V. EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGRENDSZEREK

1. Lineáris egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek

1. Mely pozitív egészekből álló számpárok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $x+y=4$; *b)* $2x+3y=5$; *c)* $2x+y=15$; *d)* $2x-y=8$.

2. Zsófinak csupa 10 Ft-os és 20 Ft-os van a pénztárcájában. Hány tízforintosa lehet, ha összesen 100 Ft van a pénztárcában?

3. Egy radír ára 2 Ft, egy ceruzáé 3 Ft. Hány darab radírt és ceruzát vásárolhatunk 37 Ft-ért, ha mindkét cikkből veszünk legalább egyet?

4. Válogassuk ki a következő rendezett számpárok közül azokat, amelyek a $3x-4y=7$ egyenlet megoldásai:

$$(-1;-1),\ \left(0;-\frac{7}{4}\right),\ (3;2),\ (1;-1),\ (-3;-4),\ (5;2),\ (0;0),\ (-2;-3{,}25).$$

5. Hozzuk a következő egyenleteket (ha lehet) $ax+by=c$ alakra:

a) $x-2=3x-y$; *b)* $3(x+y)=2x-4$;

c) $(x-3)(y+2)-1=xy$; *d)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

6. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ egyenlet megoldásait.

7. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a $2x-y=6$ és $x+2y=8$ egyenletek egész számpár megoldásait. Van-e a két megoldáshalmaznak közös része?

8. Két szám összege tíz, a két szám különbsége pedig 2. Melyik ez a két szám?

9. Egy szállodában 68 szoba van, mindegyik 2 vagy 3 személyes. Hány 2, illetve 3 személyes szoba van, ha összesen 161 vendéget tudnak elhelyezni?

10. Határozzuk meg a következő egyenletrendszert kielégítő számpárt mind grafikus, mind algebrai úton:

$$\begin{cases} y = 2x+2; \\ y = 4x-5. \end{cases}$$

Oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *halmazon a következő egyenletrendszereket:*

11. *a)* $\begin{cases} x = 2+y; \\ 3x-2y = 9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y = 2-4x; \\ 8x+3y = 5. \end{cases}$

12. *a)* $\begin{cases} x-2y = 0; \\ x-3y = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y = 2; \\ x+y = 3. \end{cases}$

13. *a)* $\begin{cases} 3x-y = 4; \\ 3y-5x = 5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y = -0{,}5; \\ 5x+3y = -2. \end{cases}$

14. *a)* $\begin{cases} x+y = 2; \\ 3{,}5x-7 = -3{,}5y. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-y = 7; \\ 0{,}5y = x-7. \end{cases}$

15. *a)* $\begin{cases} x+2y = 4; \\ x-y = 11. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y = 8; \\ 2x+y = 10. \end{cases}$

16. *a)* $\begin{cases} x+\frac{3}{4}y = 9; \\ \frac{x}{2}-\frac{2y}{3} = \frac{1}{3}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{2y}{3} = \frac{1}{3}; \\ 11x+2y = -1. \end{cases}$

17. *a)* $\begin{cases} 2x+y = 8; \\ 3x+4y = 7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7x+9y = 8; \\ 9x-8y = 69. \end{cases}$

18. *a)* $\begin{cases} 2x-3y = 4; \\ 1{,}5x-y = 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y = -2; \\ 3x+4y = -3{,}2. \end{cases}$

19. *a)* $\begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{2b}{5} = 1; \\ 5a-6b = 15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{a}{2}-\frac{b}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a}{5}+\frac{b}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

20. *a)* $\begin{cases} \frac{a-1}{2}-\frac{b+4}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a-1}{5}+\frac{b+4}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{a+3}{2}-\frac{b-5}{3} = \frac{1}{6}; \\ \frac{a+3}{5}+\frac{b-5}{2} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *kiindulási halmazon a következő egyenletrendszereket:*

21. *a)* $\begin{cases} 2x+y = 11; \\ 3x-y = 9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+5y = 7; \\ x-3y = -1. \end{cases}$

22. *a)* $\begin{cases} x-3y = 4; \\ 5x+3y = -1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+3y = 6; \\ 2x+y = 4. \end{cases}$

23. *a)* $\begin{cases} 2x+5y = 25; \\ 4x+3y = 15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+3y = -4; \\ 6x+5y = -7. \end{cases}$

24. *a)* $\begin{cases} 7x-3y = 15; \\ 5x+6y = 27. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 12x+16y+1 = 0; \\ 15x+20y+10 = 0. \end{cases}$

25. *a)* $\begin{cases} 28x+35y+3 = 0; \\ 12x+15y+25 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 21x-9y+3 = 0; \\ 4x-5y+17 = 0. \end{cases}$

26. *a)* $\begin{cases} 15x+23y+10 = 0; \\ 9x+12y+6 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 25x-4y+1 = 0; \\ 31x-5y+16 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2(x+y)+4(x-y) = 3; \\ 3(x+y)+6(x-y) = 4{,}5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5(3x+5y)-9(6x+5y) = -5; \\ 2(3x+5y)+4(6x+5y) = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{2x+1}{5}+\frac{2-y}{4} = -0{,}1; \\ \frac{x+2}{3}+\frac{5y-7}{2} = 3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{2} - \dfrac{5x+y}{3} = 16; \\ x+y+12 = \dfrac{x-3y}{8}. \end{cases}$

31. *a)* $\begin{cases} \dfrac{a+3}{2} - \dfrac{b-2}{3} = 2; \\ \dfrac{a-1}{4} + \dfrac{b+1}{3} = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{c+d}{3} + \dfrac{d}{5} = -2; \\ \dfrac{2c-d}{3} - \dfrac{3c}{4} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

32. *a)* $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8); \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1). \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{y}{3} = 1; \\ \dfrac{x-5}{4} + \dfrac{y-3}{7} = -1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2y+1}{3} - \dfrac{x-2y+1}{2} = 0; \\ 7x-2y = 27. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2a-5b}{5} - \dfrac{3a-2b}{3} = -3; \\ (5a-1)(2b+1) = (2a-4)(5b+4). \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{3(a-b)}{5} + \dfrac{5(a+b)}{3} = 18; \\ \dfrac{2(a+2b)}{11} + \dfrac{5(a-2b)}{3} = 7. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x+y-2}{5} + \dfrac{x-y-1}{3} = -\dfrac{8}{15}; \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$

Az eddigi példákban mindig megadtuk vagy valamilyen módon jeleztük azt a kiindulási halmazt, amelyben az egyenlet(rendszer)ek megoldásait kerestük. A továbbiakban a kiindulási halmazt nem mindig írjuk föl, ilyenkor azt a lehető legtágabbnak kell tekintenünk. A lehető legbővebb kiindulási halmazt az egyenlet(rendszer) értelmezési tartományának nevezzük. Hasonló megállapodás vonatkozik egyenlőtlenség(rendszer)ek megoldására.

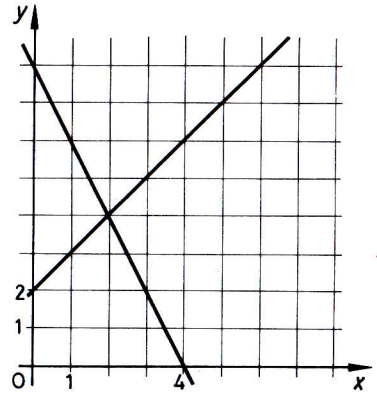
33. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} y = x+1; \\ y = -x+3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y = 3x; \\ y = -2x+5. \end{cases}$

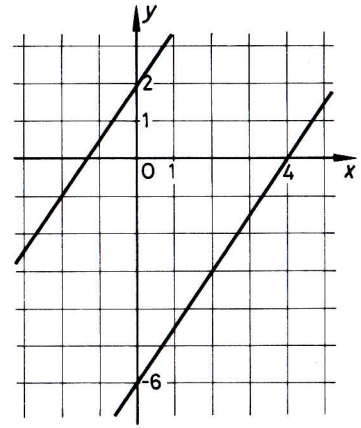
c) $\begin{cases} y = 2x-1; \\ x+y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+y = \dfrac{3}{2}; \\ 2x-3y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-3y = 4; \\ x-2y = -4. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y = 0; \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}y = 5. \end{cases}$

34. A *4. ábrán* két egyenes látható. Írjuk föl az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert, és annak megoldását.



4. ábra



5. ábra

35. Az *5. ábrán* két egyenes látható. Írjuk föl az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert, és annak megoldását.

36. Van-e megoldása a következő egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} 2x+y=1; \\ x+2y=-1; \\ x+y=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+6y=7; \\ x-y=5; \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y=\frac{3}{2}; \\ 4x-y=8; \\ 5x+3y=2. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 2x+5y=25; \\ x-\frac{2}{3}y=3; \\ \frac{1}{2}x+\frac{y}{2}=4. \end{cases}$

37. Mely racionális számpárok elégítik ki a következő egyenletrendszereket?

a) $\begin{cases} \frac{x+1}{y+2}=5; \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5}; \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x. \end{cases}$

38. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

a) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3y+2}=\frac{15x-2}{9y+4}; \\ 3(3y+2)+4(5x-4)=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{2x-3}{2y-5}=\frac{3x+1}{3y-4}; \\ 3(y+2)-2(x-3)=16. \end{cases}$

39. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{3}+\frac{4x-3y}{2}=y+1; \\ \frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}=4; \\ \frac{3x-4y+3}{4}+\frac{4x-2y-9}{3}=4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+4):(y+1)=2:1; \\ (x+2):(y-1)=3:2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\frac{4x-y}{10}=\frac{3x+0{,}5y}{30}+\frac{x-y}{5}; \\ \frac{3x+2y-1}{8}=3-\frac{0{,}8x-5y}{41}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0{,}5-y=\left\{\frac{1}{2}[x-3(y-0{,}4)]+1{,}4\right\}\cdot 0{,}75; \\ 2\left[1-\frac{1-2(x-y)}{5}\right]-1{,}4=3(2x+3). \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2-\frac{x+2y}{5}=7x-5y+4; \\ 7x-5y+4=-\frac{1}{3}[5+3(x-3)-y]. \end{cases}$

Oldjuk meg az egyenlő együtthatók módszerével vagy új ismeretlen bevezetésével a következő egyenletrendszereket.
Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

40. *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}; \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{8}{y}=8; \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=51. \end{cases}$

41. *a)* $\begin{cases} x+\frac{5}{y}=15; \\ 2x-\frac{25}{y}=23. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{15}{x}-\frac{7}{y}=9; \\ \frac{4}{x}+\frac{9}{y}=35. \end{cases}$

42. *a)* $\begin{cases} \frac{3}{5x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{3}; \\ \frac{7}{10x}-\frac{5}{6y}=\frac{1}{15}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{7}{6y}+\frac{2}{x}=3{,}5; \\ \frac{2}{3x}-\frac{1}{6y}=2\frac{5}{6}. \end{cases}$

43. *a)* $\begin{cases} \frac{10}{x-5}+\frac{1}{y+2}=1; \\ \frac{25}{x-5}+\frac{3}{y+2}=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{2}{x+4}-\frac{3}{y-1}=5; \\ \frac{5}{x+4}-10=\frac{7{,}5}{y-1}. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y}+\dfrac{32}{x+3y}=7; \\ \dfrac{45}{2x-y}+1=\dfrac{48}{x+3y}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2y}-\dfrac{3}{2x+3y}=5; \\ \dfrac{9}{5(2x+3y)}-\dfrac{6}{5(x-2y)}=-3. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13; \\ \dfrac{27}{3x-2y}+\dfrac{2}{3y-2x}=1. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{5}{3x-2}-\dfrac{2}{5y+1}=10; \\ \dfrac{3}{3x-2}+\dfrac{3}{5y+1}=1{,}8. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0{,}1; \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0{,}3. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y+1}+\dfrac{1}{2-2x+y}=7; \\ \dfrac{4}{2x+y+1}+\dfrac{1}{2x-y-2}=-3. \end{cases}$

50. Van-e olyan racionális számokból álló számpár, amely megoldása a következő egyenletrendszernek?

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5; \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y=2; \\ (1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y=2\sqrt{3}. \end{cases}$

51. Az

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

egyenletrendszerben a, b, c, d, e és f racionális számok. Van-e olyan megoldás, amelyben x vagy y irracionális?

52. Az előző feladatban az együtthatók közül egyik se nulla és c irracionális, a többi racionális. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy a megoldásszámpár mindkét száma irracionális.

53. Van-e a következő egyenletrendszernek a $-3 \leqq x < 0$, $0 \leqq y < 6$ feltételeket kielégítő megoldása?

$$\begin{cases} 3x+2y=1; \\ 7x+5y=4. \end{cases}$$

54. Határozzuk meg azokat az $(x; y)$ valós számpárokat, amelyek kielégítik az $x+y=7$ vagy $x-y=2$ egyenletek valamelyikét. (Tehát olyan egyenletrendszerről van szó, amelynek egyenleteit *vagy* kötőszóval fűzzük össze.)

55. Határozzuk meg azokat az egészekből álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre $0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 6$, és kielégítik a következő egyenletek valamelyikét:

$$x-y=-2 \text{ vagy } x+y=6.$$

56. Tekintsük az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ kiindulási halmazon a következő egyenleteket:

$$3x-4y=2; \quad x+\frac{3}{4}y=9; \quad \frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=\frac{1}{3}; \quad 11x+2y=-1.$$

Válasszunk ki közülük kettőt ahányféleképpen csak lehetséges, és határozzuk meg 2–2 egyenlet konjunkciójának megoldáshalmazát. Keressük meg 2–2 egyenlet diszjunkciójának megoldáshalmazát is. Lesz-e azonos a kétféleképpen képzett megoldáshalmazok között?

57. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében vannak, és kielégítik a következő egyenletek legalább egyikét:

$$3x+4y=12 \text{ vagy } x-y=2.$$

58. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek a derékszögű koordináta-rendszer második síkne-

gyedében helyezkednek el, és kielégítik az előző példa egyenleteinek valamelyikét.

59. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert diszjunktíven (tehát úgy, hogy meghatározzuk az összes olyan valós számpárt, amely legalább az egyik egyenletet kielégíti).

a) $\begin{cases} x-3y=2; \\ x+2y=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-5y=3; \\ 3x+y=1. \end{cases}$

60. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

Legyen az első egyenlet megoldáshalmaza M_1 a másodiké M_2. Fejezzük ki a két egyenlet konjunkciójának és diszjunkciójának megoldáshalmazát M_1 és M_2 segítségével.

