}{2x-x^2}$.

144. A változók milyen értékeire teljesülnek a következő egyenlőségek?

a) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$; *b)* $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\dfrac{x+z}{(1-y)^2}$;

c) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\dfrac{1}{3a^2-b^2}$.

145. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $\dfrac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$, ha $a=113$ és $b=6$;

b) $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^2+3ab+2b^2}$, ha $a=57$ és $b=24$.

146. Milyen n pozitív egész számra lesz a következő törtkifejezések értéke is pozitív egész szám?

a) $\dfrac{5n^2+20}{n}$; b) $\dfrac{5n^2+8n+12}{n}$; c) $\dfrac{(n-3)^3}{n}$.

Az algebrai törtek összevonása

147. Végezzük el a következő összeadásokat és kivonásokat a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}$; b) $\dfrac{a}{4}-\dfrac{a}{6}$; c) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}$;

d) $\dfrac{3x-2}{5}+\dfrac{2x+3}{3}$; e) $\dfrac{2a+5}{4}-\dfrac{2a-3}{5}$;

f) $\dfrac{2c+7}{a}-\dfrac{7}{a}$; g) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x-3}{4}$;

h) $\dfrac{5a+2b}{8b}-\dfrac{5a-3b}{8b}$; i) $\dfrac{3x-2y}{2x}+\dfrac{5x-3y}{2x}-\dfrac{x-4y}{2x}$;

j) $\dfrac{a+b}{a+x}-\dfrac{a-b}{a+x}$; k) $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{1-x}$;

l) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a+2b}{b-a}$; m) $\dfrac{a}{x-y}-\dfrac{b}{y-x}+\dfrac{c}{x-y}$;

n) $\dfrac{x}{ab}+\dfrac{x}{ac}$; ny) $\dfrac{2a-3b}{a}+\dfrac{4a^2-5b^2}{ab}$;

o) $\dfrac{5x}{ab}+\dfrac{2y}{3a^2b}-\dfrac{3}{6a^2y^2}$; p) $\dfrac{5a}{6b^2c}+\dfrac{11c}{18a^2b}-\dfrac{7b}{12ac^2}$;

q) $\dfrac{2a-3b}{a^2b}-\dfrac{4a-5b}{ab^2}$; r) $\dfrac{5x^2-2x-1}{x^2y}-\dfrac{3x-2}{xy}$;

s) $2a-\dfrac{a-b}{5}$; sz) $a+\dfrac{a-ab}{b}$;

t) $\dfrac{3}{a-1}+\dfrac{2}{a}$; ty) $\dfrac{2x}{3(x-1)}+\dfrac{5x}{x-1}$;

u) $\dfrac{2a^2}{3(a+1)}+\dfrac{5a^2}{3(a+1)}$; ü) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$;

v) $\dfrac{1}{3x+y}+\dfrac{2}{3x-y}$; w) $\dfrac{2a}{5a+5b}+\dfrac{3a}{5a-5b}$;

x) $\dfrac{5b}{ax+ay}-\dfrac{2a}{bx+by}$; y) $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a}{b-a}$;

z) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{2x^2-2}$; zs) $\dfrac{7a-1}{2a^2+6a}+\dfrac{5-3a}{a^2-9}$.

148. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{3}{2a+6}-\dfrac{a-2}{a^2+6a+9}$; b) $\dfrac{5+b}{b^2-8b+16}+\dfrac{6}{5b-20}$;

c) $\dfrac{5}{2x-4}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$; d) $\dfrac{5}{2a^2+6a}-\dfrac{4-3a^2}{a^2-9}-3$;

e) $\dfrac{7}{8a^2-18b^2}+\dfrac{1}{2a^2+3ab}-\dfrac{1}{4ab-6b^2}$;

f) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}$;

g) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{x-2}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{2x+6}$;

h) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3x}{(x-1)^2}$; i) $\dfrac{7}{a}-\dfrac{4}{a-2b}-\dfrac{a-b}{4b^2-a^2}$;

j) $\dfrac{3x+2}{x^2-2x+1}-\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$;

k) $\dfrac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}+\dfrac{6}{1-a}$;

l) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$;

m) $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}$; n) $\dfrac{x^2-2ax}{a+x}+a+x$;

*o) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$;

*p) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

*q) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{a+c}{(a-b)(b-c)}$;

*r) $\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}$.

149. Milyen a és b érték mellett állnak fenn a következő egyenlőségek?

a) $\dfrac{5x}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{a}{x-2}-\dfrac{b}{x+3}$;

b) $\dfrac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{a}{x-5}-\dfrac{b}{x+2}$.

150. Milyen a értékre lesznek egyenlők az A-val, illetve B-vel jelölt kifejezések?

a) $A=\dfrac{2x}{x+3}$; $B=\dfrac{a}{x+3}+2$;

b) $A=\dfrac{2x}{3-x}$; $B=\dfrac{a}{3-x}-2$;

c) $A=\dfrac{x}{x-5}$; $B=\dfrac{a}{x-5}+1$;

d) $A=\dfrac{x+2}{5-x}$; $B=\dfrac{a}{5-x}-1$.

Algebrai törtek szorzása, osztása

151. Mivel kell megszorozni a következő kifejezéseket, hogy a szorzat értéke 1 legyen?

a) a; b) $\dfrac{a-b}{a}$; c) $\dfrac{a+b}{a-b}$;

d) $\dfrac{x+y}{2x}$; e) $x+\dfrac{1}{y}$; f) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

152. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{a}{10}\cdot\dfrac{5}{a}$; b) $\dfrac{3a^2}{x^2}\cdot\dfrac{a^3}{16x^3}$;

c) $\dfrac{2a}{3b}\cdot\dfrac{6a^2}{7b^2}\cdot\dfrac{b^3}{a^3}$; d) $\dfrac{45a^3}{14x^2}:\left(-\dfrac{18a^2}{49x^4}\right)$;

e) $\left(\dfrac{2ax}{yz}:\dfrac{3bx}{ay}\right):\dfrac{9b^2z}{8a^2xy}$; f) $\left(\dfrac{8b^2cd}{9a^5}:\dfrac{7cd}{12a^3}\right)\cdot\dfrac{14a^4}{3b^2}$;

g) $\dfrac{x^2-ax}{a^2}\cdot\dfrac{a}{x^2}$; h) $\dfrac{a-b}{4b^3}:\dfrac{a^2-ab}{8b^4}$;

i) $\dfrac{7}{4x^3-36x}\cdot\dfrac{x^2-9}{14}$; j) $\dfrac{x^2+xy}{x}\cdot\dfrac{y}{xy+y^2}$;

k) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}:\dfrac{xy}{x^2y+xy^2}$; l) $\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{a^2+ab}{2a^2-2b^2}$;

m) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^4}{(a+b)^2}$; n) $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x}:\dfrac{x^2+5x}{x^2-9}$;

o) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{3a+3b}{5a-5b}$; p) $\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2}:\left(-\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}\right)$;

q) $\dfrac{x^2-4y^2}{35xy}\cdot\dfrac{28x^2}{x^2-4xy+4y^2}$;

r) $\dfrac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{2x-2y}{ax^2+2axy+ay^2}$;

s) $\dfrac{ab^2-ac^2}{b^2+2bc+c^2}:\dfrac{ab^2-2abc+ac^2}{3b+3c}$; t) $\dfrac{a^3-8}{5a+15}\cdot\dfrac{7a+21}{a^2+2a+4}$;

u) $\dfrac{x^3+27}{8x+6}\cdot\dfrac{12x+9}{x^2+6x+9}$; v) $\dfrac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

153. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+1}$; b) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{xy}}$;

c) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; d) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$;

e) $\dfrac{\frac{2}{a}-5a}{\frac{3}{a}+5a}$; f) $\dfrac{\frac{a}{a-1}+a}{\frac{a}{a-1}-a}$;

g) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$; h) $\dfrac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$;

i) $\dfrac{1-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-1}$; j) $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$.

154. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

b) $\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)\left(a+\dfrac{1}{a}+1\right)$;

c) $\left(\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2b}{a}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2b}-\dfrac{2b}{a}\right)^2$;

d) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\dfrac{4a^2-4}{3}$;

e) $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$;

f) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$;

g) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$;

h) $\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)^2-\left(\dfrac{3a}{b}-1\right)\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)$;

i) $\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\left(a-b-\dfrac{a^2}{a+b}\right)$;

j) $\dfrac{a^2-6a+8}{a^2+4a+3}:\dfrac{a^2-4a+4}{5a+15}$.

155. Mutassuk meg, hogy ha $a\neq 0$, $y\neq -b$

$$x=\frac{2b^2-a^2+c^2}{3a} \quad \text{és} \quad y=\frac{2a^2-b^2+c^2}{3a}, \quad \text{akkor} \quad \frac{x+a}{y+b}=\frac{b}{a}.$$

156. Számítsuk ki a következő törtkifejezések helyettesítési értékét:

a) $\left(\dfrac{x+5}{2x-10}-\dfrac{x-5}{2x+10}-\dfrac{50}{25-x^2}\right)\cdot\dfrac{x-5}{5x}$, ha $x=-\dfrac{1}{4}$;

b) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}:\left(\dfrac{2xy}{y^2-x^2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}\right)$, ha $x=8{,}4$, $y=-0{,}6$;

c) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$, ha $x=-2{,}5$, $y=0{,}5$.

Műveletek algebrai törtkifejezésekkel

157. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(a+b+\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right):\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$, $a\neq\pm b$;

b) $\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right):\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}\right)$, $a\neq\pm 1$; $a\neq 0$;

c) $\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{b^2+ab}\right)$, $a\neq\pm b$;

d) $\dfrac{a+6b}{a^2-3ab}-\dfrac{9b-a}{2ab-6b^2}-\dfrac{1}{2b}$, $a\neq 0$; $b\neq 0$; $a\neq 3b$;

e) $\left(\dfrac{2a+2}{a^2+2a}+\dfrac{a}{2a+4}\right)\dfrac{2a+2}{a+2}-\dfrac{1}{a}$, $a\neq 0$; $a\neq -2$;

*f) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+$
$+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$,
$x\neq 0$; $x\neq -1$; $x\neq -2$; $x\neq -3$; $x\neq -4$; $x\neq -5$;

g) $\left(\frac{xy+y^2}{5x^2-5xy}+xy+y^2\right)\frac{5x}{x+y}-\frac{y}{x-y}$, $x\neq 0, |y|\neq |x|$;

h) $\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)(x^2-y^2)^2\cdot$
$\cdot\frac{1}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}$, $|x|\neq|y|$, $x\neq 0$.

158. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, akkor $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

159. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$,

akkor $\frac{a^2+2bc+2ac+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{c^2}$, $abc\neq 0$; $a+b\neq 0$.

***160.** Bizonyítsuk be, hogy ha $(a+b)(b+c)=0$ és $abc\neq 0$, akkor $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

***161.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ és $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$,

akkor $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $abc\neq 0$; $xyz\neq 0$.

***162.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$, $a\neq\pm b$; $a\neq\pm c$ és $b\neq\pm c$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)=9.$$

***163.** Bizonyítsuk be, hogy ha n nullától különböző természetes szám, akkor a

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)$$

kifejezés értéke is természetes szám.

4. Negatív egész kitevőjű hatványok

A negatív egész kitevőjű hatvány fogalma

164. Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) 3^{-2}; 5^{-1}; 2^{-4}; 10^{-3}; 7^{-2};

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; $0{,}1^{-4}$; $0{,}01^{-3}$;

c) $\frac{1}{3^{-2}}$; $\frac{2}{5^{-3}}$; $\frac{3}{(0{,}1)^{-1}}$; $\frac{5}{2^{-2}}$; $\frac{0{,}02}{5^{-3}}$.

165. Állapítsuk meg, hogy a következő két-két szám közül melyik a nagyobb:

a) $\frac{7}{8}$ vagy $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{4}$ vagy $(0{,}6)^{-4}$;

b) 5^{-3} vagy 7^{-3}; $(2{,}9)^{-10}$ vagy $(3{,}1)^{-10}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ vagy $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

166. Negatív hatványkitevő alkalmazásával írjuk fel a következő kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{64}$;

b) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001;

c) $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{16}$; $1\frac{2}{3}$; 2,5;

d) $\frac{1}{a^2}$; $-\frac{1}{b^4c^2}$; $\frac{1}{x^2y^3}$; $\frac{a+2}{(a-2)^2}$; $\frac{(b-5)^3}{b+5}$.

167. Írjuk fel olyan alakban a következő kifejezéseket – a változók lehetséges értékeinél –, hogy ne legyen bennük tört:

a) $\dfrac{a}{b^2}$; $\dfrac{2x}{a^{-3}}$; $\dfrac{2xy^2}{x^{-2}y^{-1}}$; $\dfrac{a^2b^{-3}}{cb^{-1}}$; $\dfrac{5a^{-2}b^{-1}}{2a^2b^{-2}}$;

b) $\dfrac{15x}{a^3b^{-1}c^{-3}}$; $\dfrac{9a^{-2}b^{-3}c}{4ab^{-1}c^{-2}}$; $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$; $\dfrac{xy}{x^{-n}y^k}$;

c) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\dfrac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$; $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}}$.

168. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy – a változók lehetséges értékeinél –, hogy ne tartalmazzanak negatív kitevőjű hatványt:

a) $3x^{-5}$; a^0b^{-2}; $2y^{-3}$; $5a^{-3}b^3$; $2x^{-2}y^3$;

b) $2ab^{-3}c^{-2}$; $5a^{-1}b^{-2}c$; $a(b+c)^{-1}$; $(x+y)(x-y)^{-1}$;

c) $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$; $\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}}$; $\dfrac{3a^{-2}b^{-1}}{x^2}$; $\dfrac{x^{-1}yz^{-2}}{a^{-3}bc^{-4}}$; $\dfrac{a^{-2}b^3}{c^{-3}b^{-2}}$;

d) $\left(\dfrac{a}{x^2}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{2a}{3x}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}$;

$\left(\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1}$;

e) $a^{-2}+b^{-2}$; $2x^{-1}-xy^{-2}$; $a^3x^{-5}+a^{-2}x^3-2a^{-4}x^{-3}$;

f) $(a+b^{-1})(a^{-1}-b)$; $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$.

169. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $0{,}2a^{-2}b^45a^3b^{-3}$, ha $a=-0{,}125$ és $b=8$;

b) $\dfrac{x^{-2}y}{2x^{-5}y^{-2}}$, ha $x=\dfrac{1}{4}$ és $y=-8$.

Műveletek negatív egész kitevőjű hatványokkal

170. Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél:

a) x^2x^{-3}; $a^{-2}a^{-3}$; $a^{-2}a^3$; a^0a^{-1}; x^3x^{-3};

b) $a^{-2}a^3a^{-4}$; $x^3x^{-2}x^{-4}$; $y^2y^{-2}y^{-1}$; $2xx^{-2}x^{-3}$;

c) $(x+x^{-1}+x^{-2})2x^2$; *d)* $(2x^2+3x^{-1}+x^{-2})x^{-2}$;

e) $(x^{-2}+y^{-2})2x^{-1}y$; *f)* $(a^{-1}+b^{-1})5a^{-1}b^{-1}$;

g) $(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})$; *h)* $(a^{-2}+b^{-1})(a^{-2}-b^{-1})$;

i) $(x^2+xy)(x^2-y^2)^{-1}(xy-y^2)$; *j)* $(a+1)(a^2-1)^{-1}a^3$;

k) $(x^{-2})^3$; $(x^3)^{-2}$; $(a^{-4})^{-2}$; $(2a^{-1})^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{3}a^{-1}b^{-2}\right)^2$;

l) $(0{,}1a^{-2}b)^{-3}$; $(-0{,}2a^{-1}b^{-2})^{-1}$; $(3x^{-2}y^{-1})^{-2}$;

m) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^2}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{c^{-2}}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{2x^2y}{a^{-2}b}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{0{,}1a^{-1}b^{-2}}{x^{-2}y^{-1}}\right)^{-1}$;

n) $(a^{-1}+b^{-1})^2$; *o)* $(a^{-2}-b^{-1})^2$; *p)* $(a^{-1}+b^{-1})^{-2}$;

q) $x^{-2}:x^2$; $x^{-2}:x^{-3}$; $a^{-3}:a^{-3}$; $a^{-3}:a^{-2}$;

r) $(x^2+x+x^{-1}+x^{-2}):x^{-1}$;

s) $(a^3b^{-3}-3ab^{-1}+3a^{-1}b-a^{-3}b^3):a^2b^{-2}$;

t) $(x^{-1}+y^{-1})^{-2}:(x+y)^{-2}$; *u)* $(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})$;

v) $ab(a^{-1}+b^{-1})(b^2-a^2)^{-1}$; *x)* $(x^{-2}-a^{-2})(a^{-1}-x^{-1})^{-1}$;

y) $(b+b^{-2})[(b^2+1)b^{-2}-b^{-1}]^{-1}$; *z)* $(ab^{-1}-a^{-1}b)(a^{-1}-b^{-1})^{-1}$.

171. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, és számítsuk ki a helyettesítési értékeket:

a) $\left(1+\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}$, ha $a=3$; $b=\dfrac{3}{4}$;

b) $(a+b)^{-2}(a^{-1}+b^{-1})+2(a-b)^{-2}(b^{-2}-a^{-2})$, ha $a=2$; $b=-1$.

A számok normálalakja

172. Írjuk fel a következő számok normálalakját:
135; 895; 1618; 15,3; 142,13; 0,5; 5000;
7 000 000; 1 001 000; 0,0012; 0,000 036; 0,005 200.

173. Írjuk le helyiértékes számírással a következő számokat:
10^3; 10^4; 10^5; 10^{-1}; 10^{-2}; $2\cdot 10^3$; $1{,}2\cdot 10^4$; $2{,}5\cdot 10^{-2}$.

174. Végezzük el a következő műveleteket:

a) 36 000 · 0,000 000 52; 0,0031 · 0,000 14;

b) 0,000 000 86 : 0,000 21; 42 000 : 0,007; 0,000 138 : 24 000;

c) $12\,000^2$; $0{,}0005^4$; $1\,280\,000^2$; $0{,}000\,11^3$.

175. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $1{,}6\cdot 10^{-5}\cdot 2{,}5\cdot 10^7$; $1{,}25\cdot 10^4\cdot 3{,}2\cdot 10^{-3}$;

$b)$ $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}$;

$c)$ $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^3}$; $\quad \dfrac{1{,}45 \cdot 10^4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}}{5{,}4 \cdot 10^{-5}}$;

$d)$ $\dfrac{7{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-3}}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-5}}$; $\quad \dfrac{6{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 4{,}05 \cdot 10^{-2}}{3{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}3 \cdot 10^{-4}}$;

$e)$ $3 \cdot 10^{-2} + 4{,}1 \cdot 10^{-3}$; $\quad 7{,}83 \cdot 10^5 + 3{,}91 \cdot 10^7$;

$f)$ $4{,}0856 \cdot 10^3 + 9{,}98 \cdot 10^{-1}$; $\quad 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-1} + 4{,}2 \cdot 10^{-5}$.

5. A négyzetgyök

A négyzetgyök fogalma

176. Számítsuk ki:

$a)$ $\sqrt{196}$; $\sqrt{1986}$; $\sqrt{8650}$; $\sqrt{10\,500}$;

$b)$ $\sqrt{15{,}45}$; $\sqrt{121{,}5}$; $\sqrt{94{,}06}$; $\sqrt{267{,}5}$;

$c)$ $\sqrt{6304{,}36}$; $\sqrt{0{,}831\,744}$; $\sqrt{518\,400}$; $\sqrt{802\,816}$;

$d)$ $\sqrt{\dfrac{289}{1024}}$; $\sqrt{\dfrac{121}{14\,641}}$; $\sqrt{1\dfrac{31}{225}}$; $\sqrt{6\dfrac{235}{361}}$.

177. Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

$a)$ $\sqrt{x+1}$; $\sqrt{x+3}$; $\qquad b)$ $\sqrt{x+2}-3$; $\sqrt{2x+1}$;

$c)$ $\sqrt{2x-1}+2$; $\sqrt{4x+2}$; $\qquad d)$ $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{(x-1)^2}$;

$e)$ $\sqrt{-x^2}$; $\sqrt{-(x-1)^2}$; $\qquad f)$ $\sqrt{1+x^2}$; $\sqrt{1-x^2}$;

$g)$ $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$; $\qquad h)$ $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$; $\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x-1}}$;

$i)$ $\sqrt{-4-x^2}$; $\sqrt{-1+2x-x^2}$; $\qquad j)$ $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$; $\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}}$

$k)$ $\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$; $\sqrt{\dfrac{x-2}{2-x}}$; $\qquad l)$ $\sqrt{\dfrac{ax+b}{a}}$; $\sqrt{\dfrac{ax+5}{a+2}}$.

178. Írjuk fel a négyzetgyök jele nélkül a következő kifejezéseket:

$a)$ $\sqrt{(a-1)^2}$; $\qquad b)$ $\sqrt{(b+2)^2}$;

$c)$ $\sqrt{x^2+2x+1}$; $\qquad d)$ $\sqrt{4y^2-4y+1}$;

$e)$ $\sqrt{(x-4)^2}$, ha $x \geqq 4$; $\qquad f)$ $\sqrt{(7+x)^2}$, ha $x < -7$;

$g)$ $\sqrt{(a-2)^2}$, ha $a < 2$; $\qquad h)$ $\sqrt{(3-a)^2}$, ha $a \geqq 3$.

179. A változók mely értékeire áll fenn az egyenlőség:

$a)$ $\sqrt{x^2-2x+1} = x-1$; $\qquad b)$ $\sqrt{a^2-6a+9} = 3-a$;

$c)$ $\sqrt{4a^2+4a+1} = 1+2a$; $\qquad d)$ $\sqrt{x^4+2x^2+1} = x^2+1$;

$e)$ $\sqrt{x^2-4x+4} = |2-x|$; $\qquad f)$ $\sqrt{x^2+2x+1}+x-1 = 2x$?

180. Melyik állítás igaz, ha $a > b > 0$?

$a)$ $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a+\sqrt{b^2} = 2a$;

$b)$ $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+a+\sqrt{b^2} = 2b$.

Négyzetgyökvonás egytagú kifejezésekből

181. Végezzük el a következő műveleteket:

$a)$ $\sqrt{100 \cdot 49}$; $\sqrt{81 \cdot 400}$; $\sqrt{121 \cdot 64}$;

$b)$ $\sqrt{121 \cdot 0{,}49}$; $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}16}$; $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 4}$;

$c)$ $\sqrt{\dfrac{25}{81} \cdot \dfrac{16}{49}}$; $\sqrt{\dfrac{64}{225} \cdot \dfrac{1}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{25}{16}}$;

$d)$ $\sqrt{810 \cdot 40}$; $\sqrt{75 \cdot 48}$; $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$;

$e)$ $\sqrt{72 \cdot 32}$; $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

$f)$ $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{6^2}$;

$g)$ $\sqrt{(-5)^4}$; $\sqrt{1{,}05^6}$; $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^4}$.

182. Végezzük el a következő műveleteket:

$a)$ $\sqrt{a^2}$; $\qquad b)$ $\sqrt{b^2}$; $\qquad c)$ $\sqrt{c^4}$;

$d)$ $\sqrt{y^6}$; $\qquad e)$ $\sqrt{x^{10}}$; $\qquad f)$ $\sqrt{(-a)^2}$;

$g)$ $\sqrt{9a^2}$, ha $a \geqq 0$; $\qquad h)$ $\sqrt{25c^4}$, ha $c > 0$;

$i)$ $\sqrt{0{,}36b^2}$, ha $b < 0$; $\qquad j)$ $\sqrt{81y^{10}}$, ha $y < 0$;

$k)$ $\sqrt{a^2c^2}$, ha $a > 0$ és $c > 0$; $\qquad l)$ $\sqrt{\dfrac{a^6b^4}{9}}$, ha $a < 0$ és $b < 0$;

m) $\sqrt{a^8b^2c^4}$; *n)* $\sqrt{a^2b^6c^{12}}$;

o) $\sqrt{9(a+b)^2}$; *p)* $\sqrt{2,89(x+y)^4}$;

q) $\sqrt{\dfrac{4a^2b^4}{81c^2d^6}}$; *r)* $\sqrt{\dfrac{64a^8b^4}{225x^6y^4}}$;

s) $\sqrt{\dfrac{3a^3b}{27ab^3}}$; *t)* $\sqrt{\dfrac{0,1a^7b^{11}}{10a^5b^7}}$;

u) $\sqrt{\dfrac{25(a-b)^2}{(x+y)^4}}$; *v)* $\sqrt{\dfrac{16(x+y)^3}{64(x+y)^7}}$;

x) $\sqrt{\dfrac{16a^2b^{2n}}{25x^2y^2}}$; *y)* $\sqrt{\dfrac{0,25x^{4n}y^2}{a^2b^2}}$.

Négyzetgyökös kifejezések átalakításai

183. Hozzuk ki a négyzetgyökjel elé a következő számokból a lehető legnagyobb természetes számot:

a) $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{108}$;

b) $\sqrt{3,36}$; $\sqrt{0,0018}$.

184. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket: (Emeljük ki a négyzetgyökjel elé, amit lehet.)

a) $\sqrt{x^2y}$, ha $x>0$, $y>0$, és ha $x<0$, $y>0$;

b) $\sqrt{xy^3}$, ha $x>0$, $y>0$, és ha $x<0$, $y<0$;

c) $\sqrt{9a^2b}$, ha $a<0$, $b>0$;

d) $\sqrt{25a^2b^3}$, ha $a>0$, $b>0$;

e) $\sqrt{144a^3b^3}$, ha $a<0$, $b<0$;

f) $\sqrt{32a^4b^3}$, ha $a<0$, $b>0$;

g) $\sqrt{75a^3b^6}$, ha $a>0$, $b<0$;

h) $\sqrt{8a^5b^7}$, ha $a<0$, $b<0$.

185. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, figyelembe véve a változók lehetséges értékeit:

a) $\sqrt{36a}$; $\sqrt{x^5}$;

b) $\sqrt{8a^4}$; $\sqrt{72a^3}$;

c) $\sqrt{0,25a^7}$; $\sqrt{25a^4b}$;

d) $\sqrt{0,16a^3b^3c^6}$; $\sqrt{1,44a^7b^8c^9}$;

e) $\sqrt{9,72a^3b^2c^3}$; $3\sqrt{16x^2yz^3}$;

f) $\dfrac{9a^2}{b}\sqrt{128b^3c^5}$; $\dfrac{3}{2}b\sqrt{\dfrac{8}{27}b^4c^3}$;

g) $\sqrt{\dfrac{a^2b}{9}}$; $\sqrt{\dfrac{25a^3b^2}{9}}$;

h) $\sqrt{\dfrac{32a^9b^8}{63c^2}}$; $\sqrt{\dfrac{3a}{27a^3b}}$;

i) $\sqrt{3(a+1)^2}$; $\sqrt{27(a-2)^3}$;

j) $\sqrt{x^3-x^2}$; $\sqrt{16a^3-32a^2}$;

k) $\sqrt{48a^5-96a^4}$; $\sqrt{x^2+2x+1}$;

l) $\sqrt{2a^2+12ab+18b^2}$; $\sqrt{18x^2y-9y^2-9x^4}$;

m) $\sqrt{a^3+3ab^2-3a^2b-b^3}$; $\sqrt{16(x^3-2x^2y+xy^2)}$;

n) $\sqrt{\dfrac{5(a+b)^2}{16}}$; $\sqrt{\dfrac{96(a-b)^3}{121}}$;

o) $\sqrt{\dfrac{3x^3-3x^2y}{3(x-y)^3}}$; $\sqrt{\dfrac{16a^4-96a^3}{98a^3-49a^2}}$;

p) $\sqrt{\dfrac{x^4y^2+x^4z^2}{y^4z^2+z^2x^4}}$; $\sqrt{\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}}$.

186. A négyzetgyökvonás elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy melyik szám nagyobb a következő két-két szám közül:

a) $3\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{20}$; *b)* $\sqrt{80}$ vagy $4\sqrt{5}$;

c) $4\sqrt{8}$ vagy $8\sqrt{2}$; *d)* $4\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{45}$;

e) $3\sqrt{2}$ vagy $5\sqrt{0,5}$; *f)* $\dfrac{1}{3}\sqrt{54}$ vagy $\dfrac{1}{5}\sqrt{150}$.

187. Négyzetgyökjel alá vitellel írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:

a) $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $1,2\sqrt{2}$; $0,1\sqrt{10}$;

b) $3\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $7\sqrt{\dfrac{2}{7}}$; $5\sqrt{\dfrac{3}{7}}$; $9\sqrt{\dfrac{4}{3}}$; $15\sqrt{\dfrac{7}{30}}$;

$9\sqrt{x}$ $\sqrt{25a}$ $\sqrt{49b}$ $\sqrt{2x^2}$ $\sqrt{a^4 3}$

c) $3\sqrt{x}$; $5\sqrt{a}$; $7\sqrt{b}$; $x\sqrt{2}$; $a^2\sqrt{3}$; $\sqrt{a^2}$ $\sqrt{x5}$
d) $a\sqrt{a}$; $b\sqrt{b^2}$; $x^2\sqrt{x}$; $a^3\sqrt{a}$; $x\sqrt{x^3}$;
e) $2a\sqrt{ab}$; $2x^2\sqrt{3xy}$; $3a^2\sqrt{2ab}$; $11x\sqrt{2x^3y}$;
$\sqrt{4a^5 2}$ $4a^2\cdot\sqrt{a2}$
f) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; $ab\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; $x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$;

g) $a\sqrt{1-\frac{1}{a}}$; *h)* $x\sqrt{1+\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}$; *i)* $2b\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2}}$;

j) $\frac{5}{7}a\sqrt{\frac{1}{5a}-\frac{1}{12a}}$; *k)* $(x+y)\sqrt{\frac{2}{x+y}}$; *l)* $(x-y)\sqrt{\frac{2}{x^2-y^2}}$;

m) $\frac{1}{1-a}\sqrt{\frac{1-3a+3a^2-a^3}{b+c}}$; *n)* $\frac{1}{a^2-1}\sqrt{a^3-a^2-a+1}$;

o) $(x+2)\sqrt{\frac{2}{x^2+5x+6}}$.