Állapítsuk meg, hány megoldása van a következő egyenletrendszereknek:

61. *a)* $\begin{cases} x+y=6; \\ x-y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=1; \\ -x-y=5. \end{cases}$

62. *a)* $\begin{cases} 2x+y=5; \\ y=3x. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x=1-y; \\ y=x-5. \end{cases}$

63. *a)* $\begin{cases} 2x+2y=8; \\ x+y=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=2; \\ 2x+y=10. \end{cases}$

64. *a)* $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=5; \\ \frac{3x}{2}-\frac{3y}{2}=15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=5; \\ 2x=5-2y. \end{cases}$

65. *a)* $\begin{cases} x-y=4; \\ 2x-2y=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=3; \\ y+x=5. \end{cases}$

66. *a)* $\begin{cases} x+y=5; \\ x-2y=-4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-x=4; \\ 2y+3=x. \end{cases}$

67. Két szám összege 10, ugyanezen számok kétszereseinek összege 20. Melyek ezek a számok?

68. A következő egyenletrendszerek megoldása nélkül állapítsuk meg, hogy melyeknek van egy megoldása, végtelen sok megoldása, 0 megoldása.

a) $\begin{cases} 2x+y=11; \\ x+3y=18. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=4; \\ 4x+6y=8. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-9y=4; \\ 4x-6y=9. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 4x+10y=12; \\ 6x+15y=18. \end{cases}$

Három- és többismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek

69. Keressünk olyan valós számokból álló $(x; y; z)$ számhármast, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$2x+5y-3z=3.$$

70. Hány megoldása lehet az előző feladatban fölírt egyenletnek? Hány paraméterrel fejezhető ki az összes megoldás?

71. Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=0; \\ 3x+y-z=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=5; \\ 2y+z=6. \end{cases}$

Hány megoldása van a feladatnak?

72. Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+2y-z=0; \\ 4x-y+3z=0. \end{cases}$$

Hány megoldása van a feladatnak?
Hány paraméterrel fejezhető ki az összes megoldás?

Oldjuk meg az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *halmazon a következő egyenletrendszereket:*

73. *a)* $\begin{cases} x+2y=9; \\ y-3z=-5; \\ 5z-x=+14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+y=1; \\ z-5y=2; \\ 2z-x=1{,}4. \end{cases}$

74. *a)* $\begin{cases} x+y=13; \\ x-z=5; \\ y-z=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y=-2; \\ x+z=0{,}9; \\ y-z=-1{,}9. \end{cases}$

75. *a)* $\begin{cases} x+2y=2; \\ 2x+2z=-2; \\ 2y+3z=-3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=11; \\ 3x+2z=13; \\ 3y+4z=29. \end{cases}$

76. *a)* $\begin{cases} x+y-z=11; \\ x-y+z=1; \\ y+z-x=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x+y-z=-4; \\ x+y+z=-6. \end{cases}$

77. *a)* $\begin{cases} 3x+2y+3z=110; \\ 5x+y-4z=0; \\ 2x-3y+z=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y-z=12; \\ x+2y+z=0; \\ -x-1{,}5y+0{,}5z=-6. \end{cases}$

78. *a)* $\begin{cases} x+\dfrac{y}{4}+z=-6; \\ \dfrac{x}{5}+y-z=1; \\ y-\dfrac{z}{6}-x=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=36\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=27; \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{7}=18. \end{cases}$

79. *a)* $\begin{cases} 2x+y-z=3; \\ x-y+2z=-1; \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y+3z=4; \\ x-y-z=3; \\ 3x-y+2z=5. \end{cases}$

80. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{4}+\dfrac{5z}{3}=45; \\ 5{,}1x+\dfrac{6y}{5}-4z=15; \\ 0{,}1x-0{,}4y+\dfrac{4z}{5}=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-3y+z=-1; \\ x+2y-z=6; \\ x-1{,}5y+0{,}5z=1. \end{cases}$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a lehető legbővebb kiindulási halmazon:

81. *a)* $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{z}=4; \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-5; \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{z}=4; \\ \dfrac{4}{y}+\dfrac{2}{z}=-9. \end{cases}$

82. *a)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12}; \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=-\dfrac{5}{3}; \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}-\dfrac{2}{z}=-2\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{4}{z}=-5; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9; \\ \dfrac{1}{z}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=-4. \end{cases}$

83. *a)* $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{y+3z}=2; \\ \dfrac{15}{x+y}-\dfrac{4}{x-2z}=\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{10}{y+3z}-\dfrac{7}{x-2z}=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{2}{y+z}=15; \\ \dfrac{4}{y+z}-\dfrac{3}{5x+z}=-13; \\ \dfrac{6}{5x+z}+\dfrac{1}{2x-y}=11. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dfrac{7}{2x-3y}-\dfrac{2}{10z-3y}+\dfrac{3}{3y-8z}=8 \\ \dfrac{2}{2x-3y}-\dfrac{3}{10z-3y}+\dfrac{1}{3y-8z}=0 \\ \dfrac{5}{2x-3y}-\dfrac{4}{10z-3y}+\dfrac{7}{3y-8z}=8 \end{cases}$

Oldjuk meg a következő többismeretlenes egyenletrendszereket:

85. *a)*
$$\begin{cases} x+2y=5; \\ y+2z=8; \\ z+2u=11; \\ u+2x=6. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x-2y=1; \\ u-y=1; \\ 2u-3z=4; \\ 6x+z=1. \end{cases}$$

86. *a)*
$$\begin{cases} 2x+y=11; \\ y-2z=-9; \\ 2z+3u=11; \\ 3u+x=6. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-2y+3z-u=5; \\ y-2z+3u-x=0; \\ z-2u+3x-y=0; \\ u-2x+3y-z=5. \end{cases}$$

87. *a)*
$$\begin{cases} 6x-2y-3z=25; \\ 3y+z-2v=20; \\ 4x-3y-2t=13; \\ x-2v+t=4; \\ 2y+v=17. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x-2y-3z=25; \\ 3y+z-2v=24; \\ 4x-3y-2v=13; \\ x-2v-u=4; \\ 2y+v=15. \end{cases}$$

88. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-5x_4=5; \\ 2x_2+3x_3-x_4=12; \\ x_3-4x_4=-1; \\ x_4=1. \end{cases}$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével. (Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerének ismételt alkalmazásával olyan alakra hozzuk, mint a **88.** feladatban lévő egyenletrendszer. Ezt a módszert Gauss-féle kiküszöbölési eljárásnak is nevezik.):

89.
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5; \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2; \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2; \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$$

90.
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=5; \\ 4x_1-7x_2+13x_3+12x_4=22; \\ 2x_1-3x_2+6x_3+7x_4=10; \\ 3x_1-6x_2+10x_3+6x_4=18. \end{cases}$$

91.
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=8; \\ 4x_1-x_2-6x_3+2x_4=1; \\ 5x_1-3x_2+x_3-\frac{1}{2}x_4=2; \\ x_1-2x_2-x_3-3x_4=-8. \end{cases}$$

Mutassuk meg a következő egyenletrendszerekről, hogy nincs megoldásuk:

92.
$$\begin{cases} 2x+3y-7z=10; \\ x-8y-15z=-3; \\ x+1{,}5y-3{,}5z=7. \end{cases}$$

93.
$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{3}x_2+2x_3-\frac{1}{2}x_4=1; \\ 5x_1-x_2+9x_3-4x_4=1; \\ 3x_1+2x_2+6x_3-7x_4=11; \\ 3x_1-x_2+6x_3-1{,}5x_4=2. \end{cases}$$

94. Módosítsuk az előző két feladatban a harmadik, illetve a negyedik egyenlet jobb oldalát olyképpen, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

Egyenletrendszerrel megoldható feladatok

95. Teheráru elszállítására vasúti kocsikat állítanak be. Ha egy kocsira 15,5 tonna terhet raknak, akkor 4 tonnát nem tudnak berakni. Ha viszont egy kocsira 16,5 tonnát raknak, akkor a kocsik megtöltéséhez még 8 tonna teher kellene. Hány vasúti kocsit állítottak be, és hány tonna volt a teher?

96. Egy rakomány meghatározott időn belüli elszállításához több egyforma teherautóra van szükség. Ha két kocsival kevesebb lenne, akkor a szállítás két órával tovább tartana. Ha viszont 4 autóval több lenne, a szállítást a megszabott időnél két órával hamarább tudnák elvégezni. Hány teherautó végzi a szállítást, és mennyi idő alatt kell készen lenniök?

97. Az egyvágányú vasútvonal 20 km-es szakaszán síneket fektetnek. Ehhez 25 m és 12,5 m hosszú sínek állnak rendelkezésre. Ha a

25 m-es síneket használják föl előbb, akkor a 12,5 m-es síneknek csak az 50%-ára lesz szükség; ha viszont a 12,5 m-es síneket használják föl előbb, akkor a 25 m-es síneknek csak a $66\frac{2}{3}$%-ára lesz szükség, hogy a tervezett vasútvonalat megépítsék. Hány darabot használtak föl az egyes esetekben a különféle sínszálakból?

98. Két brigád együttesen 22 400 m^3 tűzifa kitermelését kezdi meg. Úgy tervezik, hogy 40 munkanap alatt befejezik a munkát. 10 napi közös munka után az első brigád teljesítménye 30%-kal, a másiké 16%-kal nőtt, ezért sikerült a munka hátralevő részét 24 nap alatt befejezni. Napi hány m^3 fa kitermelését tervezték a brigádok?

99. Egy épület tatarozását bizonyos számú munkás meghatározott számú nap alatt képes elvégezni. Ha 3 emberrel kevesebb dolgozik, a munkaidő 6 nappal megnövekszik; ha viszont 2 munkással több van, 2 nappal a határidő előtt elkészülnek. Hány munkás, hány nap alatt tudja a munkát elvégezni?

100. Egy műhely munkásai meghatározott idő alatt néhány darab egyforma alkatrészt készítenek. Ha naponta 10 darabbal többet készítenek el, akkor 4,5 nappal hamarabb fejezik be a munkát. Ha viszont naponta 5 darabbal kevesebbet készítenének, akkor 3 napot késnének. Hány alkatrészt kellett elkészíteniök, és hány nap alatt?

101. A fizikaterembe padokat állítanak be. Ha minden padba két tanulót ültetnek, akkor 8 tanulónak nem jut hely. Ha viszont minden padba 3 tanuló ül, akkor 7 hely üresen marad. Hány padot állítanak a terembe? Hány tanuló van az osztályban?

102. Egy társaság vacsorához készülődik. Ha a teremben lévő asztalok mindegyikéhez 10 ember ül, akkor 4 hely üresen marad, ha mindegyikhez 8-an ülnek, 3 embernek nem jut hely. Hány asztal van a teremben, és hányan akarnak vacsorázni?

***103.** Egy táncmulatságon 37 személy vett részt, lányok és fiúk. A mulatság után kiderült, hogy az első lány 8, a második 9, a harmadik 10 fiúval és így tovább, az utolsó lány valamennyi fiúval táncolt. Hány leány és fiú volt a mulatságon?

104. Egy kirándulásra pénzt gyűjtünk össze. Ha minden résztvevő 75 Ft-ot hoz, akkor a költségből még 440 Ft hiányzik; ha viszont

mindenki 80 Ft-ot ad be, akkor 440 Ft többlet lesz. Hány fő vesz részt a kiránduláson?

105. Két dolgozó egy közösen elvégzett munkáért 3294,40 Ft-ot kapott. Az első 30 napig, a másik 28 napig dolgozott. Az első 4 napra 137,60 Ft-tal kapott többet, mint a második 3 napra. Mennyit kerestek naponta?

106. Tizenhat év múlva az apa kétszer idősebb lesz fiánál. Hány évesek most, ha 4 évvel ezelőtt az apa hatszor annyi idős volt, mint a fia?

***107.** András kétszer olyan idős, mint amilyen Béla volt, amikor András olyan idős volt, mint Béla most. Amikor Béla olyan idős lesz, mint most András, éveik számának összege 140 lesz. Milyen idős most a két férfi?

***108.** Egy ember így szól a másikhoz: „Én most kétszer annyi idős vagyok, mint Ön volt akkor, amikor én olyan idős voltam, mint Ön most. Amikor Ön olyan idős lesz, mint én vagyok most, akkor nekem hét évem fog hiányozni ahhoz, hogy kétszer annyi idős legyek, mint Ön most." Hány évesek?

109. Ha egy téglalap hosszúságát 6 m-rel növeljük, szélességét pedig 3 m-rel csökkentjük, a téglalap területe nem változik. Nem változik a terület akkor se, ha eredeti hosszát 3 m-rel kisebbítjük, szélességét pedig 2,4 m-rel növeljük. Határozzuk meg a téglalap méreteit.

110. Ha egy derékszögű háromszög egyik befogóját 2 cm-rel, a másikat 5 cm-rel megnöveljük, az így létrejött háromszög területe 51 cm^2-rel több lesz. Ha viszont mindkét befogót 2 cm-rel csökkentjük, a terület 32 cm^2-rel kisebb lesz. Mekkorák a befogók?

111. Egy társaság közösen vásárolt egy ajándékot, azonban a számla kifizetésekor négyen hiányoztak, és így mindenki 36 forinttal többet fizetett a tervezettnél. Ezután három távollevő megérkezett. és a költségek újrafelosztása után a befizetők visszakaptak egyenként 30 forintot. Hányan voltak a társaságban, és mennyibe került az ajándék?

112. Egy fiúnak ugyanannyi nővére van, mint fivére, és nővérének fele annyi nővére van, mint fivére. Hány fivér és nővér van a családban?

113. Egy öszvér és egy szamár terhet cipelve beszélgetett. A szamár így szólt: „Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd." Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi súlyt cipelnék, mint te." Hány kg-ot vitt az egyik, és hányat a másik?

114. Ha egy tört számlálójához és nevezőjéhez is 3-at adunk, értéke $\frac{1}{2}$ lesz, ha viszont nevezőjéből egyet elveszünk, értéke $\frac{1}{3}$ lesz. Melyik ez a tört?

115. Ha két szám mindegyikéből 3-at elveszünk, akkor az első szám háromszorosa lesz a másodiknak. Ha viszont mindkét számhoz kettőt hozzáadunk, akkor az első szám kétszerese lesz a másodiknak. Melyik ez a két szám?

116. Ha egy tört számlálójából 3-at elveszünk, nevezőjéhez pedig kettőt hozzáadunk, értéke $\frac{1}{3}$ lesz; ha viszont számlálójához 20-at adunk, és a kapott számot az eredeti tört nevezőjével osztjuk, akkor hányadosul kettőt, maradékul szintén kettőt kapunk. Melyik ez a tört?

117. Ha egy tört számlálóját kettővel megnöveljük, akkor 1-et, ha pedig a nevezőjét növeljük 3-mal, akkor $\frac{1}{2}$-et kapunk. Melyik ez a tört?

118. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, az eredmény 77 lesz. Ha viszont az eredeti számot elosztjuk a felcserélés után kapott számmal, akkor mind a hányados, mind a maradék 2 lesz. Melyik ez a kétjegyű szám?

119. Egy kétjegyű szám 45-tel nagyobb a jegyei felcserélésével nyert számnál. Ha a számot 12,5%-kal megnöveljük, és ezután elosztjuk az eredeti szám jegyeinek összegével, hányadosul 9-et kapunk. Melyik ez a szám?

120. Melyik az a szám, amelyiket 7-tel osztva a maradék 2; 15-tel osztva, a maradék 6 lesz? Tudjuk továbbá, hogy az első hányados úgy aránylik a másodikhoz, mint 7:3.

***121.** Ha egy háromjegyű szám jegyeit fordított sorrendben írjuk, és az eredetiből kivonjuk, a különbség 500 és 600 között lesz. A középső számjegy 3-mal kisebb a másik kettő összegénél, a százasok helyén álló számjegy négyzete 4-gyel nagyobb a második számjegy 9-szeresénél. Melyik ez a szám?

***122.** A gépkocsi utasa egy kilométerkövön egy kétjegyű számot olvas le. Útját ugyanolyan sebességgel folytatva, egy órával később olyan kilométerkő mellett halad el, amelyen ugyanazon számjegyeket fordított sorrendben látja. Ezután egy órával olyan kilométerkőhöz érkezik, amelyen ugyanaz a két számjegy van, mint az elsőn, de köztük egy nullával. Mekkora a gépkocsi átlagsebessége?

***123.** Pista vásárolt egy körzőt, egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző az ötödébe, egy ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 8 Ft-ot; ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 12 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző vagy a ceruza a drágább?

***124.** Öt házaspár közös kirándulást szervez, amelynek költségeit közösen fedezik. A hozzájárulás mértékét a társaság egyik jól számoló tagja a következőképpen határozza meg:
A névsor szerinti első házaspár férfitagja fizet valamekkora összeget, a felesége pedig az ezután fennmaradó költség hatodrészét.
A következő házaspárból a férj az előző férfinál 10 Ft-tal többet fizet, felesége pedig ismét a még fennmaradó költség hatodrészét; és így tovább.
A végén kiderül, hogy minden házaspár azonos összeget fizet. Mennyi a kirándulás költsége? Mennyi a házaspáronkénti hozzájárulás?

***125.** Péter és öccse, Miklós versenyt futottak 1 km-es távon. Péter 50 másodperc előnyt adott, és így még 50 m-re volt a céltól, amikor öccse befutott. „Lebecsültem erődet – szólt –, holnap csak 100 m előnyt kapsz." Másnap Miklós 16 másodperccel bátyja után ért célba. A versenytáv mely pontján előzte meg a második napon Péter az öccsét? (Feltesszük, hogy teljesítményük a két napon ugyanaz volt.)

126. Bizonyos mennyiségű 78%, illetve 58% vasat tartalmazó ércet összekeverve 62% vasat tartalmazó keveréket kapunk. Ha mindkét fajta ércből még 15–15 kg-ot hozzáteszünk a keverékhez, akkor 63,25%-os lesz. Mennyi ércet tartalmaz a keverék az egyes fajtákból?

127. 84% és 70% töménységű alkoholból 75%-os keveréket készítünk. Ezután a keverékhez még hozzáöntünk 5 cm^3-t az első fajtából és 135 cm^3-t a másodikból. Így a keverék 72%-os lesz. Hány cm^3-t vettünk az egyes fajtákból az első alkalommal?

128. Kétfajta alkoholból készítünk keveréket. Az elsőből 10 litert, a másodikból 24 litert véve, 40%-os alkoholt kapunk. Ha az elsőből 18 litert, a másodikból 7 litert veszünk, a keverék 30%-os lesz. Hány százalékos a két összetevő?

129. Két edényben különböző hőmérsékletű víz van. Ha az elsőből 240 g-ot összekeverünk a másodikból vett 260 g-mal, a keverék hőmérséklete 52 °C lesz. Ha viszont a keverékhez az első edényből 180 g, a másodikból 120 g vizet veszünk, a kapott keverék hőmérséklete 46 °C lesz. Határozzuk meg a két edényben levő víz hőmérsékletét.

130. Van két fémrudunk. Az első 270 g aranyat és 30 g rezet, a másik 400 g aranyat és 100 g rezet tartalmaz. Hány g-ot vegyünk egyik, illetve a másik fajtából, hogy 400 g 825 ezrelékes finomságú ötvözetet kapjunk?

131. Összeöntöttünk 6%-os és 30%-os sósavat, s így 24 liter 15%-os töménységű sósavat kaptunk. Hány litert vettünk az egyes összetevőkből?

132. Kétfajta konzervet akarunk venni 330 Ft-ért; az egyik darabja 18 Ft, a másiké 10 Ft. Árleszállítás folytán az első árát 30%-kal, a másikét 20%-kal csökkentik, s így 84 Ft-tal kevesebbet költünk. Hány konzervet veszünk az egyes fajtákból?

133. Egy készülék elkészítésének energiaköltsége az anyagköltség 3,5-szerese. Egy újítás bevezetésével az anyagköltségnél 12%-os, az energiaköltségnél 18%-os megtakarítást értek el, összesen 1500 Ft-ot. Mekkora a készülék újítás előtti energia- és anyagköltsége?

134. Ha vízszintes talajon $m = 5$ kg tömegű testet F erővel húzunk, akkor az $a_1 = 1\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással; ha kétszer akkora erővel húzzuk, akkor pedig $a_2 = 5\,\frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozog. Mekkora az F erő, és mekkora a talaj és a test közötti súrlódási együttható?

135. Két ember korcsolyán áll, egymástól d távolságra. Az egyik m tömegű labdát dob a másiknak, aki t idő múlva kapja el azt. Mekkora sebességgel kezd el csúszni a labdát dobó M tömegű ember?

136. Hány százalék káliumkloridot tartalmaz a káliumkloridból és nátriumkloridból álló sókeverék, amelynek klórtartalma 56,26%?

137. Adva van egy kétértékű sav kétféle káliumsója. Molekulatömegük aránya 68:87. Mennyi a sav molekulatömege? (A kálium atomtömege 39.)

138. Egy háromértékű és egy kétértékű sav nátriumsójának molekulatömeg-különbsége 22. Mit állíthatunk a savak molekulatömegéről?

139. Na és K ötvözetének 3,58 g tömegű darabjával 1,2 dm^3 20 °C-os 10^5 Pa nyomású hidrogént sikerült fejleszteni. Az ötvözet atomjainak hány százaléka nátrium?

140. Két brigádnak egy földterületről 16 óra alatt kellett volna fölszednie a burgonyát. Először csak az első brigád állt munkába, 36 órát dolgozott, s ezután 4 óra alatt a két brigád befejezte a munkát. Hány óra alatt tudta volna egyik-egyik brigád fölszedni a burgonyát az egész területről?

141. Két csövön át egy medence 1 óra 20 perc alatt telik meg. Ha az első csövet 10 percre, a másikat pedig 12 percre nyitjuk meg, a medence csak $\frac{2}{15}$ részéig telik meg. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét külön az egyik, illetve a másik cső?

142. Egy tartályba két cső vezet. Ha a tartályt először félig megtöltjük az első csövön át, azután teleengedjük a második csövön át, a töltési idő 2 óra. Ha viszont az első csövön csak harmadáig töltjük, a második csövön ezután tele, akkor a töltési idő 2 óra 10 perc lesz. Mennyi idő alatt tölti meg a tartályt külön az egyik vagy a másik cső?

143. Két munkás készít egy munkadarabot. Ha az első munkás 9 órát dolgozik, a második 15 órát, akkor időre elkészülnek. Akkor is időre készen lesznek, ha az első 16 órát, a másik 10 órát dolgozik. Mennyi idő alatt végeznének külön-külön?

144. Egy kerékpáros meghatározott sebességgel haladva, a meg-

szabott időre ér A-ból B-be. Ha sebességét 3 km/h-val növeli, akkor 1 órával hamarább ér célba; ha viszont óránként 2 km-rel kevesebbet halad, akkor 1 órát késik. Mekkorra az AB távolság, és a kerékpáros sebessége?

145. A személyvonatnak, amelynek sebessége 15 km/h-val nagyobb a tehervonaténál, 9 órával kevesebb időre van szüksége, hogy A-ból B-be érjen, mint a tehervonatnak. A gyorsvonat viszont, amelynek sebessége 10 km/h-val nagyobb a személyvonaténál, ugyanezen a távon 3 órával rövidebb idő alatt fut végig, mint a személyvonat. Határozzuk meg az AB távolságot, és a vonatok sebességét.

146. Egy 100 m hosszúságú körpályán két test kering. Egy irányban haladva 20 másodpercenként, ellenkező irányban haladva 4 másodpercenként találkoznak. Mekkora a testek sebessége?

***147.** Egy lovas és egy gyalogos egyszerre indulnak A-ból B felé. A lovas, aki 50 perccel előbb ér B-be, mint a gyalogos, megérkezése után rögtön visszafordul, és így B-től 2 km-re szembetalálkozik a gyalogossal. A lovas az utat A-tól B-ig és vissza 1 óra 40 perc alatt teszi meg. Mekkora az AB távolság, valamint a lovas és a gyalogos sebessége?

148. Két, egymástól 9 km távolságra levő pontból egyszerre indul el egy-egy kerékpáros. Ha egymással szembe mennek, 20 perc múlva, ha egy irányban haladnak, 3 óra múlva találkoznak. Mekkora a sebességük?

149. Az egyik várostól a faluig az út eleinte sík területen megy, azután hegynek fölfelé. Egy kiránduló az út sík részén kerékpáron 8 km/h sebességgel, a hegynek föl pedig gyalog 3 km/h sebességgel haladva 1 óra 55 perc alatt ér a városból a faluba. Visszafelé a lejtőn 15 km/h-val, a sík részen pedig 12 km/h sebességgel kerékpározva 58 percig tart az út. Hány kilométerre van a falu a várostól?

150. Az AB úton – amelyen 28 km sík rész, valamint emelkedők és lejtők vannak – kerékpáros halad. A sík részeken a kerékpáros sebessége 12 km/h, az emelkedőkön 8 km/h, a lejtőkön pedig 15 km/h. Az egész utat A-tól B-ig 5 óra alatt, B-től A-ig pedig 4 óra 39 perc alatt teszi meg. Mekkora az AB út?

151. Egy gyalogos indul A-ból B felé. 20 perc múlva A-ból egy

kerékpáros indul utána, s indulása után 10 perccel elhalad a gyalogos mellett. Elmegy B-ig, onnan megállás nélkül visszafordul, és az első találkozás után 50 perccel találkozik ismét ugyanazzal a gyalogossal. Az AB távolság 10 km. Mekkora a gyalogos és a kerékpáros sebessége?

152. A-ból 9 óra 9 perckor indul egy MÁVAUT-járat a 24 km-re lévő B-be. Megérkezése után 1 óra 13 perccel indul vissza. B-ből 8 órakor indult A felé egy gyalogos, aki ezzel a járattal először 9 óra 40 perckor, másodszor 11 óra 20 perckor találkozott. Hol voltak a találkozások, és mekkora a MÁVAUT-járat átlagos sebessége?

153. Két egyenes út O-ban keresztezi egymást; egyiken Péter halad, a másikon Pál. Amikor Péter O-ban van, Pál 500 m-re van O-tól. 2 perc múlva egyenlő távolságra lesznek a kereszteződéstől, és további 8 perc elteltével ismét egyenlő távolságra lesznek O-tól. Mekkora Péter, illetve Pál sebessége?

154. Nyílt pályán haladó személyvonat ablakából egy 70 m hosszú gyorsvonatot látunk elrobogni. Ha a két vonat szembe halad, 3,2 másodperc; ha egy irányban haladnak, 10 másodperc alatt robog el a gyorsvonat az ablak előtt. Mekkora a két vonat sebessége?

155. Egy uszály halad a Dunán a parttal párhuzamosan. Meg akarjuk határozni a hosszát. Ha az uszállyal egy irányban haladunk egyenletes sebességgel, akkor hosszát 250 lépésnek találjuk, ellenkező irányban haladva, az uszály 60 lépés után elhalad mellettünk. Hány lépés az uszály hossza?

156. Egy gépkocsizó-egység kocsijai között motoros küldönc tartja menet közben a kapcsolatot. A motoros az utolsó kocsitól az elsőig 1 perc 20 másodperc, az elsőtől az utolsóig 14 másodperc alatt teszi meg az utat. A gépkocsioszlop hossza 500 m. Milyen sebeséggel halad az oszlop és a küldönc?

157. Négy személy A-ból a 36 km-re lévő B-be utazik; olyan gépkocsijuk van, amelyik óránként 36 km-t tesz meg, és a vezetőn kívül csak két személyt szállíthat. Az utasok közül 2 fiatal, és ők óránként 6 km-t, míg kettő idősebb, akik óránként 4 km-t tesznek meg gyalog. Abban egyeznek meg, hogy a gépkocsi először a két idősebbet elviszi az út egy C pontjáig, ahonnan azok gyalog mennek tovább. A kocsi C-ből azonnal visszafordul, hogy felvegye a két

fiatal utast; velük az út valamely D pontjában találkozik, eddig gyalog jönnek, s innen viszi őket B-be. Hol kell lenniök a C és D pontoknak, hogy a négy utas egyszerre indulva el A-ból, egyszerre érkezzen B-be?

158. Három szám összege 80. A második szám $2\frac{3}{4}$-szerese az elsőnek, a harmadik pedig az első két szám összegének harmada. Melyek ezek a számok?

159. Három szám összege 100. Ha az első számot elosztjuk a másodikkal, a hányados 5, a maradék 1 lesz; ha a harmadik számot osztjuk az elsővel, ugyanaz a hányados is, a maradék is mint az előbb. Melyek ezek a számok?

160. Egy medencébe 3 csapon folyhat a víz. Az első és a második csapon együtt 1,2 óra alatt tudjuk megtölteni a medencét; a második és harmadikon együtt 2 óra alatt; az elsőn és harmadikon együtt 1 óra 30 perc alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét egy-egy csap külön? Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha egyszerre mind a három csapot megnyitják?

161. Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, amelyben két-két oldal összege 26, 32 és 34 egység?

162. Mekkorák annak a négyszögnek az oldalai, amelyben három-három oldal összege 22, 24, 27 és 20 egység?

163. Egy munkát az A és B brigád együtt 9 nap alatt, az A és C brigád együtt 12 nap alatt, a B és C 11 nap alatt végezne el. Hány nap alatt készülnek el, ha mindhárom brigád egyszerre dolgozik?

164. Egy gépkocsi a vízszintes úton 80 km/h, az emelkedőn 56 km/h, a lejtőn 120 km/h sebességgel halad. A 320 km hosszú utat oda 4 óra, vissza 4,25 óra alatt teszi meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok?

165. Egy lóversenyen 3 lóra fogadnak. Ha az első nyer, akkor a reá tett összeg kétszeresét; ha a második nyer, az erre tett összeg négyszeresét; ha a harmadik, az erre tett összeg nyolcszorosát kapják. Mekkora összeget kell tenni egy-egy lóra, hogy bármelyik fusson is be elsőnek, 100 Ft nyeresége legyen a fogadónak?