Négyzetgyökös kifejezések összevonása

188. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$; *b)* $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$;

c) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$; *d)* $5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{48}$;

e) $\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{45}$; *f)* $3\sqrt{32}-\sqrt{50}+2\sqrt{18}+3\sqrt{8}$;

g) $0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$;

h) $5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{5}$.

189. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $5\sqrt{4a}+4\sqrt{a}-8\sqrt{2a}-6\sqrt{9a}$; *b)* $8\sqrt{\frac{x}{4}}+4\sqrt{8x+1}$;

c) $3\sqrt{8a}-\sqrt{18a}-5\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{50a}-\sqrt{32a}+\sqrt{72a}+3\sqrt{\frac{a}{2}}$;

d) $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$,
ha $a\geqq 0$ és $b\geqq 0$;

e) $4a\sqrt{\frac{b}{a^3}}+\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a}}-3b\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$,
ha $a>0$ és $b>0$.

190. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{4x^2-4y^2}+\sqrt{(x+y)^2}-5\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{9x^2-9y^2}-\sqrt{(x-y)^2}$,
ha $|x|\geqq|y|$;

b) $\sqrt{2a^2-4a+2}-\sqrt{4b^2-8b+4}+\sqrt{2a^2+4a+2}+\sqrt{9b^2-18b+9}$,
ha $a, b\in\mathbf{R}$;

c) $\sqrt{9a^2-9b^2}+\sqrt{(a+b)^2}-3\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$, ha $|a|\geqq|b|$;

d) $\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\sqrt{a^4-a^6}-(1+a)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$, ha $-1<a\leqq 1$;

e) $\sqrt{\frac{18a}{a^2-2ab+b^2}}-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{8a^3}{a^4-2a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{450a}{a^2+2ab+b^2}}$,
ha $a\geqq 0$, $b\in\mathbf{R}$ $|a|\neq|b|$;

f) $\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}-2a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}+3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}$,
ha $a>x>0$.

Négyzetgyökös kifejezések szorzása

191. Írjuk fel egyszerűbb alakban a következő szorzatokat:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}$;
b) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{20}$; $\sqrt{50}\cdot\sqrt{125}$; $\sqrt{20}\cdot\sqrt{72}$; $\sqrt{15}\cdot\sqrt{32}$; $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}$;
c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$; $\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}$; $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; $\sqrt{16{,}9}\cdot\sqrt{10}$; $\sqrt{48}\cdot\sqrt{27}$;
d) $5\sqrt{8}\cdot 3\sqrt{2}$; $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$; $\frac{3}{4}\sqrt{24}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}$; $11\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{13{,}31}$.

192. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{18a}$; $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{50x}$; $\sqrt{8a}\cdot\sqrt{18a}$; $\sqrt{20a^3}\cdot\sqrt{45a^3}$;
b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$; $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab^2}$; $\sqrt{5x^2y}\cdot\sqrt{4xy^2}$;

c) $6\sqrt{5x}\cdot 0{,}4\sqrt{5x}$; *d)* $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{15b}\cdot\sqrt{75ab}$;

e) $3\sqrt{x}\cdot 2x\sqrt{\frac{a}{x}}$; *f)* $\frac{13}{12}\sqrt{\frac{8(x+y)}{13(x-y)}}\cdot\sqrt{\frac{18}{13}\cdot\frac{x-y}{x+y}}$;

g) $\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$;

**h)* $\sqrt{\frac{7a^2+7b^2}{a^3-ab^2}}\sqrt{\frac{a^6-b^6-3a^2b^2(a^2-b^2)}{28a(a^2+b^2)}}$.

193. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(\sqrt{2}+3\sqrt{18}+9\sqrt{50})\sqrt{2}$; *b)* $(\sqrt{108}+\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75})\sqrt{3}$;

c) $(4\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98})2\sqrt{2}$; *d)* $(\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$;

e) $(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})$; *f)* $(\sqrt{32}-\sqrt{12})(\sqrt{32}+\sqrt{12})$;

g) $(4\sqrt{3}+\sqrt{54})(3\sqrt{6}-4\sqrt{3})$; *h)* $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{18}-\sqrt{3})$;

i) $(3\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{20}+3\sqrt{12})$; *j)* $(3\sqrt{2}-3\sqrt{2})(3\sqrt{8}+8\sqrt{3})$;

k) $(\sqrt{125}+\sqrt{175}+\sqrt{245}+\sqrt{343})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$;

l) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$;

m) $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})$; *n)* $(\sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{8}-\sqrt{2})$;

o) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\,\sqrt{7-\sqrt{13}}$; *p)* $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\,\sqrt{7-2\sqrt{10}}$;

r) $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}\,\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}$;

**s)* $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

t) $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}$.

194. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket:

a) $(\sqrt{3}+a)(\sqrt{3}-a)$; *b)* $(3\sqrt{a}+b)(3\sqrt{a}-b)$;

c) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$; *d)* $(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})$;

e) $(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})$; *f)* $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$;

g) $(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})(\sqrt{1-x}-\sqrt{x})$;

h) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

i) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$;

j) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\,\sqrt{a-\sqrt{b}}$;

k) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\,\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}$;

l) $\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\,\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$;

m) $\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}\,\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}$.

195. Hozzuk egyszerűbb alakra – a változók lehetséges értékeinél – a következő kifejezéseket.

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$;

b) $(3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}-\sqrt{x})(3\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}-\sqrt{x})$;

c) $(\sqrt{a^3b^3}+a\sqrt{b}+\sqrt{ab^2}+1)(\sqrt{ab}-1)$;

d) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a^2+ab+b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

196. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $2a\sqrt{a}+9-(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)$, ha $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)-(\sqrt{a}-3)(a+3\sqrt{a}+9)$, ha $\sqrt{a}=\frac{1}{4}$.

Négyzetgyökös kifejezések osztása

197. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $12\sqrt{2}:4$; $15\sqrt{5}:5$; $132\sqrt{7}:12$;

b) $6\sqrt{5}:2\sqrt{5}$; $\sqrt{10}:\sqrt{5}$; $2\sqrt{15}:\sqrt{5}$;

c) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{\frac{5}{7}}}{\sqrt{\frac{7}{15}}}$;

d) $(\sqrt{12}+\sqrt{27}):\sqrt{3}$; $(6\sqrt{63}-2\sqrt{175}):2\sqrt{7}$;

e) $(5\sqrt{48}-10\sqrt{27}+15\sqrt{12}):5\sqrt{3}$.

198. Alakítsuk szorzattá a következő összegeket:

a) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; $\sqrt{42}-\sqrt{3}$; $\sqrt{21}+\sqrt{28}$;

b) $\sqrt{40}-\sqrt{30}+\sqrt{20}$.

199. Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{\sqrt{35}+\sqrt{14}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{15}-2\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{12{,}1}}{\sqrt{10}+\sqrt{6{,}05}}$.

200. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, ha a négyzetgyökjel alatti kifejezések pozitívok:

a) $12\sqrt{a}:3$; $\dfrac{10}{3}\sqrt{x}:5$; $2\sqrt{b}:4$;

b) $\sqrt{3a}:\sqrt{a}$; $\sqrt{8x}:\sqrt{x}$; $\sqrt{12a}:\sqrt{3a}$;

c) $\dfrac{\sqrt{a^2x}}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{\sqrt{5a^3}}{\sqrt{15a}}$; $\dfrac{\sqrt{144c}}{\sqrt{c^3}}$;

d) $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{x-y}$;

e) $\sqrt{x^4-y^4}:\sqrt{x^2+y^2}$; *f)* $\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{x-y}$;

g) $\sqrt{\dfrac{2ax}{3yz}}:\sqrt{\dfrac{xz}{9ay}}$; *h)* $\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{y}{x}}:\dfrac{y}{x}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

i) $\sqrt{x^2-y^2}:\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$; *j)* $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}:\sqrt{\dfrac{y-x}{y+x}}$;

k) $\sqrt{\dfrac{x}{y}-1}:\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}-1}$; *l)* $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}+1}:\sqrt{1-\dfrac{x-y}{x+y}}$;

m) $\sqrt{x^2+2+\dfrac{1}{x^2}}:\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$; *n)* $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}):\sqrt{xy}$;

o) $(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}-xy):\sqrt{xy}$; *p)* $\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}-\sqrt{x}\right):x\sqrt{x}$.

201. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket, ha a négyzetgyökjel alatti kifejezések pozitívok:

a) $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$; *b)* $\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}$;

c) $a+\sqrt{a}$; *d)* $ab-\sqrt{a}$;

e) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$; *f)* $a+b-\sqrt{a^2-b^2}$;

g) $\sqrt{a^3-b^3}+\sqrt{a-b}$; *h)* $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

i) $a+\sqrt{a}-a^2-\sqrt{a^3}$; *j)* $x+5\sqrt{x}+6$;

k) $a-\sqrt{a}-6$; **l)* a^2+a+1.