Paraméteres elsőfokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg x-re és y-ra a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást:

166. *a)* $\begin{cases} x+y=2a; \\ x-y=2b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 8x+5y=9a; \\ 3x-5y=13a. \end{cases}$

167. *a)* $\begin{cases} x+by=c; \\ ax+y=d. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=c+4d; \\ 3x+2y=3c-4d. \end{cases}$

***168.** *a)* $\begin{cases} ax-by=a^2-b^2; \\ ax+by=a^2+b^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2; \\ x+y=2a. \end{cases}$

169. *a)* $\begin{cases} ax+y=a^2; \\ x+ay=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (a+c)x-(a-c)y=2ab; \\ (a+b)y-(a-b)x=2ac. \end{cases}$

***170.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{x+a}{y}=b; \\ \dfrac{x+b}{y}=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2cx}{a}-\dfrac{y}{a}=5c; \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{c}=a. \end{cases}$

***171.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=1; \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}; \\ \dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b}. \end{cases}$

***172.** *a)* $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a; \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m; \\ \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n. \end{cases}$

***173.** *a)* $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=2a; \\ (a^2-b^2)(x-y)=4ab. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=c; \\ (a-b)x+(a+b)y=c. \end{cases}$

***174.** *a)* $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta; \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\operatorname{tg}\alpha+y=\sin(\alpha+\beta); \\ x-y\operatorname{tg}\alpha=\cos(\alpha+\beta). \end{cases}$ $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \quad k\in\mathbf{Z}\right)$

*175. Határozzuk meg azokat az $(a; b; c)$ számhármasokat, amelyekre az

$$y = ax+b;$$
$$y = bx+c;$$
$$y = cx+a$$

egyenletrendszernek van megoldása.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást (**176–182.**):

176. *a)* $\begin{cases} x+y = 3a; \\ x+z = 4a; \\ y+z = 5a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y+z = a; \\ x+z = b; \\ x+y = c. \end{cases}$

177. *a)* $\begin{cases} x+y = a; \\ y+z = b; \\ z+x = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y-z = a; \\ x-y+z = b; \\ -x+y+z = c. \end{cases}$

178. *a)* $\begin{cases} 5x-y+3z = a; \\ 3x+5y-z = b; \\ 3y-x+5z = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-2y-3z = a; \\ x+4y+2z = 7a; \\ 3x-y+z = 0. \end{cases}$

*179. *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = a; \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = b; \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z} = 3; \\ \frac{p}{x}+\frac{q}{y}-\frac{r}{z} = 1; \\ \frac{2p}{x}-\frac{q}{y}-\frac{r}{z} = 0. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 4a_1; \\ x_1+x_2-x_3-x_4 = 4a_2; \\ x_1-x_2+x_3-x_4 = 4a_3; \\ x_1-x_2-x_3+x_4 = 4a_4. \end{cases}$

*181. $\frac{x-y}{z-1} = a; \quad \frac{y-z}{x-1} = b; \quad \frac{z-x}{y-1} = c.$

182. $\begin{cases} x+2y+3z+4v = a; \\ 2x+3y+4z+v = b; \\ 3x+4y+z+2v = c; \\ 4x+y+2z+3v = d. \end{cases}$

*183. Határozzuk meg az összes olyan $(a; b; c)$ valós számhármast, amelyre a következő egyenletrendszernek van az $x=y=z=0$ esettől különböző megoldása.

$$\begin{cases} ax+by+cz = 0; \\ bx+cy+az = 0; \\ cx+ay+bz = 0. \end{cases}$$

184. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete a egység, alapjának és szárának összege b egység. Mekkorák az oldalai? Mikor megoldható a feladat?

185. Kétféle cukorkából, amelyek közül az egyiknek kg-ja a Ft, a másik kg-ja b Ft, m kg keveréket készítünk. A keverék ára kilogramonként c Ft. Hány kg kell a keverékhez a két fajtából?

186. Két vásárló közül az egyik a méter selymet és b méter szövetet vett, és összesen d forintot fizetett. A másik ugyanazokból a fajtákból m méter selymet és n méter szövetet vásárolt, és ugyancsak d forintot fizetett. Mennyi a selyem, illetve a szövet ára méterenként?

187. Egy textilüzem az egyik tervidőszakban meghatározott mennyiségű szövetet tud előállítani. Ha a véggel többet készítenek naponta, akkor n nappal hamarább; ha b véggel kevesebbet, akkor m nappal később készülnek el. Mennyi szövetet akarnak az adott tervidőszakban készíteni, és hány nap alatt?

188. Kétfajta alkoholunk van. Ha az első fajtából a litert, a másikból b litert összekeverünk, akkor k %-os keveréket kapunk. Ha viszont a második fajtából veszünk a litert, és az elsőből b litert, akkor t %-os lesz a keverék. Hány százalékos töménységűek az összetevők?

189. Kétféle konzervet vásárolunk, az egyikből a darabot, a másikból b darabot, összesen f forintért. Árleszállítás folytán az egyik p, a másik q százalékkal olcsóbb lett. Így ugyanazért a konzervmennyiségért csak h forintot fizetünk. Mennyi volt az egyes konzervek ára az árleszállítás előtt?

190. Egy gőzhajó a folyón lefelé t óra alatt ért egyik kikötőből a másikba. Visszafelé ugyanehhez az úthoz a órával többre volt szüksége. Határozzuk meg a folyó sebességét, és a gőzhajó saját sebességét, ha a két kikötő távolsága d km.

191. Két, egymástól a km-re levő turista egyszerre indul A pontból és B pontból az AB egyenesen egy irányba haladva, és b óra múlva találkoznak. Ha szembe mennének, akkor c óra múltán találkoznának. Mekkora a sebességük?

192. Két, egymástól d km távolságra lévő autó indul egymással szemben. Ha az első m perccel előbb indul, mint a második, akkor a másik indulása után a perccel találkoznak; ha viszont a másik indul n perccel előbb, mint az első, akkor az első autó indulása után b perccel találkoznának. Határozzuk meg a két autó sebességét.

193. Nyílt pályán haladó személyvonat ablakából egy d méter hosszú gyorsvonatot látunk elrobogni. Ha a két vonat szembehalad, t_1 másodperc, ha egy irányba, t_2 másodperc alatt halad el a gyorsvonat az ablak előtt. Mekkora a vonatok sebessége?

194. Két munkás együtt dolgozva egy bizonyos munkát b nap alatt végezne el. Az egyik munkás egyedül az egész munkát fele annyi nap alatt tudja elvégezni, mint a másik. Hány nap alatt végezné el a munkát a másik egyedül?

195. A és B együtt m nap alatt végezne el egy munkát. Miután n napig együtt dolgoztak, A-nak távoznia kellett, és B még p napig dolgozott, hogy a munka elkészüljön. Hány nap alatt végeznék el a munkát külön-külön?

196. Egy futópályán két futó tart edzést. Ha egy irányba haladnak, akkor a, ha ellentétes irányba, b másodpercenként találkoznak. Mennyi idő alatt futják végig a pályát?

197. Egy munkát A és B együtt a nap alatt, A és C együtt b nap alatt, B és C együtt c nap alatt végezne el. Hány nap alatt készülnek el, ha mindhárman egyszerre dolgoznak?

198. Egy medencébe három (A, B és C) csapon át folyik a víz. B és C csapok együtt a óra alatt, C és A csapok együtt b óra alatt, A és B csapok c óra alatt töltik meg a medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence egy-egy csapon keresztül? Mennyi idő alatt telik meg, ha egyszerre mindhárom csapot megnyitják?

199. Háromfajta borból, amelyeknek literje a Ft, b Ft és c Ft, n liter keveréket akarunk előállítani. Az első és második fajtából összesen annyit veszünk a keverékhez, mint a harmadikból. Hány litert kell vennünk az egyes fajtákból, hogy a keverék literje d Ft-ba kerüljön?

***200.** Három játékos, A, B és C olyan feltétellel játszik, hogy a vesztesnek a másik kettő pénzét meg kell duplázni. Az első játszmát A, a másodikat B, a harmadikat C veszíti el, és ekkor mindegyiküknek n forintja van. Hány forintja volt az egyes játékosoknak a játék előtt?

201. Az a paraméter mely értékeinél nincs gyöke a következő egyenletrendszereknek?

a) $\begin{cases} ax-5y=9; \\ 2x-3y=15. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2ay=1; \\ (3a-1)x-ay=1. \end{cases}$

202. Az a paraméter mely értékeire van végtelen sok megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} (a+1)x+y=a+1; \\ x+(a+1)y=a+3. \end{cases}$$

Mikor nincs megoldása?

203. Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszernek egyetlen megoldása legyen:

a) $\begin{cases} 2x-y=5; \\ x+3y=4; \\ x+y=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=8; \\ (a+1)x+y=2; \\ 2x+3y=10. \end{cases}$

Ábrázoljuk a három – egyenlettel megadott – függvényt.

204. Az m milyen értékeinél lesz a következő egyenletrendszert kielégítő számpár mindkét tagja pozitív?

a) $\begin{cases} 3x+(2m-3)y=4; \\ -5x+4y=8. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (m+2)x-8y=3m-1; \\ 7x+3y=16. \end{cases}$

205. A k milyen értékei mellett lesz a következő egyenletrendszert kielégítő számpár mindkét tagja negatív?

a) $\begin{cases} 2kx+y=7; \\ 5x-4y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (2+k)x-2y=7k; \\ 4x-y=12. \end{cases}$

Elsőfokú egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket:

206. *a)* $\begin{cases} 4<3x+1; \\ 3x+1<10. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}<1-\dfrac{x+2}{4}; \\ 3x-4>2(x-1). \end{cases}$

207. *a)* $\begin{cases} 5(x+1)+6(x+2) > 9(x+3); \\ 7x-3(2x+3) > 2(x-18). \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-3)(x-4) \leqq (x+1)(x+2); \\ x(x+1)+x(x+2) > (2x-1)(x+3). \end{cases}$

208. *a)* $\begin{cases} 2-\dfrac{5+x}{7} < 1-\dfrac{9-x}{14}; \\ 12-\dfrac{1}{3}\left(47-\dfrac{60}{x}\right) > 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3 \leqq \dfrac{3+4x}{5}-4; \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x) < 2(4-x). \end{cases}$

209. *a)* $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5} \leqq \dfrac{2x+7}{3}-8; \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6} < \dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2} > 4-\dfrac{7-3x}{5}; \\ 7(3x-6)+4(17-x) > 11-5(x-3). \end{cases}$

210. *a)* $\begin{cases} 3x+7 > 2x+1; \\ 2x-8 \leqq \dfrac{1}{3}x+1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-3 \leqq 5x+2; \\ \dfrac{x+6}{5} > 3-2x. \end{cases}$

211. *a)* $\begin{cases} 3x-4 < 2x+5; \\ 7-x > \dfrac{3x+1}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-1 > 4x+3; \\ \dfrac{5-x}{3} < \dfrac{2+x}{5}. \end{cases}$

Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszerek egész megoldásait:

212. *a)* $\begin{cases} 3x-10 > 0; \\ 5\dfrac{1}{3}x-51 < 6x. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7} \geqq 5x; \\ 4x+5-\dfrac{1}{6}\left(25x+29\dfrac{1}{2}\right) < 0. \end{cases}$

213. *a)* $\begin{cases} \dfrac{2x+15}{9} \geqq \dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3}; \\ \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2} < 2x. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2 < \dfrac{2x-8}{6}-\dfrac{18-4x}{3}; \\ 9-\left(\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2}{3}\right) > x. \end{cases}$

214. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x+3)(x+2) \geqq 0$; *b)* $(x-4)(x+3) > 0$;

c) $(x+1)(x-5) \leqq 0$; *d)* $(x-5)(x-3) < 0$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

215. *a)* $\dfrac{x}{x-2} < 0$; *b)* $\dfrac{x}{x-4{,}5} > 0$; *c)* $\dfrac{8-x}{x} \leqq 0$.

216. *a)* $\dfrac{2x+1}{x+7} \leqq 0$; *b)* $\dfrac{2x-3}{x+9} > 0$; *c)* $\dfrac{3x+2}{x+5} \geqq 0$;

d) $\dfrac{4x-7}{x+3} < 0$; *e)* $\dfrac{3x-4}{2x+1} \geqq 0$; *f)* $\dfrac{4x+7}{3x-2} < 0$.

217. *a)* $\dfrac{2x-1}{x+7} \geqq 3$; *b)* $\dfrac{2x+3}{x-5} \leqq -2$;

c) $\dfrac{4x-9}{2-3x} \leqq 1$; *d)* $\dfrac{5x+18}{7-4x} \geqq 4$.

***218.** *a)* $\dfrac{4x-2}{x+2} > 5-x$; *b)* $\dfrac{2}{x-5} > \dfrac{1}{x+2}$;

c) $\dfrac{x-3}{x+1} \geqq \dfrac{x}{x-2}$; *d)* $\dfrac{x-5}{x+3} \geqq \dfrac{x+1}{x-2}$.

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszereket, és ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

219. *a)* $\begin{cases} 2(x-1)+2x > 3x+5; \\ 4x \leqq 5(x+1); \\ x+7 < 3x-2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2(x+3)+5 \geqq 3x-7; \\ x+5 < 2x-1; \\ (x-5)2 > x-9. \end{cases}$

220. *a)* $\begin{cases} 5(x+1)+2x < -3x; \\ x-12 > 2x+7; \\ 4(x+5)+8 \leqq 3x+2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2(x+6)-8 > x+15; \\ 4x < 3x-7; \\ 5x+12 > -3+4x. \end{cases}$

221. Egy kétjegyű számban a tízesek száma kettővel kisebb az egyesek számánál. A szám 21-nél nagyobb, de 36-nál kisebb. Melyik ez a szám?

222. Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a felét, 128-nál nagyobb, de 130-nál kisebb számot kapunk eredményül. Melyik ez a szám?

223. Ha a turista naponta 20 km-rel többet haladna a tervezettnél, akkor 8 nap alatt több mint 900 km-t jutna előre. Ha viszont naponta 12 km-rel kevesebbet haladna, akkor 10 nap alatt se tenne meg 900 km-t. Hány km az egy napra tervezett út?

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a derékszögű koordináta-rendszerben:

224. *a)* $2x+y > 7$; *b)* $3x < 4y-5$.

225. *a)* $2(x+2) \geqq 3(y+1)$; *b)* $x-8 \leqq y+\frac{1}{2}$.

226. *a)* $4y+5x+8 > 0$; *b)* $2(x+2y)-3x < 2y$.

227. *a)* $3x-4y > 3$; *b)* $4x+y-8 < 0$.

228. *a)* $2x \leqq 5y-12$;

b) $5\left(x+\frac{1}{4}\right)+3x-3(y-2) > 5$.

229. *a)* $4\left(x-\frac{1}{3}\right)+3(2y-8) < 10x$;

b) $3x+2-4(y+x) \geqq 3y+1$.

230. *a)* $2y-5 \geqq 0$; *b)* $5x+3 \leqq 0$.

Oldjuk meg a következő kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

231. *a)* $\begin{cases} 2x-y < 3; \\ 4x-2y > -2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x+2 < 2y; \\ 2x-y \geqq 3. \end{cases}$

232. *a)* $\begin{cases} 3y+5x \geqq 15; \\ 6y > -10x+12. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3y < -5x+15; \\ 6y+10x \geqq 12. \end{cases}$

233. *a)* $\begin{cases} 4x-9 > 0; \\ 3x+2 < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4x-9 \leqq 0; \\ 3x+2 \geqq 0. \end{cases}$

234. *a)* $\begin{cases} 3y+15 > 0; \\ 2y+2 \leqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3y+15 < 0; \\ 2y+2 < 0. \end{cases}$

235. *a)* $\begin{cases} 2y-5x < 0; \\ 2y-x > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-5x > 0; \\ 2y-x > 0. \end{cases}$

236. *a)* $\begin{cases} 2y-5x > 0; \\ 2y-x < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2y-5x < 0; \\ 2y-x < 0. \end{cases}$

Hasonlítsuk össze az ebben a feladatban és a **235.**-ben szereplő négy egyenlőtlenségrendszer megoldását.

237. *a)* $\begin{cases} 3x-2y+4 \leqq 0; \\ x+2y > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y+4 \leqq 0; \\ x+2y < 0. \end{cases}$

238. *a)* $\begin{cases} 2y+x < -4; \\ x+2 < 0; \\ y-x+2 > 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y+2 < 0; \\ 4y-6x+24 < 0; \\ y+2x > -2. \end{cases}$

239. *a)* $\begin{cases} y-2 > 0; \\ 2y > 6x+7; \\ y-7 < 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-2 > 0; \\ x-5 < 0; \\ y-x-3 < 0. \end{cases}$

240. *a)* $\begin{cases} y > 0; \\ x > 0; \\ 3y+2x < 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y-2x \leqq 2; \\ y \geqq 0; \\ 2y+x \leqq 4. \end{cases}$

241. *a)* $\begin{cases} y+x < 3; \\ 3y+12 \geqq 4x; \\ x \geqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y > 0; \\ 2y-x < 1; \\ x-3 < 0. \end{cases}$

242. *a)* $\begin{cases} y-x-2 < 0; \\ x > 0; \\ y > 0; \\ 4y+6x < 24. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y-1 > 0; \\ y-4 < 0; \\ y-x < 0; \\ y-x+5 > 0. \end{cases}$

243. *a)* $\begin{cases} 2y-x \leqq 6; \\ 2y-x \geqq 0; \\ 3y+4x \leqq 12; \\ 3y+4x+12 \geqq 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y < 0; \\ x-1 > 0; \\ y+2x > 0; \\ 2y+10 > x. \end{cases}$

244. *a)* $\begin{cases} y-x>0; \\ 4y-x>0; \\ y+x=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x>0; \\ 2y+3x>6; \\ y-x<3; \\ y-x=0. \end{cases}$

245. *a)* $\begin{cases} y+x>0; \\ y+2x<5; \\ y-x-2>0; \\ 2y-3x-10=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y<0; \\ y-x+1<0; \\ 2y+x+2>0; \\ x-2=0. \end{cases}$

246. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszereket.

a) $1 < x+y < 2$;

b) $-1 < 2x-y < 1$.

247. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek a következő egyenlőtlenségrendszerek mindkettejét kielégítik?

$$-2 \leqq y-x \leqq 2;$$
$$-2 \leqq y+x \leqq 2.$$

Ábrázoljuk a megoldásokat.

***248.** Az a, b, c és d számok pozitívak, és tudjuk, hogy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mely $(x; y)$ számpárokra teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer?

$$\frac{a}{b} < \frac{ax-cy}{bx-dy} < \frac{c}{d}.$$

***249.** Mely valós x-ekre teljesül a

$$\frac{2x+a}{3x+a} \geqq 0$$

egyenlőtlenség, amelyben $a<0$?

250. András és Ferenc egy szakasz hosszát becsléssel állapítja meg. Ha András 10%-kal kevesebbre becsüli, akkor eltalálja a pontos értéket. Ha Ferenc becslése 10%-kal több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket. Melyik becslésnél kisebb a hiba abszolútértéke?

***251.** Tegyük fel, hogy $a^2+b^2 \leqq 1$ és $x^2+y^2 \leqq 1$, ahol a, b, x, y valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $ax+by \leqq 1$.

***252.** Határozzuk meg mindazokat az $\frac{a}{b}$ törteket (a, b pozitív egészek), amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségrendszereknek:

$$90 < a+b < 100;$$
$$0{,}9 < \frac{a}{b} < \frac{82}{90}.$$

***253.** Az $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ számok mindegyike pozitív egész szám. Tudjuk, hogy $a_1 > a_0$ és $a_2 = 3a_1-2a_0$; $a_3 = 3a_2-2a_1$; …; $a_{100} = 3a_{99}-2a_{98}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{100} > 2^{99}$.

***254.** Egy háromszög a, b és c oldalainak hossza a következő határok között változhat:

$$0 < a \leqq 1 \leqq b \leqq 2 \leqq c \leqq 3.$$

A lehetséges háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?

***255.** Egy háromszög minden oldalának mértékszáma egész. Mekkorák lehetnek az oldalak, ha összegük 200, a legnagyobb oldal ötszöröse és a másik két oldal háromszoros összege közötti különbség 120-szal nagyobb, mint a legkisebb oldal négyszerese?

***256.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ valós számokra teljesül az alábbi 100 egyenlőtlenség:

$$a_1-3a_2+2a_3 \geqq 0;$$
$$a_2-3a_3+2a_4 \geqq 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{98}-3a_{99}+2a_{100} \geqq 0;$$
$$a_{99}-3a_{100}+2a_1 \geqq 0;$$
$$a_{100}-3a_1+2a_2 \geqq 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100}$.

***257.** Az $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \leqq 0$ egyenlőtlenség minden olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számra fennáll, amelyre

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n \leqq 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor van egy olyan nemnegatív c szám, amelyre

$$a_1 = cb_1;\ a_2 = cb_2;\ \ldots;\ a_n = cb_n.$$

*258. Hány megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4 = 48$ egyenletnek a nemnegatív egészek körében, ha

$$x_1>5, \quad x_2>6, \quad x_3>7 \text{ és } x_4>10.$$

Abszolútértékes kifejezéseket tartalmazó feladatok

259. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens. (Milyen kötőszó kapcsolja össze a rendszer egyenlőtlenségeit?)

a) $|x+2| < 2$; *b)* $|2x-3| < 1$.

260. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens. (Milyen kötőszó kapcsolja össze a rendszer egyenlőtlenségeit?)

a) $|x+2| > 2$; *b)* $|2x-3| > 1$.

261. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

a) $|x| > |x-4|$; *b)* $\frac{2}{3}|x| > 2|x+2|$;

c) $3-|x| \geqq |x+1|$; *d)* $|x-1|+3 < \frac{2}{3}|x+2|$.

262. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldásokat a számegyenesen:

a) $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 3$; *b)* $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 1{,}1$; *c)* $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| < 1{,}01$.

*263. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $|x|-|y| = 1$; *b)* $|x|+|y| = 1$.

*264. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $||x|-|y|| = 1$; *b)* $|x|+|y|+|x+y| = 2$.

*265. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $|x|-|y| < 1$; *b)* $|x|+|y| < 1$.

*266. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak

az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre:

a) $||x|-|y|| < 1$; *b)* $|x|+|y|+|x+y| < 2$.

267. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenlőtlenségeket. Ábrázoljuk a megoldást:

a) $|x+2y| < 3$; *b)* $|x-y| < 1$.

268. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

$$1 < |x+y| < 3.$$

269. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} |x-1|+|y-5| = 1; \\ y = 5+|x-1|. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| - y - 3 = 0; \\ x+|y|-3 = 0. \end{cases}$

270. Mely valós számokra teljesül a következő két egyenlőtlenség egyszerre?

$$5-2x < 7 \quad \text{és} \quad |x-3| > 2.$$

271. Jelöljük meg a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek $(x; y)$ koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x| \leqq |y|$; *b)* $|x| \leqq 2$ és $|y| \leqq 2$.

272. Legyen A a sík azon pontjainak halmaza, amelyek $(x; y)$ koordinátáira fennáll az $y \geqq x^2-1$ egyenlőtlenség. A B halmazba azok a pontok tartozzanak, amelyekre $y \leqq 3-|x|$, a c halmazba pedig azok, amelyekre $|x| \leqq 1$ és $|y-1| \leqq 1$ teljesül. Ábrázoljuk az $(A \cap B) \setminus C$ halmazt.

273. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az $|x|+|y| \leqq 10$ egyenlőtlenséget?

274. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} |x-y| = 3; \\ |x+y| = 3. \end{cases}$$

***275.** Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} |x-y| \leqq 1; \\ |x+y| \leqq 1; \\ x+|y| \leqq 1. \end{cases}$$

***276.** Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő két egyenlőtlenséget:

$$\begin{cases} |x|+|y| < 3; \\ |x+y|+|x-y| < 4. \end{cases}$$

***277.** Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldásokat:

$$1 < |x|+|y| < 2.$$

***278.** Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre a következő egyenlőtlenségrendszer teljesül:

$$\begin{cases} x-|y-1| > -2; \\ x+\left|y-\frac{3}{2}\right| < 2. \end{cases}$$

279. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az $(x; y)$ számpárokat, amelyekre:

$$|x+1|+|x-1| = |y+1|+|y-1|.$$

280. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0.$$

2. Másod- és magasabb fokú egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Másod- és magasabb fokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenletrendszereket:

281. *a)* $\begin{cases} x+y = 5; \\ xy = 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y = 3; \\ xy = 10. \end{cases}$

282. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 5; \\ x-y = -1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y = 8; \\ x-y = 2. \end{cases}$

283. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 1; \\ y+x^2 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 25; \\ x^2-y^2 = 7. \end{cases}$

284. *a)* $\begin{cases} x^2-y = 3; \\ x-y = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy = 8; \\ y = x^2. \end{cases}$

285. *a)* $\begin{cases} 2x+3y = -15; \\ xy = -9. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x+4y = -18; \\ xy = 6. \end{cases}$

286. *a)* $\begin{cases} x-y-3xy = -47; \\ xy = 14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y+3xy = -3; \\ xy+1 = 0. \end{cases}$

287. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 5; \\ xy = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2 = 64; \\ xy = 60. \end{cases}$

288. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2 = 12; \\ x-y = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2 = 8; \\ x-y = 2. \end{cases}$

289. *a)* $\begin{cases} x^2+xy = 40; \\ x-y = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x = 40; \\ x+y = 10. \end{cases}$

290. *a)* $\begin{cases} x^2-xy-y^2 = 19; \\ x-y = 7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x^2-3y^2 = 5; \\ 2x-y+4 = 0. \end{cases}$

291. *a)* $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = -\frac{4}{5}; \\ x-y = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \\ x+y = 5. \end{cases}$

292. *a)* $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ xy=\dfrac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y^2=7; \\ xy^2=12. \end{cases}$

293. *a)* $\begin{cases} xy+y^2=55; \\ 2x+y=17. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1; \\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$

294. *a)* $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3; \\ x+y=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x+4}{y-1}=3; \\ (x-2)(y-4)=6. \end{cases}$

295. *a)* $\begin{cases} x+2y=14; \\ x^2+4y^2=100. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+2y=14; \\ 2xy=48. \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy=24; \\ x^2+4y^2=100. \end{cases}$

296. *a)* $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+x+20y=13; \\ x-y=5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2-48x+4y-4=0; \\ 3x+y=2. \end{cases}$

297. *a)* $\begin{cases} (x-1)(y+2)=0; \\ (x+3)(y-1)=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (x-2)(y-1)=0; \\ 2x^2-3xy+5y-5=0. \end{cases}$

298. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2-3x+5y=0; \\ x^2+y^2+2x-3y=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18; \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$

299. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=136; \\ x^2-y^2=64. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^4-y^4=5; \\ x^2-y^2=1. \end{cases}$

300. *a)* $\begin{cases} x^2+xy=35; \\ y^2+xy=14. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x+y=29; \\ xy-2x-2y=2. \end{cases}$

301. *a)* $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2; \\ xy+y^2=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0; \\ 5x^2-10y^2-5=0. \end{cases}$

302. *a)* $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1; \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=17; \\ x^2-y^2=-16. \end{cases}$

303. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15}; \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}; \\ x^2-y^2=7. \end{cases}$

304. *a)* $\begin{cases} x^2y+xy^2=2; \\ xy+3x+3y=7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-y^2+x-y=10; \\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=16. \end{cases}$

305. *a)* $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{10}{\sqrt{y-1}}=5{,}25; \\ \dfrac{8}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{10}{\sqrt{y-1}}=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}=1\dfrac{3}{4}; \\ \dfrac{2}{\sqrt{x-y}}+\dfrac{6}{\sqrt{x+3y}}=2{,}5. \end{cases}$

Határozzuk meg azokat a valós számokból álló számhármasokat, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszereket:

306. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=29; \\ xy+yz+xz=-10; \\ x+y=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=169; \\ x+y+z=19; \\ x-y=1. \end{cases}$

307. *a)* $\begin{cases} xy+xz+yz=752; \\ x:y:z=3:4:5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+yz=9; \\ yz+xz=5; \\ xy+xz=-16. \end{cases}$

308. $\begin{cases} (x+1)(3-4y)=(6x+1)(3-2y); \\ (4x-1)(z+1)=(x+1)(z-1); \\ (3-y)(z-2)=(1-3y)(z-6). \end{cases}$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg a legbővebb kiindulási halmazt is:

309. *a)* $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=4; \\ \sqrt{xy}=2. \end{cases}$

310. *a)* $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=14; \\ x^2+y^2=2696. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2\sqrt{y-6x}=x+3; \\ \sqrt{y-1}=x+2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{y+4}=5; \\ x+y=28 \end{cases}$

311. *a)* $\begin{cases} x^3-y^3=7; \\ x-y=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

312. *a)* $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^3+y^3=7; \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

313. *a)* $\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=3; \\ x^3+y^3=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y+1=-2xy; \\ (x+y)^4+x=2. \end{cases}$

314. *a)* $\begin{cases} x^2-2xy+2x-1=0; \\ y^2-2xy+2y-1=0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy+x+y=34; \\ x^2+y^2-x-y=42. \end{cases}$

***315.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $x>0$, $y>0$:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=1; \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+\sqrt{xy^3}=336; \\ y^2+x\sqrt{xy}=112. \end{cases}$

***316.** Melyek azok a természetes számokból álló számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletet? $y^3-x^3=91$.