Négyzetgyökös kifejezések hatványozása

202. Végezzük el a következő hatványozásokat:

a) $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt{(-5)^2})^2$; $(\sqrt{-5})^2$; $(-\sqrt{5})^2$;

b) $(2\sqrt{3})^2$; $(5\sqrt{2})^2$; $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{8}\right)^2$;

c) $(\sqrt{2})^3$; $(\sqrt{5})^4$; $(\sqrt{5^2})^3$;

d) $(-\sqrt{3})^3$; $(-2\sqrt{5})^4$; $(-3\sqrt{7})^3$;

e) $(\sqrt{2}+1)^2$; *f)* $(\sqrt{5}-1)^2$;

g) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; *h)* $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$;

i) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2$; *j)* $(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$;

k) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2$; *l)* $\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$;

m) $(\sqrt{3+\sqrt{2}}-1)^2$; *n)* $(2+\sqrt{3-\sqrt{2}})^2$;

**o)* $(\sqrt{12}+\sqrt{3}+1)^2$; **p)* $(3\sqrt{15}+2\sqrt{5}-5\sqrt{10})^2$;

q) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$; *r)* $(\sqrt{2+2\sqrt{3}}-\sqrt{2-2\sqrt{3}})^2$;

s) $(\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{7}}-\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{7}})^2$; *sz)* $(\sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}})^2$;

t) $\sqrt{\sqrt{5}+4}+\sqrt{4-\sqrt{5}})^2$; *u)* $(\sqrt{15+\sqrt{200}}-\sqrt{15-10\sqrt{2}})^2$;

v) $(\sqrt{3}-1)^3$; *x)* $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3$;

y) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$; *z)* $\left(\sqrt{15}-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3$.

203. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, a változók lehetséges értékeinél:

a) $(\sqrt{a})^2$; *b)* $(\sqrt{a^3})^2$;

c) $(\sqrt{a^5})^4$; *d)* $(\sqrt{x^4})^3$;

e) $(3\sqrt{a})^3$; *f)* $(-2\sqrt{a^3})^3$;

g) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^3}\right)^3$; *gy)* $\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{a^5}\right)^2$;

h) $(\sqrt{x^2y})^2$; *i)* $(-\sqrt{x^2y})^2$;

j) $(a\sqrt{ab})^3$; *k)* $\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$;

l) $\left(2x\sqrt{\frac{a}{2x}}\right)^3$; *m)* $\left(\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2(x-y)^4}}\right)^3$;

n) $(\sqrt{a})^n$; *ny)* $(\sqrt{a^n})^3$;

o) $(\sqrt{a^3})^n$; *p)* $(\sqrt{a^{n-1}})^{n+1}$;

q) $[\sqrt{(a+b)^2}]^n$; *r)* $[\sqrt{a-b})^3]^n$;

s) $(x-\sqrt{x})^2$; *sz)* $\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2$;

t) $\left(a\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$; *ty)* $\left(\frac{1}{4}\sqrt{ab}+2\sqrt{a}\right)^2$;

u) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$; *ü)* $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y}}\right)^2$;

v) $(\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}})^2$; *w)* $(3\sqrt{a-2\sqrt{b}}-2\sqrt{a+2\sqrt{b}})^2$;

x) $(\sqrt{5\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{5\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2$; *y)* $(\sqrt{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{y}})^2$;

z) $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^3$; *zs)* $\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3$.

204. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}};\quad a\geqq 0;\ b\geqq 0;\ a^2\geqq b;$

b) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a-\sqrt{b}};\quad a\geqq 0;\ b\geqq 0;\ a^2\geqq b.$

Az *a)*, illetve *b)* egyenlőséget felhasználva alakítsuk át a következő kifejezéseket:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{5-\sqrt{21}}$, $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

205. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{17-4\sqrt{15}}=2\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{30(4-\sqrt{15})}=5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$;

d) $\sqrt{546-84\sqrt{42}}=6\sqrt{7}-7\sqrt{6}$;

e) $\sqrt{5(9-4\sqrt{5})}=5-2\sqrt{5}$.

206. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül?

a) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$ vagy $30-12\sqrt{6}$;

b) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$.

A tört számlálójának, vagy nevezőjének gyöktelenítése

207. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét, a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; $\frac{12}{\sqrt{6}}$; $\frac{5}{\sqrt{10}}$; $\frac{7}{\sqrt{7}}$; $\frac{25}{\sqrt{10}}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$; $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{12}{7\sqrt{3}}$; $\frac{35}{4\sqrt{7}}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$; $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;

d) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{x}{\sqrt{y}}$; $\frac{a^2}{\sqrt{ab}}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\frac{ax}{\sqrt{x}}$;

e) $\frac{ab}{\sqrt{ab}}$; $\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{b}}$; $\frac{5x}{3\sqrt{xy}}$; $\frac{2xy^2}{\sqrt{xy}}$;

f) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; *g)* $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$;

h) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$; *i)* $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$;

j) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$; *k)* $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$;

l) $\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}$; *m)* $\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$;

n) $\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; *o)* $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;

$p)\ \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$ - $\qquad q)\ \dfrac{10}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$;

$r)\ \dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; $\qquad s)\ \dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$.

208. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét, a változók lehetséges értékeinél:

$a)\ \dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$; $\quad b)\ \dfrac{9}{\sqrt{19}-4}$; $\quad c)\ \dfrac{12}{5-\sqrt{17}}$; $\quad d)\ \dfrac{28}{\sqrt{5}-1}$;

$e)\ \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\quad f)\ \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; $\quad g)\ \dfrac{6}{2\sqrt{3}-3}$; $\quad gy)\ \dfrac{6}{3\sqrt{2}-4}$;

$h)\ \dfrac{42\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+6}$; $\quad i)\ \dfrac{18\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$; $\quad j)\ \dfrac{15}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$; $\quad k)\ \dfrac{12}{7\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$;

$l)\ \dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}$; $\quad m)\ \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$; $\quad n)\ \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; $\quad ny)\ \dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$;

$o)\ \dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$; $\quad p)\ \dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$; $\quad q)\ \dfrac{a}{\sqrt{a}-2}$; $\quad r)\ \dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

$s)\ \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; $\qquad sz)\ \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

$t)\ \dfrac{a+b\sqrt{b}}{a-b\sqrt{b}}$; $\qquad ty)\ \dfrac{2}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$;

$u)\ \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; $\qquad ü)\ \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}$;

$v)\ \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{y}}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$; $\qquad w)\ \dfrac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$;

$x)\ \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$; $\qquad {}^*y)\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

${}^*z)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\qquad {}^*zs)\ \dfrac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

209. Gyöktelenítsük a következő törtek számlálóját, a változók lehetséges értékeinél:

$a)\ \dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$; $\qquad b)\ \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{9}$;

$c)\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; $\qquad d)\ \dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{xy}$;

$e)\ \dfrac{a-b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}$; $\qquad f)\ \dfrac{\sqrt{(a-b)^3}}{a^2-b^2}$.

210. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

$a)\ \sqrt{50}-\sqrt{12}=\dfrac{20-\sqrt{96}}{2\sqrt{2}}$; $\qquad b)\ \sqrt{160}-\sqrt{120}=\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$;

$c)\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

211. Végezzük el a következő műveleteket:

$a)\ \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$;

$b)\ \sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$;

$c)\ (\sqrt{6}+\sqrt{2})\,(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}$;

$d)\ \sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

$e)\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$;

$f)\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}},\quad x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x\neq y$;

$g)\ \dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}},\quad y\geqq 0,\ x\neq 0,\ y\neq 1$;

h) $\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\frac{1}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$, $\quad |a|>|b|,\ b\neq 0;$

i) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a}{\sqrt{ab}+b}\right)$, $\quad a>0,\ b\geqq 0,\ a\neq b;$

j) $\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{a-\sqrt{a^2-4a}}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{a+\sqrt{a^2-4a}}$, $\quad a\geqq 4;$

k) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\quad a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ a\neq b;$

l) $\frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9}\ \frac{\sqrt{a^3}-27}{\sqrt{a}+3}-\sqrt{a}$, $\quad a\geqq 0;$

m) $\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{8}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}+\sqrt{2a}\right)\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2}\right)^2$, $\quad a\geqq 0,\ a\neq 2.$

212. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

a) $4a^3-8a^2+2a+3$, ha $a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

b) $\frac{(a-1)\sqrt{3}}{\sqrt{a^2-a+1}}$, ha $a=2-\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, ha $a=\frac{5}{4}$;

d) $\frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}}+\frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$, ha $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$;

e) $\left(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$, ha $a=4$ és $b=2$;

f) $\frac{2a}{1-a^2}$, ha $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

213. Igazoljuk, hogy ha $x>0$ és $x\neq 2$, akkor

$$\frac{\sqrt{2x}-\frac{2x}{x+\sqrt{2x}}}{\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}}=x.$$

214. Bizonyítsuk be, hogy ha $|x|\geqq 1$ és $|y|\geqq 1$, akkor

$$\frac{1+(x+\sqrt{x^2-1})^2\,(y+\sqrt{y^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})\,(y+\sqrt{y^2-1})}=2(xy+\sqrt{(x^2-1)\,(y^2-1)}).$$

215. Bizonyítsuk be, hogy ha $x\neq y$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, akkor

$$\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{y^2}}{y}\right)=1.$$

216. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>b>0$ és $x=\sqrt{ab}$, akkor

a) $\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=1;$

b) $\frac{\sqrt{(a+x)\,(x+b)}+\sqrt{(a-x)\,(x-b)}}{\sqrt{(a+x)\,(x+b)}-\sqrt{(a-x)\,(x-b)}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$

6. Az *n*-edik gyök

Az *n*-edik gyök fogalma

217. Végezzük el a következő gyökvonásokat.

a) $\sqrt{9}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{81}$;

b) $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[12]{1}$; $\sqrt[3]{0{,}027}$; $\sqrt[4]{0{,}0625}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; $\sqrt[5]{\frac{32}{100\,000}}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$;

d) $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[7]{-1}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$;

e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$; $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

f) $\sqrt[4]{(-1)^2}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{-81}$.

218. A változó milyen értékére áll fenn a következő egyenlőség?

a) $\sqrt{a^2} = a$; b) $\sqrt[3]{a^3} = a$;

c) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; d) $\sqrt[5]{a^5} = -a$;

e) $\sqrt[6]{a^6} = |a|$; f) $\sqrt[10]{a^{10}} = |a|$.