***317.** Írjunk föl y-ra egy olyan egyenletet, amelynek gyökeihez találhatók olyan x értékek, hogy az $(x; y)$ számpár kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x^2+3x+y-2=0; \\ 2x+y+3=0. \end{cases}$$

***318.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

a) $\begin{cases} (x+y)(x^3+y^3)=27; \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{8}{y^2}=2x+y; \\ \dfrac{8}{x^2}=x+2y. \end{cases}$

***319.** Melyek azok a pozitív számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y-2}=14; \\ \dfrac{x^2y^2}{5}-xy=10. \end{cases}$$

***320.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x-2y=1; \\ x^3y+4xy^3=33\,215. \end{cases}$$

***321.** Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesülnek az

$$\begin{cases} x+y+z=9; \\ xy+yz+zx=24 \end{cases}$$

egyenlőségek, akkor az x, y, z számok egyike sem lehet 1-nél kisebb, sem 5-nél nagyobb.

322. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x+y=2; \\ xy-z^2=1 \end{cases}$$

egyenletrendszer valós gyökeit.

***323.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{x}{y}=6; \\ (x^2-y^2)\dfrac{y}{x}=1. \end{cases}$$

324. Határozzuk meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y-z=2; \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

***325.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} |x^2-5x+7|^{|y|}=|y|^{|x^2-5x+7|}; \\ |x^2-5x+7|^{\frac{2}{|x^2-5x+7|}}+|y|^{\frac{1}{|y|}}=2. \end{cases}$$

Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható feladatok

326. Két szám szorzata 60, négyzetük összege 169. Melyik ez a két szám?

327. Két szám összege 25, négyzetük összege 373. Melyik ez a két szám?

328. Két szám különbsége 2, köbük különbsége 98. Melyik ez a két szám?

329. Két szám összege 14, köbük összege 854. Melyik ez a két szám?

330. Két szám négyzetösszege 8,5. A két szám szorzata 3,75. Melyik ez a két szám?

331. Két szám szorzata 36, négyzetük összege 97. Melyik ez a két szám?

332. Két szám összege 10, szorzata 9. Mennyi e számok negyedik hatványainak összege?

333. Egy tört számlálójának és nevezőjének a szorzata 42. Ha a tört számlálóját eggyel megnöveljük, nevezőjét pedig eggyel csökkentjük, a tört reciprokát kapjuk. Melyik ez a tört?

334. Pistától megkérdezték, mikor van a születésnapja. Így válaszolt: „Ha a születésem hónapjának és napjának sorszámát összeszorzom, 120-at, ha számtani közepüket képezem, 13-at kapok." Mikor van Pista születésnapja?

335. Melyik az a kétjegyű szám, amely eggyel nagyobb, mint számjegyeinek négyzetösszege, és 5-tel nagyobb, mint a számjegyek kétszeres szorzata?

336. Melyik az a kétjegyű szám, amely 18-cal nagyobb a számjegyeinek felcserélésével kapott számnál, és $\frac{8}{3}$-szor akkora, mint a számjegyeinek a szorzata?

337. Ha egy kétjegyű számot megszorzunk a számjegyek fölcserélésével nyert számmal, akkor 1612-t kapunk. A keresett szám számjegyeinek négyzetösszege 40. Melyik ez a szám?

338. Ha egy kétjegyű számot elosztunk számjegyeinek összegével, hányadosul 6-ot, maradékul 2-t kapunk. Ha viszont e számot számjegyeinek szorzatával osztjuk el, akkor hányadosul 5-öt, maradékul 2-t kapunk. Melyik ez a szám?

339. Ha egy kétjegyű számot osztunk számjegyeinek összegével, majd az eredeti szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk, és az így nyert számot ismét osztjuk a számjegyek összegével, a két hányados különbsége egyenlő az eredeti szám számjegyeinek különbségével. A két hányados szorzata viszont megadja az eredeti számot. Melyik ez a kétjegyű szám?

340. Melyik az a kétjegyű szám, amely 45-tel nagyobb annál a számnál, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti szám számjegyeit fölcseréljük; és $5\frac{1}{7}$-szer akkora, mint számjegyeinek szorzata?

341. Két szám összege, szorzata, hányadosa ugyanaz. Melyik ez a két szám?

342. Határozzuk meg azt a háromjegyű számot, amelynek harmadik számjegye az elsőnél 2-vel, a második számjegyének négyzete a harmadik négyzeténél 20-szal nagyobb, továbbá ha a számból levonjuk számjegyeinek összegét, olyan számhoz jutunk, amelynek számjegyei az eredeti szám jegyeinél rendre 0-val, 1-gyel, 2-vel kisebbek.

343. Két szám mértani közepe 3-mal nagyobb a kisebbik számnál, számtani közepük 4,5-del kisebb a nagyobbik számnál. Melyik ez a két szám?

344. Két konvex sokszög összes átlóinak száma 158, belső szögeik összege 4320°. Hány oldalúak a sokszögek?

345. Két sokszög belső szögeinek összege fokokban kifejezve 39 híján 21-szerese az összes oldalak és összes átlók száma összegének. Az összes átlók száma 99-cel nagyobb az összes oldalak számánál. Hány oldalúak a sokszögek?

346. Hány oldalú az a két sokszög, amelyben az oldalak számának összege 20, az átlóké 79?

347. Két szám harmonikus közepe 1, számtani közepe 1,5. Melyik ez a két szám?

348. 7500 m távolságon egy kocsi első kereke 1000-rel többet fordul, mint a hátsó. Ha mindkét kerék kerülete 1 m-rel nagyobb lenne, akkor ugyanezen a távon az első kerék 625-tel többet fordulna, mint a hátsó. Mekkorák a kerületek?

349. 1500 méter távolságon egy kocsi hátsó kereke 250-nel többet

fordul, mint az első. Ha mindkét kerék kerülete 0,5 méterrel kisebb volna, akkor a hátsó kerék ezen a távolságon 400-zal fordulna többet, mint az első. Mekkora a kerekek kerülete?

350. Egy 2 km hosszú, kör alakú pályán két korcsolyázó halad egy irányban. A gyorsabbik, aki 1 perccel rövidebb idő alatt fut körül a pályán, mint a másik, 20 percenként elmegy társa mellett. Mekkora a sebességük?

351. Egy teremben minden sorban ugyanannyi szék van. Ha soronként 3-mal több széket helyezünk el, és a sorok számát is megnöveljük kettővel, akkor 364 helyett 480 ülőhely lesz. Hány sor van a kétféle elrendezésben?

352. Egy 150 km hosszú úton az egyik gépkocsi 10 km/h-val gyorsabban haladt, mint a másik, és ezért félórával előbb ért célba, bár egyszerre indultak. Mekkora a két autó sebessége?

353. Egy gépírónőnek120 oldalt kellett legépelnie. Ha óránként 2 oldallal többet írt volna le, két órával hamarabb lett volna készen. Hány óra alatt írta le a szöveget?

354. 8000 m^3 föld elhordásával a munkacsapat 8 nappal előbb lett készen, mert naponta a tervezettnél 50 m^3-rel többet szállítottak el. Hány nap alatt lettek készen, és a tervezett napi teljesítményt hány százalékkal teljesítették túl?

355. Két osztály színházjegyeket vett. Az egyik osztály 384 forintot fizetett a jegyekért, a másik pedig, amelyik 4 darabbal kevesebbet vett, de 3 forinttal drágább jegyeket, összesen 420 forintot fizetett. Hány jegyet vett egyik-egyik osztály, és darabonként milyen áron?

356. Három rugalmas golyót úgy függesztettünk föl, hogy a felfüggesztési pontok egy egyenesen vannak, és két-két golyó érinti egymást. A tömegek: $m_1 = 0{,}4$ kg, $m_2 = 0{,}2$ kg, $m_3 = 0{,}1$ kg. Az m_1 tömegű golyót $h = 5$ cm magasságból elengedjük. Milyen magasra emelkedik az m_3 tömegű golyó, ha az ütközések teljesen rugalmasak?

357. Egy munka elvégzését két brigádra bízták. Először az első dolgozott feleannyi ideig, mint amennyi a második brigádnak az egész munka elvégzésére kellett volna, ezután a második dolgozott a munkán harmadannyi ideig, mint amennyi az első brigádnak kellett volna az egész munka elvégzéséhez. Így a két brigád az egész

munka $\frac{11}{12}$ részét végezte el. A két brigád együtt $3\frac{3}{7}$ óra alatt tudta volna elvégezni a munkát. Hány órára van szükségük külön-külön?

358. Derékszögű háromszög területe 55 cm^2, átfogója $\sqrt{221}$ cm. Mekkorák a befogói?

359. Derékszögű háromszög átfogója $3\sqrt{5}$ méter. Ha az egyik befogót $133\frac{1}{3}$ százalékkal, a másikat $16\frac{2}{3}$ százalékkal növeljük, akkor a két befogó együtt 14 méter hosszú lesz. Mekkorák az eredeti háromszög befogói?

360. Egy téglalap kerülete 85 cm, átlója 32,5 cm. Mekkora a területe?

361. Egy derékszögű háromszög kerülete 24 cm, területe 24 cm^2. Mekkorák az oldalai?

362. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 8 cm-rel több, mint az átfogó hossza. A háromszög kerülete 48 cm. Mekkorák az oldalak?

363. Egy rombusz kerülete 52 cm, területe 120 cm^2. Mekkorák az átlói?

364. Két egymásra helyezett különböző kocka együttes magassága 1,7 m, térfogatuk összege 1,853 m^3. Mekkorák az élek?

365. Egy 1925 m^2 területű téglalap alakú telket 180 m hosszú kerítéssel tudtunk bekeríteni. Mekkorák a telek méretei?

366. A folyó partján levő *A* és *B* városok távolsága 9 km. A hajó az oda-vissza utat összesen 2 óra 15 perc alatt teszi meg. Ha a folyó sebessége kétszer akkora volna, a hajó ugyanezt az utat 3 óra alatt tenné meg. Mekkora a hajó saját sebessége, és mekkora a folyó sebessége?

367. *A* állomásról 13 órakor indult el egy vonat *B* felé. 19 órakor hófúvás miatt meg kellett állnia. A pálya megtisztításához két órára volt szükség. A mozdonyvezető, hogy behozza a késést, az út hátralevő részén a vonat eredeti sebességét 20%-kal növelte. A vonat így 1 óra késéssel ért *B*-be. A következő napon az *A*-ból *B* felé ugyanabban az időpontban induló vonat *A*-tól 150 km-rel távolabb ütközött hótorlaszba, mint az előző napon. Két órai állás után ugyancsak

20%-kal nagyobb sebességgel haladt tovább, de csak $\frac{1}{2}$ órát sikerült behoznia, s így 1,5 óra késéssel érkezett *B*-be. Mekkora a távolság *A* és *B* között?

368. Egy kerékpárverseny útvonala 6 km. Egyik versenyző, nevezzük *A*-nak, 2 perccel előbb ért célba, mint *B*. Ha *A* percenként 0,1 km-rel kevesebbet, *B* pedig ugyanennyivel többet tett volna meg, akkor *B* ért volna 2 perccel előbb a célba. Mekkora a kerékpárosok sebessége?

369. Az egymástól 200 km távolságra levő *A* és *B* városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy vonat. Az a vonat, amely *A*-ból indult, a két vonat találkozása után 3 órával ér *B*-be, a másik pedig a találkozás után 1 óra 20 perccel ér *A*-ba. Mekkora a vonatok sebessége?

370. Az egymástól 600 km-re levő *A* és *B* városokból egyszerre indult el egymással szemben két vonat. 5 óra múlva a vonatok közt a távolság 150 km, és még nem találkoztak. Ha *B*-ből másfél órával előbb indult volna el a vonat, mint *A*-ból, akkor a két vonat az út felénél találkozott volna. Mekkora a vonatok sebessége?

371. Az *A* és *B* pontok közti út emelkedőből és lejtőből áll. Egy kerékpáros – aki a lejtőn óránként 6 km-rel több utat tesz meg, mint az emelkedőn – 2 óra 40 perc alatt ér *A*-ból *B*-be. Visszafelé 20 perccel kevesebb időre van szüksége. Állapítsuk meg a kerékpáros sebességét az emelkedőn és a lejtőn, valamint az út emelkedőjének vagy lejtőjének hosszúságát *A* felől nézve, ha az egész út 36 km.

372. Két test egyenletes sebességgel távolodik egy derékszög egy-egy szárán a csúcsponttól. Az egyik sebessége 3 m/s, a másiké 4 m/s. Kezdetben egymástól való távolságuk 10 m volt, 2 másodperc múlva pedig 20 m. Mekkora távolságra voltak kezdetben a derékszög csúcsától?

***373.** Egy kör kerületére öt számot írtak. Ezután mindegyik számot négyzetre emelték, és a négyzetét megszorozták az óramutató járása szerint rákövetkező számmal, sorba járva a számokat a kör kerületén. Így a következő öt számhoz jutottak:

$$\frac{1}{2};\quad 1;\quad 32;\quad 4\sqrt{2};\quad 2.$$

Mi volt az eredetileg fölírt öt szám?

***374.** Mely x, y természetes számokra lehet az x^2+y és az $x+y^2$ számok mindegyike négyzetszám?

Paraméteres magasabb fokú egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket, és diszkutáljuk a megoldást: (a, b, c, m adott valós számok.):

375. *a)* $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=-2a^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=2a; \\ xy=-3a^2. \end{cases}$

376. *a)* $\begin{cases} x-y=b; \\ xy=2b^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=a+2b; \\ xy=ab+b^2. \end{cases}$

377. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5m^2}{4}; \\ xy=\dfrac{m^2}{2}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{13a^2}{36}; \\ xy=\dfrac{a^2}{6}. \end{cases}$

378. *a)* $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{10a^2}{9}; \\ xy=\dfrac{a^2}{3}. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+y^2=a^2+4b^2; \\ xy=2ab. \end{cases}$

379. *a)* $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y=a; \\ x^2+y^2=c. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x^2+y^2=a; \\ xy=c. \end{cases}$

380. *a)* $\begin{cases} x+y^2=a; \\ y+x^2=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=a; \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=b. \end{cases}$

381. *a)* $\begin{cases} xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a}; \\ xy-\dfrac{x}{y}=a. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=a^2; \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=b^2. \end{cases}$

A következő feladatokban (**382–389**) *a, b, c adott valós számokat jelent.*

382. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $abc \neq 0$:

$$\begin{cases} xy = a; \\ yz = b; \\ zx = c. \end{cases}$$

383. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

a) $\begin{cases} x^2+xy+xz = a; \\ y^2+xy+yz = b; \\ z^2+xz+yz = c. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2+xy-xz = a; \\ y^2+xy-yz = b; \\ -z^2+xz+yz = c. \end{cases}$

***384.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx} = c; \\ \dfrac{xz}{az+cx} = b; \\ \dfrac{yz}{bz+cy} = a. \end{cases}$$

385. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = a^2; \\ y(x+y+z) = b^2; \\ z(x+y+z) = c^2. \end{cases}$$

***386.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha $a \neq -1$, $b \neq -1$ és $c \neq -1$. Mi a megoldhatóság feltétele?

$$\begin{cases} y+z+yz = a; \\ x+z+xz = b; \\ x+y+zy = c. \end{cases}$$

387. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha a, b, c mindegyike pozitív.

$$\begin{cases} yz = ax; \\ zx = by; \\ xy = cz. \end{cases}$$

***388.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, és diszkutáljuk a megoldást, ha $abc \neq 0$:

$$\begin{cases} x(y+z) = a^2; \\ y(x+z) = b^2; \\ z(x+y) = c^2. \end{cases}$$

389. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+y+z = a; \\ xy+yz+zx = 0; \\ xyz = 0. \end{cases}$$

390. Három szám számtani közepe a, a négyzetük számtani közepe b. Ha a számokat x, y, z jelöli, mi lesz az xy, xz, yz számok számtani közepe?