219. Végezzük el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[4]{a^4}$, ha $a \geqq 0$; b) $\sqrt[6]{a^6}$, ha $a<0$;

c) $\sqrt[5]{a^5}$, ha $a>0$; d) $\sqrt[8]{a^8}$, ha $a<0$.

220. Hozzuk egyszerűbb alakra – a gyökjel alól való kiemeléssel – a következő kifejezéseket.
(A gyökjel alatti kifejezésekben szereplő változók csak pozitív értéket vehetnek fel.)

a) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{72}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{256}$;

b) $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[4]{48}$; $\sqrt[5]{96}$; $\sqrt[5]{1215}$;

c) $\sqrt[3]{8a^2}$; $\sqrt[5]{5a^5}$; $\sqrt[3]{24x^4}$; $\sqrt[4]{a^5b^8}$; $\sqrt[3]{3a^4b^3}$;

d) $\sqrt[n]{x^{n+2}}$; $\sqrt[n]{a^{n+1}b^{2n}}$; $\sqrt[n]{x^{2n+1}}$; $\sqrt[n+1]{a^{n+3}}$; $\sqrt[n-1]{a^{2n+3}}$.

221. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy a gyökjel előtt álló kifejezéseket vigyük a gyökjel alá (a kifejezések pozitívok):

a) $3\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[5]{3}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; $\frac{1}{3}\sqrt[4]{9}$;

b) $a\sqrt[3]{a}$; $a^2\sqrt[3]{a}$; $a^2\sqrt[3]{ab}$; $2a\sqrt[3]{2a}$; $ax\sqrt[5]{a}$;

c) $ax\sqrt[4]{\frac{b}{a^2}}$; $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $\frac{3a}{x}\sqrt[3]{\frac{2x}{9a^2}}$; $\frac{a^3b}{c^2}\sqrt[3]{\frac{1}{ab}}$;

d) $2ax\sqrt[3]{\frac{1}{2x}+\frac{1}{a}}$; $(x-y)\sqrt[3]{\frac{1}{x-y}}$; $(x+y)\sqrt[3]{\frac{3}{(x+y)^2}}$;

e) $2x\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}$; $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{a^2-2ab+b^2}{(a+b)^2}}$;

f) $a\sqrt[n]{ab}$; $ab\sqrt[n]{ab}$; $x^k\sqrt[n]{x}$; $a^n b\sqrt[n]{ab^n}$.

Műveletek gyökös kifejezésekkel

222. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; $\sqrt[4]{625\cdot 16}$; $\sqrt[3]{27\cdot 125}$;

b) $\sqrt[3]{0,001\cdot 125}$; $\sqrt[4]{0,0016\cdot 81}$; $\sqrt[5]{243\cdot\frac{1}{32}}$;

c) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; $\sqrt[4]{54\cdot 24}$; $\sqrt[3]{75\cdot 45}$;

d) $\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{36}$; $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{20}$;

e) $\sqrt[4]{25\cdot 2}\cdot\sqrt[4]{25\cdot 8}$; $\sqrt[6]{7^4\cdot 2^3}\cdot\sqrt[6]{7^2\cdot 2^3}$;

f) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}$; $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

g) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[3]{a^5b}\cdot\sqrt[3]{a^3b^3}$; $\sqrt[4]{2a}\cdot\sqrt[4]{8a^3}$;

h) $\sqrt[3]{\frac{24a^2}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{a^7}{b^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^7}{a^3}}$; $\sqrt[5]{\frac{a^2x^3}{3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{96a^3}{x^2}}$;

i) $\sqrt[3]{a-b}\,\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}$; $\sqrt[3]{a^2-b^2}\,\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a+b}}$.

223. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{64}:\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[3]{100\,000}:\sqrt[3]{100}$;

b) $\sqrt[3]{0,001}:\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{0,04}:\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{\frac{9}{8}}:\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$;

c) $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$; $\sqrt[3]{2a^7}:\sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[4]{3x^5}:\sqrt[4]{x}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{12a^5}{b^2}}:\sqrt[3]{\frac{3a^2}{2b}}$; $\sqrt[4]{\frac{4a^7}{3b^2}}:\sqrt[4]{\frac{9a^3}{4b^7}}$; $\sqrt[5]{\frac{2a^3}{b}}:\sqrt[5]{\frac{4a}{b^2}}$.

224. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3$; $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3$; $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$;

b) $(\sqrt{a})^4$; $\left(\sqrt[3]{a}\right)^9$; $\left(2\sqrt[3]{a^2}\right)^3$; $\left(a\sqrt[3]{ax}\right)^4$;

c) $\left(a\sqrt[3]{a}\right)^3$; $(x\sqrt{xy})^4$; $\left(x^2\sqrt[3]{x^2y}\right)^2$;

d) $\left(\frac{a}{b}\sqrt[4]{a^2b^3}\right)^3$; $\left(\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^3$; $\left(\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y^2}{x}}\right)^4$;

e) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n+1}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n+1}$; $\left(\sqrt[2n]{x^n}\right)^6$; $\left(\sqrt[4n]{x^{2n}}\right)^4$.

225. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)$;

b) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16}\right)\left(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}\right)$;

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$;

e) $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$.

Gyökös kifejezések átalakításai

226. Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4b}}$;

c) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$; $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{25}}$;

d) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}$;

e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$;

f) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$.

227. Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt[6]{25^3}$; $\sqrt[4]{36^2}$; $\sqrt[9]{27^3}$; $\sqrt[20]{625^5}$;

b) $\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[8]{16}$; $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[6]{1000}$;

c) $\sqrt[4]{a^{12}}$; $\sqrt[8]{a^4}$; $\sqrt[12]{x^6}$; $\sqrt[25]{a^{15}}$;

d) $\sqrt[4]{4a^6b^4}$; $\sqrt[6]{8a^6b^9c^3}$; $\sqrt[10]{32x^5y^{15}z^{10}}$.

228. Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{4}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{3}$;

b) $\sqrt{a}\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[5]{a}\sqrt[10]{b}$; $\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}$;

c) $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$;

d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[4]{3}$;

e) $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\sqrt[6]{\frac{1}{a}}$; $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt[6]{x}$.

229. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$; $\frac{15}{\sqrt[4]{125}}$; $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$;

b) $\frac{x}{\sqrt[4]{x}}$; $\frac{2a}{\sqrt[4]{a^3}}$; $\frac{a}{\sqrt[5]{a}}$; $\frac{x}{\sqrt[n]{x}}$;

c) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$; $\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}$; $\frac{a+1}{\sqrt[5]{a+1}}$;

**d)* $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a}+1}$; $\frac{a-1}{\sqrt[4]{a}-1}$.

230. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{8}\right)\sqrt{2}$; *b)* $\left(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{25}\right)\sqrt[4]{2}$;

c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[4]{27}\right)\sqrt{3}$; *d)* $(\sqrt{2}+1)\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$;

e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)$; *f)* $\sqrt{9-4\sqrt{5}}\sqrt{2+\sqrt{5}}$;

g) $\left(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3}\right)$;

h) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(0,5\sqrt{x}-1,5\sqrt[6]{x^5}\right)$;

i) $\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[3]{3}}$; *j)* $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a}}$; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[10]{a}}$;

k) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{\frac{a}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}:\sqrt[6]{a}$; $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{a}{b}}$.

231. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{(a^2-b^2)^4}{(a+b)^8}}$, $a\neq\pm b$;

**b)* $\left[\left(\frac{1}{a}-\sqrt[6]{\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{a^2}\right)^2-\frac{2}{a^2}\sqrt[6]{a^5}-\frac{3}{a}\sqrt[3]{a^2}\right]:a\sqrt[3]{a}$, $a>0$;

c) $\left[\sqrt{b}-\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{a}{\sqrt{ac}}\right):\frac{\sqrt{a}}{c}\right]\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}}$, $a>0$, $b\geqq0$, $c>0$;

d) $\left[\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}-a\right)^2+\frac{7}{4}a\sqrt{a}-a^2\right]:a\sqrt{a}$, $a\geqq0$;

**e)* $\left(\sqrt[3]{8a^9-8a^6b^3}-a\sqrt[3]{a^6-a^3b^3}+b\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}-1}\right):\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$, $b\neq0$;

**f)* $a^3\left[\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{a+\sqrt{ab}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$, $a>0$, $b\geqq0$;

**g)* $\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2}\sqrt{b}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$, $a>0, b>0$;

**h)* $\left[\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right]\cdot\frac{a+b}{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}$,

$a\neq-b$, $a\neq\pm2b$, $a\neq0$, $b\neq0$.

***232.** Számítsuk ki a következő kifejezés értékét, ha

$x=\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$ és $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$:

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}-4\sqrt[n]{x^2-1}+1.$$

***233.** Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ egész szám.

III.