391. Egy kör c méter hosszúságú kerületén két test kering; az egyik t másodperccel hamarabb futja be a kört, mint a másik. Ha egy irányban haladnak, n másodpercenként találkoznak. Mekkora a sebességük?

***392.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha p adott valós szám:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3px+p^2} - \sqrt{y^2+3py+p^2} = x-y; \\ xy = p^2. \end{cases}$$

***393.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha a adott valós szám. Diszkutáljuk a megoldást:

$$\begin{cases} x+y = a(\sqrt{x}-\sqrt{y}), \\ x^2+y^2 = a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2. \end{cases}$$

***394.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges valós x, y, u, v-re és bármely pozitív egész n-re érvényes a következő: Ha

$$x+y = u+v \quad \text{és} \quad x^2+y^2 = u^2+v^2, \quad \text{akkor} \quad x^n+y^n = u^n+v^n.$$

Másod- és magasabb fokú egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszereket! Ábrázoljuk a két egyenlőtlenség közös megoldását a számegyenesen:

395. *a)* $\begin{cases} 2x^2-7x+5>0; \\ x-2<0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^2-x-6>0; \\ x^2-3x-4>0. \end{cases}$

396. *a)* $\begin{cases} (x+3)^2(x-1)<0; \\ x^2-4x+6>x(x-5). \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2-6x+9)(2x-10)<0; \\ 6+x(7-x)<x^2+2x(5-x). \end{cases}$

397. *a)* $\begin{cases} (x-1)(x+2)>0; \\ (x+5)(x+2)<0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (x+3)(x-5)<0; \\ (x-2)(x-4)>0. \end{cases}$

398. $\begin{cases} (x+3)(x-4)\geqq 5(x-3); \\ (2x-1)(x-4)(3x+2)\leqq 0. \end{cases}$

399. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezések értelmezhetők:

a) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2-2x-35}}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-60}{x^2+x+10}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{x^2+25x+114}{x^2+7x+10}}$; *d)* $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}}$.

400. Az m paraméter mely valós értékeire teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer mindkét egyenlőtlensége minden valós x-re?

a) $\begin{cases} x^2+2x+m>0; \\ x^2+2x+m>7. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3<0; \\ (4-m)x^2-3x+m+4>0. \end{cases}$

401. Melyek azok a valós számok, amelyek mindkét következő egyenlőtlenséget kielégítik?

$$\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|<1; \qquad \frac{4}{x-2}<0.$$

402. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $|x^2-4|<2$; *b)* $|x^2-4|<\frac{1}{2}$; *c)* $|x^2-4|<\frac{1}{100}$.

403. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $|x^3-1|<1$; *b)* $|x^3-1|<0{,}5$; *c)* $|x^3-1|<0{,}02$.

404. Írjuk föl, és oldjuk meg a következő egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást a számegyenesen:

a) $(x^2-4)(x^2-1)>0$; *b)* $(x^2-3x+2)(x^2+3x+2)>0$.

405. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

a) $(x^2-2x+3)(x^2+4x+7)>0$;

b) $(x^2-6x+10)(x^2-10x+25)\leqq 0$.

***406.** Mely valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenséget?

$$\frac{10x-2}{x+3}<\frac{3-5x}{x-2}.$$

***407.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\leqq\left|\frac{3-2x}{2+x}\right|.$$

408. Mely valós x-ekre esik az $\dfrac{x^2+3x-1}{4-x^2}$ kifejezés értéke a $[-1;1[$ intervallumban?

409. Igazoljuk, hogy ha a, b pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

410. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^3+b^3\geqq\frac{(a+b)^3}{4}, \quad \text{ha} \quad a>0 \quad \text{és} \quad b>0.$$

411. A p paraméter mely valós értéke mellett igaz tetszőleges valós x-re, hogy

$$\left|\frac{x^2-px+1}{x^2+x+1}\right| < 3?$$

412. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)>g(x)>0$ egyenlőtlenség ekvivalens az $f^2(x)>g^2(x)$; $f(x)>0$; $g(x)>0$ egyenlőtlenségrendszerrel; feltéve, hogy x hozzátartozik mindkét függvény értelmezési tartományához.

413. Legyen M_1 az $x+1 \geqq 0$; M_2 pedig az $x-3 \leqq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza. Írjunk föl egy $ax^2+bx+c \geqq 0$ alakú egyenlőtlenséget úgy, hogy megoldáshalmaza $M_1 \cap M_2$ legyen.

414. A $2x-1 > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza legyen M_1, a $4-3x > 0$ egyenlőtlenségé pedig M_2. Írjunk föl egy olyan $ax^2+bx+c > 0$ alakú egyenlőtlenséget, amelynek megoldáshalmaza $M_1 \cup M_2$ legyen.

415. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $\begin{cases} y > x^2; \\ x > y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y > x^2-5x+6; \\ y < 4. \end{cases}$

416. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségrendszert:

a) $\begin{cases} x > y^2; \\ x < 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x < y^2; \\ -x \leqq y^2; \\ y < 4. \end{cases}$

417. Írjuk föl és oldjuk meg azt az egyenlőtlenségrendszert, amely ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel. Ábrázoljuk a megoldásokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

$$(x^2-x)(y^2-y) > 0.$$

418. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a) $(x^2-1)(y+2) < 0$; *b)* $(1-x^2)(1-y^2) \geqq 0$.

419. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} y \geqq x^2; \\ x-y \geqq -2. \end{cases}$$

420. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. A megoldáshalmaz mely pontjában lesz $x-y$ minimális?

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 5x; \\ y \leqq x-2. \end{cases}$$

421. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 2x; \\ 3x-y \geqq 0. \end{cases}$$

422. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátáira teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-4y \leqq 18; \\ x-y \geqq 2. \end{cases}$$

423. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y \leqq 15; \\ 4x-3y \geqq 38. \end{cases}$$

***424.** Határozzuk meg az összes olyan x, y, n pozitív egész számhármast, amelyben x és y a tízes számrendszerben egyaránt n-jegyű és $x^2=y^3$.

425. Határozzuk meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1; \\ x^2+y^2-6x \leqq 0. \end{cases}$$

Az így meghatározott ponthalmazon keressük meg annak az $(x; y)$ pontnak a koordinátáit, amelyekre $x+y$ a legnagyobb, illetve a legkisebb.

426. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert. Ábrázoljuk a megoldást:

$$\begin{cases} -2 \leqq x+y \leqq 2; \\ -1 \leqq xy \leqq 1. \end{cases}$$

***427.** Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az

$$a+2b+3c \geqq 14$$

egyenlőtlenség, akkor érvényes az

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 14$$

egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Exponenciális és logaritmikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

428. *a)* $\begin{cases} 9^{x+y}=729; \\ 3^{x-y-1}=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 4^{x-y}=16; \\ 2^{xy}=256. \end{cases}$

429. *a)* $\begin{cases} 2^x-2^y = 768; \\ 2^{x-1}+2^{y-1} = 640. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}} = 2; \\ 2y-x = 1. \end{cases}$

430. *a)* $\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1; \\ x+y = 6. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} y^{x^2-8x+15} = 1; \\ \lg(2x-y) = 1. \end{cases}$

431. *a)* $\begin{cases} 14^x-63y = 0; \\ 17^x-87y = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7^x-12y = 0; \\ 3^x-7y = 0. \end{cases}$

432. *a)* $\begin{cases} x^y-y^x = 0; \\ x^2-y^3 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^y=y^x; \\ x^p=y^q. \end{cases}$ (p, q adott valós számok)

***433.** *a)* $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y; \\ y^{\sqrt{y}}=x^4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12}; \\ y^{x+y}=x^3. \end{cases}$

434. *a)* $\begin{cases} xy=40; \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} xy=1000; \\ y^{\lg x}=100. \end{cases}$

435. *a)* $\begin{cases} 3\cdot 3^x-2^y = 5; \\ 5\cdot 3^x+2\cdot 2^y = 23. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2^x+5\cdot 7^y = 7; \\ 2^x-3\cdot 7^y = -1. \end{cases}$

436. *a)* $\begin{cases} 3^x\cdot 5^x = 75; \\ 3^y\cdot 5^x = 45. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7^{x+1}-6^{y+3} = 1; \\ 6^{y+2}-7^x = 5(6^y+1). \end{cases}$

437. *a)* $\begin{cases} x^y=9; \\ \sqrt[y]{324} = 2x^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}; \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$

438. *a)* $\begin{cases} xy=y^x; \\ x^3=y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y} = 12; \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

439. *a)* $\begin{cases} x^{2y} = 16+6\cdot x^y; \\ x^{2y}+5 = y\cdot x^y+5y^2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y} = 457; \\ 6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y} = -890. \end{cases}$

440. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} 9^{x^2} \leqq 3^{-x}; \\ x^2+\dfrac{x}{2} \geqq 0. \end{cases}$$

441. Mely valós számokból álló $(x; y)$ számpárok elégítik ki a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}}+2^{\sqrt{1-y}} \leqq 2; \\ |x|+|y| \leqq 1. \end{cases}$$

442. Bizonyítsuk be, hogy ha $x>0$ és $p>q$ és $p, q \in \mathbf{Z}^+$, akkor

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} > 1+\frac{p}{q}x.$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket. Állapítsuk meg előre a legtágabb kiindulási halmazt. Paraméteres feladatoknál írjuk föl a paraméterre szóló kikötéseket:

443. *a)* $\begin{cases}\lg x+\lg y=5;\\ \lg x-\lg y=3.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\lg x+\lg y=a;\\ \lg x-\lg y=b.\end{cases}$

444. *a)* $\begin{cases}\log_3(2x+y)+\log_3(2x-y)=1;\\ \log_2(2x+y)+\log_2(2x-y)=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\log_2\log_3(x+y)=1;\\ \lg x+\lg y=3\lg 2.\end{cases}$

445. *a)* $\begin{cases}\lg x-\lg y=2;\\ x-10y=900.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x+y)-\lg(x-y)=2\lg 2+\lg 3;\\ \lg(x^2+y^2+10)=2+\lg 3.\end{cases}$

446. *a)* $\begin{cases}\log_2 xy=5;\\ \log_{0,5}\dfrac{x}{y}=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2-\lg 5;\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1.\end{cases}$

447. *a)* $\begin{cases}\log_a x+\log_a y=2;\\ \log_b x-\log_b y=4.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1;\\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$

448. *a)* $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0;\\ x^2-5y^2+4=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_a x+\log_{a^2} y=1{,}5;\\ \log_{b^2} x-\log_b y=1{,}5.\end{cases}$

449. *a)* $\begin{cases}xy=27;\\ x^{\log_3 y}=9.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\lg^2 x+\lg^2 y=7;\\ \lg x-\lg y=2.\end{cases}$

450. *a)* $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2;\\ x^2+y=12.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\log_x ay=p;\\ \log_y bx=q.\end{cases}$

451. *a)* $\begin{cases}\log_a\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=2-\log_a y;\\ \log_b x+\log_b y=4.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\log_a x-\log_{\frac{1}{a}} y=2;\\ \log_{\frac{1}{a}} x+\log_a y=1.\end{cases}$

452. *a)* $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1;\\ 2^x-4\cdot 8^y=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^{\log_3 x}\cdot y^{\log_3 y}=243;\\ x^{\log_3 y}\cdot y^{\log_3 x}=81.\end{cases}$

453. *a)* $\begin{cases}xy=300;\\ x^{\lg y}=9.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^y=y^x;\\ 3x=2y.\end{cases}$

454. *a)* $\begin{cases}\log_{xy}(x^2-y^2)=0;\\ \log_{xy}(x^2+y^2)=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}y=10^{(\lg x)^{\lg x}};\\ \dfrac{1}{\lg y}(\lg x)^{\lg 2x}=10^{(\lg\lg x)^2}.\end{cases}$

455. *a)* $\begin{cases}x^2+y^2=136;\\ \log_{0,5}(x-y)+\log_2\dfrac{\cdot 1}{x+y}=-6.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)-\lg xy-\lg 2=0;\\ (1-2^{x+2})^y=2^{y^2+2x};\end{cases}$

456. *a)* $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\lg x+\dfrac{1}{2}\lg y-\lg(4-\sqrt{x})=0;\\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}}-125\cdot 5^{\sqrt{y}}=0.\end{cases}$

b) $\begin{cases}xy=256;\\ 7\left(\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}\right)=50.\end{cases}$

457. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2;\\ \log_9 x+\log_3 y+\log_9 z=2;\\ \log_{16} x+\log_{16} y+\log_4 z=2.\end{cases}$

458. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszert. A valós számhalmaz mely részhalmaza lesz a legtágabb kiindulási halmaz?

$$\begin{cases}\log_2 x>x-1;\\ |x-1|<1.\end{cases}$$

459. Mely valós x értékekre teljesülnek egyszerre a következő egyenlőtlenségek?

$$\log_{\frac{1}{3}} x+6\log_x 3+1>0;\qquad 0<x\leqq 10.$$

***460.** Keressük meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$x+y>0; \quad x+y\neq 1; \quad x-y>0 \quad \text{és}$$
$$\log_{x+y}(x-y)\geqq 1.$$

***461.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a>1$ és $b>2$, akkor az

$$x^2\log_a 4b+2x\log_a\frac{2}{b}+\log_a\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$$

egyenlőtlenség minden valós x értékre teljesül.

***462.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a\geqq 2; \quad b\geqq 2; \quad c\geqq 2, \quad \text{akkor}$$
$$\log_{b+c}a^2+\log_{c+a}b^2+\log_{a+b}c^2\geqq 3.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

***463.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a>0$, $c>0$, $N>0$, továbbá az a, c, ac, N számok egyike se 1, és $a\neq c$, akkor a

$$b=\sqrt{ac} \quad \text{és}$$
$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}$$

egyenlőségek ekvivalensek.