7. Törtkitevőjű hatványok

A törtkitevőjű hatvány fogalma

234. Számítsuk ki a következő hatványok értékét:

a) $100^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $8^{\frac{4}{3}}$; $0^{\frac{4}{9}}$;

b) $27^{-\frac{1}{3}}$; $8^{-\frac{2}{3}}$; $32^{-\frac{4}{5}}$; $16^{1,5}$; $100^{-\frac{5}{2}}$;

c) $0,25^{-\frac{3}{2}}$; $0,01^{-2,5}$; $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$; $\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

235. Írjuk fel gyökjel segítségével a következő törtkitevőjű hatványokat (a hatványok alapja pozitív):

$a)\ 3^{\frac{1}{7}};\quad 7^{\frac{3}{5}};\quad 2^{\frac{2}{3}};\quad 6^{-\frac{1}{3}};\quad 10^{-0,5};$

$b)\ 2{,}5^{-\frac{2}{3}};\quad (0{,}5)^{0,5};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}};\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}};\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}};$

$c)\ a^{\frac{1}{3}};\quad b^{\frac{2}{5}};\quad a^{1,2};\quad a^{-\frac{3}{5}};\quad a^{-1,5};$

$d)\ 3x^{\frac{1}{2}};\quad (3x)^{\frac{1}{2}};\quad \frac{1}{5}a^{\frac{1}{5}};\quad 2y^{-\frac{2}{3}};\quad -4x^{\frac{2}{5}};$

$e)\ (ab)^{\frac{2}{3}};\quad ab^{\frac{2}{3}};\quad a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}};\quad (a+b)^{\frac{2}{3}}.$

236. Írjuk fel törtkitevő segítségével a következő gyökös kifejezéseket:

$a)\ \sqrt{a};\quad \sqrt[3]{a^2};\quad \sqrt[5]{4x};\quad \sqrt[4]{b^3};\quad \sqrt[3]{ab};$

$b)\ \sqrt[3]{a^2b};\quad \sqrt{2xy^3};\quad \sqrt[4]{0{,}1a^4b^2};\quad \sqrt[5]{32x^{10}y^5};$

$c)\ \sqrt{x\sqrt{x}};\quad \sqrt[3]{a\sqrt{a}};\quad \sqrt{b\sqrt[3]{b}};\quad \sqrt{x\sqrt[2]{x}}.$

Műveletek törtkitevőjű hatványokkal

237. Végezzük el a kijelölt műveleteket (a hatványok alapja pozitív):

$a)\ 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}};\quad 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{3}};\quad 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}};\quad 7^{\frac{2}{3}}\cdot 7^{\frac{4}{3}};$

$b)\ aa^{\frac{1}{2}};\quad a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}};\quad x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}};\quad x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}};$

$c)\ a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}};\quad a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{4}};\quad 2x^{\frac{2}{3}}x^{-1};\quad 5x^{-\frac{1}{4}}x^{-2};$

$d)\ 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}2a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}};\quad 5x^2y^{\frac{2}{5}}2x^{-\frac{1}{2}}y^{1,5};$

$e)\ \left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}};\quad \left(2a+3a^{\frac{1}{2}}\right)4a^{\frac{3}{2}}b^{-1};$

$f)\ \left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right);\quad \left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right);$

$g)\ \left(2a^{\frac{1}{3}}+b^{-1}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}-b^{-1}\right);\quad \left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)^2;$

$h)\ \left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2;\quad \left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^3;$

$i)\ \left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}+1\right);\quad \left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right);$

$j)\ \left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right);$

$k)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2;$

$l)\ \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a};\quad \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}};\quad \frac{2x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}};\quad \frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{ab};\quad \frac{2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}};$

$m)\ \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1};\quad \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}};\quad \frac{x^{\frac{1}{2}}-3}{x-9};\quad \frac{x-2}{(x^2)^{\frac{1}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+(2^2)^{\frac{1}{3}}};$

$n)\ \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^4;\quad \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^2;\quad \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}};\quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}};\quad \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{5}};$

$o)\ \left(x^2y^{\frac{1}{3}}\right)^3;\quad \left(3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^6;\quad \left(2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3;\quad \left(x^{12}y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}};$

$p)\ \left(x^{\frac{3}{2}}x\right)^{-\frac{3}{5}};\quad \left(\frac{4a^4}{9b^2}\right)^{-\frac{1}{2}};\quad \left(\frac{64b^{-3}}{125a^6}\right)^{\frac{1}{3}}.$

238. Végezzük a kijelölt műveleteket (a hatványok alapja pozitív):

$a)\ \left(2a^{\frac{1}{2}}-1\right)2-\left(3a^{\frac{1}{3}}+6\right):3;\quad b)\ \left(3x^{\frac{2}{3}}-x\right)x^{\frac{1}{2}}+2x\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right);$

$c)\ \left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)+\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right);$

$d)\ 5a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)-2\left(b-a^{\frac{1}{2}}\right)^2;$

$e)\ (a+2)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+2\right)(a+4);$

$f)\ \left(x^{\frac{3}{5}}+1\right)^2-\left(x^{\frac{2}{5}}+1\right)\left(x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+1\right);$

$g)\ \frac{a-x}{a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x},\quad a\neq x;$

$h)\ \dfrac{5x^{\frac{1}{2}}-1}{3x-3}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{2x^{\frac{1}{2}}+2}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{3x^{\frac{1}{2}}-3},\qquad x\neq 1.$

Feladatok törtkitevőjű hatványokkal

239. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket (a hatványok alapja pozitív):

$a)\ \sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y^{-1}y^{\frac{2}{3}}}};\qquad b)\ \left[8a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}a\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right]^{\frac{1}{3}};$

$c)\ \left[\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right]\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-y}-\dfrac{2y}{x-y},\qquad x\neq y;$

$*d)\ \left[\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right]\dfrac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}},\qquad a\neq b;$

$e)\ \left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}\dfrac{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}{x-a},\qquad x\neq a;$

$*f)\ \left[\dfrac{4x-9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{x-4+3x^{-1}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right]^2,\qquad x\neq 1,\ \dfrac{3}{2};$

$g)\ \left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(a^{-1}+b^{-1})+\dfrac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^3}\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right).$

240. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:

$a)\ \left(2x^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{4}}\right),\qquad$ ha $x=1{,}2$ és $y=4$;

$*b)\ \dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1},\qquad$ ha $a=5$.

8. A logaritmus

A logaritmus fogalma

241. Írjuk fel hatványalakban a következő egyenlőségeket:

a) $\lg 100=2;\quad \lg 10=1;\quad \lg 1=0;\quad \lg 0{,}01=-2;$

b) $\lg 2=0{,}3010;\quad \lg 5=0{,}6990;\quad \lg\pi=0{,}4971;$
$\lg 0{,}096=0{,}9823-2;$

c) $\lg 10^{-1}=-1;\quad \lg 5^0=0;\quad \lg 10^3=3;\quad \lg\sqrt{10^3}=1{,}5;$

d) $\log_3 9=2;\quad \log_5 125=3;\quad \log_{10}\dfrac{1}{10}=-1;\quad \log_4 2=\dfrac{1}{2};$

e) $\log_2\dfrac{1}{64}=-6;\quad \log_{\frac{1}{3}}81=-4;\quad \log_{81}\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{4};$
$\log_{\sqrt{2}}8=6;$

f) $\log_3\sqrt[3]{9}=\dfrac{2}{3};\quad \log_5\sqrt[3]{5}=\dfrac{1}{3};\quad \log_3(\lg 10)=0;$

$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3}=-2;$

g) $\log_a a=1;\quad \log_a 1=0;\ \log_b b^2=2;\ \log_b\dfrac{1}{b}=-1;$

h) $\log_a\sqrt{a}=\dfrac{1}{2};\quad \log_{a^2}a=\dfrac{1}{2};\quad \log_{a^n}a=\dfrac{1}{n};\quad \log_{\sqrt{a}}a=2.$

242. Írjuk fel a következő egyenlőségeket a log jelöléssel:

a) $10^1=10;\quad 10^2=100;\quad 10^3=1000;\quad 10^{-1}=\dfrac{1}{10};$

b) $10^{0{,}3010}=2;\quad 10^{1{,}3010}=20;\quad 10^{0{,}4971}=\pi;\quad \sqrt{10}=3{,}162;$

c) $2^3=8;\quad 2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4};\quad 3^{-3}=\dfrac{1}{27};\quad 25^{\frac{1}{2}}=5;$

d) $5^0=1;\quad 0{,}01^{-1{,}5}=1000;\quad 3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2};\ 8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2};$

e) $a^0=1;\quad a^1=a;\ a^b=c;\quad a^c=b.$

243. Adjuk meg a következő kifejezések értékét:

a) $\lg 10;\quad \lg 100;\quad \lg 0{,}1;\quad \lg 1;$

b) $\lg\sqrt{1000}$; $\lg\sqrt[3]{100}$; $\lg\sqrt{0,1}$; $\lg 2$;
c) $\lg 50$; $\lg 1,5$; $\lg 22,3$; $\lg(-0,5)$;
d) $\log_2 2$; $\log_2 4$; $\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_{\sqrt{2}} 4$;
e) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27$; $\log_{16} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$;
f) $\log_a \sqrt[3]{a}$; $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$; $\log_a \frac{1}{a}$; $\log_a \sqrt[n]{a}$.

244. Oldjuk meg a következő egyenleteket:
a) $\log_2 a = 4$; $\log_3 b = 2$; $\log_5 b = 3$;
b) $\lg b = -2$; $\log_{\frac{1}{2}} a = -1$; $\log_{11} b = 0$;
c) $\log_4 b = 1,5$; $\log_6 b = 3$; $\lg c = 0,3010$;
d) $\log_a x = 2$; $\log_b y = -1$; $\log_a x = -1,5$.

245. Oldjuk meg a következő egyenleteket:
a) $\log_a 8 = 3$; $\log_a 16 = 2$; $\log_c 15 = 1$;
b) $\log_a 81 = 4$; $\log_a 64 = 2$; $\log_a \frac{1}{9} = -1$;
c) $\log_a 0,25 = -2$; $\log_b \sqrt{2} = \frac{1}{4}$; $\log_c \sqrt[3]{3} = \frac{1}{6}$;
d) $\log_a \frac{1}{25} = -2$; $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$; $\log_a 2 = 3$;
e) $\log_a x = 1$; $\log_b a^n = n$; $\log_c a^n = 2n$.

A logaritmus azonosságai

246. A logaritmus azonosságainak felhasználásával írjuk fel a következő kifejezések logaritmusát, a benne szereplő számok és változók logaritmusával kifejezve.
a) $x = abc$; $x = 5bc$; $x = 100(a+b)$;
b) $x = a^2b$; $x = \frac{2ab}{3}$; $x = \frac{10}{abc}$;
c) $x = \frac{2a^3}{bc}$; $x = 12ab^2c^4$; $x = \frac{4r^3\pi}{3}$;

d) $x = 3a-6b$; $x = \frac{a^2-ab}{2bc}$; $x = \frac{3a^3b}{2a+2b}$;
e) $x = a\sqrt{b}$; $x = a\sqrt[3]{b}$; $x = a^2b\sqrt{2c}$;
f) $x = a^2\sqrt[3]{b^2}$; $x = \frac{\sqrt[4]{a}}{b^2}$; $x = \frac{2a^2b\sqrt[3]{cd^2}}{3nl^3}$;
g) $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$; $x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$; $x = \left(\sqrt[5]{\frac{2a}{b^2}}\right)^3$;
h) $x = \sqrt{a\sqrt[3]{ab}}$; $x = \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b}}$; $x = 3\lg 2$.

247. Fejezzük ki x-et a következő egyenlőségekből:
a) $\lg x = \lg 2,4 + \lg 15$; $\lg x = 2\lg 12 - \lg 18$;
b) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 8 - \frac{1}{2}\lg 2$; $\lg x = -2\lg 5 + 3\lg 2$;
c) $\log_a x = \log_a b + \log_a c$; $\log_a x = k\log_a b$;
d) $\log_a x = 2\log_a b - 4\log_a c$; $\log_a x = \frac{2}{3}(\log_a b - \log_a d)$;
e) $\log_a x = \frac{2}{5}\log_a b - \frac{1}{3}\log_a c$; $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a(b-d)$.

248. Egyenlők-e a következő kifejezések?

a) $\lg(5+6)$	és	$\lg 5 + \lg 6$;	
b) $\lg 0,2 + \lg 0,5$	és	$\lg 0,7$;	
c) $\lg(x(x-2))$	és	$\lg x + \lg(x-2)$,	ha $x>2$;
d) $\lg\frac{x}{x-5}$	és	$\lg x - \lg(x-5)$,	ha $x>5$;
e) $\lg x^2$	és	$2\lg x$,	ha $x>0$;
f) $\lg\sqrt{x}$	és	$\frac{1}{2}\lg x$,	ha $x>0$.

249. Számítsuk ki a következő kifejezések számértékét:
a) $3^{\log_3 7}$; $4^{\log_2 3}$; $2^{\log_4 5}$;
b) $10^{1-\lg 2,5}$; $10^{-\lg 5}$; $10^{\lg 6 + \lg 5}$;

c) $10^{\lg 3-\lg 30}$; $\quad (\sqrt{10})^{2+\lg 25}$; $\quad \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}$;

d) $25^{\log_5 3}$; $\quad 36^{\log_6 2}$; $\quad 81^{\log_3 2}$;

e) $5^{1-\log_5 7}$; $\quad 100^{1-\lg\frac{5}{2}}$; $\quad 5^{1+\log_{25} 7}$;

f) $7^{\log_{\sqrt{7}} 5+\log_{49} 9}$; $\quad 13^{\log_{\sqrt{13}} 3+\log_{13} 2}$;

g) $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; $\quad 100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$;

h) $\lg\sqrt{275}+\lg\sqrt{44}-\lg 11$;

i) $2\lg 2+6\lg\sqrt{5}+\lg 18-2\lg 3$;

j) $\dfrac{\lg 5+\lg 2}{\lg 6}(\lg 9+2\lg 2)$.

250. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 1, \quad a, b, c>0$ és $a, b, c\neq 1$;

b) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b, \quad a>0, a\neq 1$ és $b>0, n\neq 0$;

c) $\log_{b^n} a^n = \log_b a, \quad a, b>0, b\neq 1$ és $n\neq 0$;

d) $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1+\log_a b, \quad a, b, c>0, a\neq 1, c\neq 1$ és $ab\neq 1$;

e) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}, \quad a, b, x, y>0$ és $a, b, y\neq 1$;

f) $\dfrac{1}{\log_a b}+\dfrac{1}{\log_{a^2} b}+\dfrac{1}{\log_{a^3} b}+\dfrac{1}{\log_{a^4} b} = 10\log_b a$,
$a, b>0$ és $a, b\neq 1$;

g) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a, \quad a>1$ és $b>1$;

h) $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}} = \lg a, \quad a>0$ és $a\neq 1$;

i) $\log_{bn} an = \dfrac{\log_b a+\log_b n}{1+\log_b n}, \quad a, b>0, b\neq 1$ és $bn\neq 1$;

j) $\log_{a^n b} a^{n+1} = \dfrac{(n+1)\log_b a}{1+n\log_b a}, \quad a, b>0, b\neq 1$ és $a^n b\neq 1$;

k) $\log_{b^{n+1}} ab^n = \dfrac{n+\log_b a}{n+1}, \quad a, b>0$ és $b\neq 1, n\neq -1$;

l) $m^{\log_a n} = n^{\log_a m}, \quad a>0, a\neq 1, n>0$ és $m>0$;

m) $\log_{a^k} a^n = \dfrac{n}{k}, \quad a>0, a\neq 1, k\neq 0$.

Számolás logaritmussal

251. A logaritmus azonosságainak és a lg függvény táblázatának felhasználásával számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $311\cdot 25{,}6$; $\quad 143\cdot 0{,}872\cdot 1{,}76$;

b) $\dfrac{3{,}264}{0{,}078}$; $\quad \sqrt[3]{574{,}2^2}$;

c) $\dfrac{154{,}8\cdot 5{,}436}{12{,}72}$; $\quad \dfrac{0{,}763\cdot 12{,}87}{1{,}009\cdot 86{,}4}$;

d) $4{,}92\cdot\sqrt{158{,}4}$; $\quad 1{,}086\cdot\sqrt[3]{7{,}108}$;

e) $2{,}48^3\cdot 0{,}962^5$; $\quad \dfrac{2\pi\cdot 5{,}13^2}{3}$;

f) $\dfrac{139{,}5\sqrt[3]{12{,}8\cdot 7{,}63}}{2{,}5\cdot 1{,}16^2}$; $\quad \dfrac{0{,}93^3\sqrt[4]{1{,}876}}{5\sqrt{4{,}71}}$;

g) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt[4]{\dfrac{46{,}8^3}{1{,}46\cdot 0{,}931}}$; $\quad \sqrt[3]{\dfrac{1{,}951\sqrt{12{,}6}}{3{,}88^2}}$;

h) $\sqrt[4]{\lg 0{,}37}$; $\quad \sqrt[3]{-19{,}46}$;

i) $\dfrac{\lg 3241}{\lg 2}$; $\quad \sqrt{\lg 5{,}46\cdot\lg 9{,}86}$;

j) $\dfrac{2{,}8\sin 42°\,10'}{0{,}381}$; $\quad \sqrt[3]{3{,}96\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}}$.

k) $\sqrt[3]{52{,}46}+\sqrt[3]{43{,}52}$; $\quad \sqrt[4]{15{,}42+\sqrt[3]{3{,}57}}$;

l) $\dfrac{1{,}438^2}{\sqrt{2{,}96}} + \sqrt[3]{31{,}87}$; $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{71{,}42}{5{,}86} - \dfrac{0{,}731^2}{\sqrt{317}}}$.

Vegyes feladatok

252. A változó milyen értékénél állnak fenn a következő egyenlőtlenségek?

a) $\lg x > \dfrac{1}{2} \lg x$; $\qquad$ *b)* $\lg \dfrac{x}{2} < \lg x$;

c) $\lg \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{2} \lg x$; $\qquad$ *d)* $\lg \dfrac{x+1}{2} \geqq \dfrac{1}{2} \lg x$.

253. Bizonyítsuk be, hogy ha $a>0$, $b>0$ és $a \neq b$, akkor

$$\frac{\lg a + \lg b}{2} < \lg \frac{a+b}{2}.$$

254. Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül?

a) 90^{10} vagy $[5(1-\lg 0{,}1)]^{20}$;

b) $100^{2 \lg 2}$ vagy $\sqrt{10^{2+0{,}5 \lg 16}}$.

255. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3^n]{\sqrt[3^{n-1}]{\ldots \sqrt[9]{\sqrt[3]{3}}}} =$$

256. Számítsuk ki logaritmustábla nélkül lg 2, lg 3 és lg 5 értékét, ha adott $\lg 12 = 1{,}0792$ és $\lg 18 = 1{,}2553$.

257. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor fennáll a következő egyenlőség:
$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \log_{c-b} a$, ha $b+c \neq 1$, és $c-b \neq 1$.

258. Bizonyítsuk be, hogy $a>0$, $c>0$, $a \neq 1$, $ac \neq 1$, és b az a és c mértani közepe, akkor minden n ($n \neq 1$) pozitív számra igaz, hogy

$$\frac{\log_a n}{\log_c n} = \frac{\log_a n - \log_b n}{\log_b n - \log_c n}.$$

259. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 = 7ab$, akkor

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \quad a>0,\ b>0.$$

IV. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Elsőfokú és elsőfokúra visszavezethető egyenletek és egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyváltozós egyenletek

Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket:

1. *a)* $-3x = 0$; $\qquad$ *b)* $4\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 0$.

2. *a)* $5x - 1 = 0$; $\qquad$ *b)* $-3x + 2 = 0$.

3. *a)* $2x + 5 = 2x - 1$; $\qquad$ *b)* $2x - 2 = 1 - x$.

4. *a)* $\dfrac{x}{6} = 0$; $\qquad$ *b)* $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} = 0$.

5. *a)* $2x - \dfrac{3}{5}x = \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}\right) + \left(2 - \dfrac{2}{5}x\right)$;

b) $\left(\dfrac{7}{3}x - \dfrac{7}{2}x\right) + 1 = \left(x - \dfrac{16}{3}x\right) + \dfrac{16}{5}x$.

6. *a)* $\left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}\right) - \left(\dfrac{7}{12}x - \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{29}{5}$;

b) $\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\right) + \left(2x + \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{6}$.

Egyenértékűek-e a következő egyenletek a racionális számok halmazán?

7. $4x + 16 = 10$ $\qquad$ és $\quad 2x + 8 = 5$.

8. $x - 5 = 5 - x$ $\qquad$ és $\quad x - 5 + 3x = 10 - x + 2x$.

9. $\dfrac{x-2}{6} + \dfrac{3x+2}{2} + 6 = 0$ $\qquad$ és $\quad 2x - 8 = 0$.