Trigonometrikus egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

464. *a)* $\begin{cases}x+y=45°;\\ 2\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=120°;\\ \sin x+\sin y=1{,}5.\end{cases}$

465. *a)* $\begin{cases}x-y=60°;\\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\sqrt{3}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=75°;\\ \sin^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

466. *a)* $\begin{cases}\sin(x+y)=0;\\ \sin(x-y)=0.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin(x+y)=0{,}454;\\ \sin(x-y)=0{,}3523.\end{cases}$

467. *a)* $\begin{cases}\sin x+\sin y=\frac{7}{12};\\ \sin x\sin y=\frac{1}{12}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\cos x+\cos y=\frac{14}{15};\\ \cos x\cos y=\frac{1}{5}.\end{cases}$

468. *a)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3};\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=\frac{2\pi}{3};\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

469. *a)* $\begin{cases}\cos x\sin y=0;\\ (\cos x+\sin^2 x)\cos^2 y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0;\\ \sin x\sin y=0.\end{cases}$

470. *a)* $\begin{cases}\sin^2 x-\cos y=1;\\ \sin^2 x+\cos y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2};\\ \cos^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

471. *a)* $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4};\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\sin(x+y)=\frac{1}{2};\\ \sin 2x+\sin 2y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

472. *a)* $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y);\\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}2\cos x+\cos y=1;\\ 2\sin x-\sqrt{3}\sin y=0.\end{cases}$

473. *a)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2;\\ \operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2;\\ 2\cos x\cos y=1.\end{cases}$

474. *a)* $\begin{cases}9\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=4;\\ 2\operatorname{ctg}x+4\operatorname{ctg}y=1.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\cos x-\cos y=0{,}5;\\ \cos 2x+\cos 2y=-1{,}5.\end{cases}$

475. *a)* $\begin{cases}2^{x-2}=4^{y-1};\\ \sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=1-\cos x.\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x^{\operatorname{tg}y}=\frac{1}{8};\\ x^{\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}}=4.\end{cases}$

476. *a)* $\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}=0; \\ \sin x=\sin y. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin \pi x\cos \pi y=0; \\ x+y=0. \end{cases}$

477. *a)* $\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{3}{2}; \\ \cos x-\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{\sin x+\sin y}{2}=\sqrt{\sin x\sin y}; \\ \cos(x+3y)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

478. *a)* $\begin{cases} xy=n, \text{ (n egész szám);} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}=-1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}=1; \\ \sin xy=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

479. *a)* $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{4}{3}; \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin(x-y)=\dfrac{1}{2}; \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

480. *a)* $\begin{cases} \sin x+\cos y=0; \\ \cos x+\sin y=-2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}; \\ \cos x\sin y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

481. *a)* $\begin{cases} \sin 2x+\cos y=0; \\ \cos 2x-\sin y=2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y; \\ \cos^4 x=\cos y. \end{cases}$

482. Az α mely valós értékeire nincs megoldása a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin 2\alpha-1=0; \\ x\sin\alpha+y\cos 2\alpha-1=0. \end{cases}$$

483. Milyen feltétel teljesül az a, a_1, b, b_1 valós paraméterekre, ha azok nullától különbözőek, és

$$\begin{cases} a\sin^2 x+a_1\cos^2 x=b; \\ a_1\sin^2 y+a\cos^2 y=b_1 \end{cases}$$

egyenletek gyökei kielégítik az

$$a\operatorname{tg}x=a_1\operatorname{tg}y$$

egyenletet?

484. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{cases} \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0; \\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0. \end{cases}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{cases} 1+\cos x+\cos y=0; \\ \sin x+\sin y=0 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Oldjuk meg az egyenletrendszert.

485. Ekvivalens-e a következő két egyenletrendszer?

$$\begin{cases} x+y=0; \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=0; \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

486. Mely valós számokból álló (x, y, z) számhármasok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} xy=1; \\ x+y-\cos^2 z=-2. \end{cases}$$

487. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amely egyszerre elégíti ki a következő egyenleteket.

$$\sin\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}=0;$$
$$\sin\sqrt{\log_{\sqrt{2}}x}=0.$$

488. Határozzuk meg $x+y$ értékét, ha tudjuk, hogy

$$\operatorname{tg}x=\frac{n}{n+1} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}y=\frac{1}{2n+1}.$$

489. Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a$ és $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b$. Fejezzük ki $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y$ értékét a és b-vel.

490. Legyen $\cos x+\cos y = a$ és $\sin x+\sin y = b$, ahol $a^2+b^2 > 0$, a és b adott valós számok. Fejezzük ki $\sin(x+y)$ értékét a és b-vel.

491. Mely valós t értékekre teljesül egyszerre a következő két egyenlőtlenség?

$$\cos t \leqq \frac{3}{4} + \frac{\cos 2t}{4};$$

$$\sin t \leqq \frac{5}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

492. Melyek azok a valós számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenletet?

$$(2+\sin 3x)(2-\sin 5y) = 1.$$

493. Az $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ halmaz mely részhalmazán értelmezhető a következő kifejezés?

$$\sqrt{(1-2\sin x)(1+3\cos y)}.$$

494. A $\sqrt{\dfrac{\sin x-1}{\cos x}}$ kifejezés értelmezhető

a) a $-\infty < x < \infty$ intervallumon;

b) a $-\infty < x \leqq 0$ intervallumon;

c) a $\frac{\pi}{2}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(4k+3)$, ($k$ egész) intervallumokon;

d) a $\frac{\pi}{2}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(4k+3)$, ($k$ pozitív egész) intervallumokon;

e) a $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumon.

Döntsük el, melyik a helyes válasz. Indokoljuk a döntést.

495. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a következő kifejezés?

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}}.$$

Határozzuk meg a kifejezés értékkészletét.

496. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$\frac{\sqrt{\cos^2 x-1}}{\sqrt{\cos x+1}}$$

kifejezés?

497. Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelyben – a szokásos jelölésekkel – fennáll

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \quad \text{és}$$
$$\alpha > \beta?$$

498. Határozzuk meg azoknak a valós számokból álló $(x; y)$ számpároknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi; \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi; \\ \sin(x-y) \leqq \sin(x+y). \end{cases}$$

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a kapott ponthalmazt.

499. Keressük meg a koordinátasíkon azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira fennáll a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi; \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi; \\ \cos(x-y) \leqq \cos(x+y). \end{cases}$$

500. Mely valós számpárok elégítik ki a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \pi; \\ 0 \leqq y \leqq \pi; \\ \cos x \leqq \cos y. \end{cases}$$

501. Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelyben – a szokásos jelölésekkel – fennáll a következő két egyenlőség:

$$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2 \quad \text{és}$$

$$\sin\alpha \sin\beta=\frac{3}{4}?$$

4. Lineáris programozási feladatok

502. Melyek azok az egészekből álló $(x; y)$ számpárok, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert?

$$\begin{cases}2y-3x<1;\\ 2y-x>3;\\ 2x+y<11.\end{cases}$$

503. Határozzuk meg azokat a valós számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases}2x+y\leqq 3;\\ y-x\leqq 1;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$$

Hány megoldás van? Írjunk föl három megoldást.

504. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert:

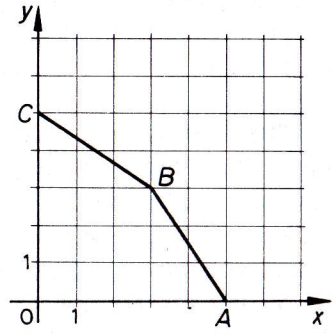
$$\begin{cases}x\leqq 3;\\ 2y+x\leqq 5;\\ y\leqq 2;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0.\end{cases}$$

Van-e olyan megoldás, amely illeszkedik az $x+y=2$ egyenletű

egyenesre? Van-e olyan megoldás, amely illeszkedik az $x+y=5$ egyenletű egyenesre? Keressük meg azt a megoldást, amelyik illeszkedik az $x+y=c$ egyenletű egyenesre, és c maximális. (Másképpen mondva, az $f(x; y)=x+y$, úgynevezett célfüggvény maximumát keressük a megengedett megoldások halmazán. Megengedett megoldásoknak nevezzük a feltételrendszert kielégítő számpárok halmazát.)

505. Írjuk föl azt az egyenlőtlenségrendszert, amelynek megoldásai a *6. ábra* $OABC$ négyszöglemezén levő pontok koordinátái.

Melyik a négyszögnek az a pontja, amelynek koordinátái kielégítik az $x+y=c$ egyenletet, és c értéke maximális? Mikor lesz c értéke minimális? (A legnagyobb vagy legkisebb c értéket eredményező megengedett megoldást optimális megoldásnak nevezzük.)



6. ábra

506. A következő feladatokban megadtunk egy egyenlőtlenségrendszert és egy célfüggvényt. Határozzuk meg a célfüggvény szélsőértékét.

a) $\begin{cases}3x+5y\leqq 15;\\ 5x+2y\leqq 10;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $5x+3y$ maximuma?

b) $\begin{cases}x+y\leqq 4;\\ 3x+y\geqq 8;\\ x+5y\geqq 4;\\ x\leqq 3;\\ y\leqq 3;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $2x+3y$ minimuma?

c) $\begin{cases}x-y\geqq -1;\\ -\frac{1}{2}x+y\leqq 2;\\ x\geqq 0;\\ y\geqq 0.\end{cases}$

Mi lesz $x+y$ maximuma?

d) $\begin{cases}x+y\leqq 50;\\ y+z\geqq 80;\\ x+z\leqq 100;\\ x\geqq 0; \quad y\geqq 0; \quad z\geqq 0.\end{cases}$

Melyik az a megoldás, amelyben x maximális?

507. Egy üzem kétféle terméket gyárt. Havonta legalább 5 vagon készül az I. fajtából, és 2 vagonnal a II. fajtából, legfeljebb 360 munkás részvételével. Az üzem össztermelése 15 vagonnál nem több.

Az I. termékből 1 vagon 60 000 Ft tiszta nyereséget eredményez, és ehhez mindössze 10 munkásra van szükség.

A II. termékből 1 vagon előállítása 80 000 Ft tiszta nyereséget hoz, de ehhez 40 munkásra van szükség.

Hogyan szervezzük meg a termelést, hogy a nyereség havonta *a)* félmillió Ft; *b)* másfélmillió Ft; *c)* a lehető legnagyobb legyen?

508. Egy összejövetelre szendvicseket készítünk, mégpedig két fajtát. Az I. fajtához 2 dkg vaj, 2 dkg sonka, 3 dkg franciasaláta és egy szelet kenyér kell, a II. fajtához pedig 1 dkg vaj, 3 dkg sonka, 2 dkg sajt és egy szelet kenyér. Kenyér van korlátlanul, de a többi összetevőből csak a következő mennyiségek állnak rendelkezésünkre: 50 dkg vaj, 80 dkg sonka, 60 dkg franciasaláta és 40 dkg sajt. Maximálisan hány szendvicset készíthetünk?

509. A III. b osztály a klubestre szendvicseket készít. Egy sajtos szendvicshez 5 dkg kenyér, 1 dkg vaj, és 2 dkg sajt kell, egy szalámishoz 5 dkg kenyér, $\frac{5}{3}$ dkg vaj és 1 dkg szalámi. Rendelkezésre áll 2 kg kenyér, fél kg vaj, 60 dkg sajt és 20 dkg szalámi.

Hány szendvics készíthető maximálisan, és hány lesz közöttük a sajtos? Ha a sajtost 1,40 Ft-ért, a szalámist 1,90 Ft-ért adják, mikor lesz a legtöbb a bevétel?

510. Egy űrhajós kétféle ételt vihet magával. Összetételük: Az I. fajtának 40%-a szénhidrát, 20%-a fehérje és 40%-a víz. A II. fajtának 40%-a szénhidrát, 50%-a zsír és 10%-a víz. 100 gramm szénhidrát vagy zsír, vagy fehérje energiatartalma rendre 1680 J, 4200 J, illetve 3360 J. Az űrhajós napi minimális szükséglete 400 gramm víz és 20 160 J. A kalóriamennyiségben a szénhidrát, a zsír és a fehérje aránya 2 : 1 : 1 kell, hogy legyen. Az I. fajta étel térfogata 100 grammonként négyszer akkora, mint a másiké. Az I. fajta étel kétszer olyan gyorsan szívódik föl, mint a másik. Naponta minimálisan hány gramm ételt kell elfogyasztania az űrhajósnak?

Milyen összetétel esetén lesz a magával vitt étel térfogata minimális?

Milyen esetben lesz a felszívódás ideje minimális? Van-e olyan összetétel, amely mindhárom minimumot egyszerre biztosítja?

511. Három zöldségbolt két tsz-től rendelhet burgonyát. Az egyik tsz-nek 8 t, a másiknak 7 t a készlete. Az *A* bolt 5, a *B* bolt 6, a *C* bolt 4 tonnát igényel. A szállítási költség az *A* boltba az I. tsz-ből 1500, a II.-ból 1000 Ft tonnánként, *B* bolt esetén ugyanezek a költségek 2500 Ft, illetve 500 Ft, *C* esetén 1000 Ft, illetve 1500 Ft. Melyik tsz-ből melyik boltba szállítsák a burgonyát, ha azt akarják, hogy a szállítási költség a lehető legkisebb legyen?

512. Az állatállomány etetésében két takarmányféleség között választhatunk. Az első 10%-ot tartalmaz az *A* tápanyagból, 10%-ot a *C*-ből, 20%-ot a *D*-ből; a második 10%-ot a *B*-ből, 20%-ot a *C*-ből, 10%-ot a *D*-ből. Tapasztalatból tudjuk, hogy egy-egy állatnak az egyes tápanyagokból naponta rendre legalább 0,4 kg; 0,6 kg; 2 kg; 1,7 kg-ot kell kapnia. Határozzunk meg olyan takarmányozási tervet, amelynek költsége minimális, ha az első fajta takarmány kg-ja 2 Ft, a másiké 0,5 Ft.

***513.** Egy munkahelyen a munka zavartalan elvégzéséhez négy napszakban legalább a következő létszámokra van szükség: 0 órától 6 óráig: 20 fő; 6–12 óráig: 40 fő; 12–18 óráig: 30 fő; 18–24 óráig: 25 fő. A dolgozók egyfolytában 12 órát dolgoznak, utána 36 óra pihenőjük van. Mekkora az a legkisebb létszám, amely mellett a munkát meg lehet szervezni?

***514.** Egy üzem négyféle terméket gyárt. Az egyes termékeket két gépen munkálják meg, és tapasztalatból tudják, hogy az I. terméknek a megmunkálásához az 1. gépen 1 perc, a 2. gépen 1 perc szükséges; a II. termék esetén az 1. gépen 2 perc; a III. termék esetén a 2. gépen 3 perc; a IV. termék esetén pedig az 1. gépen 1 perc, a 2. gépen 1 perc szükséges. Az 1. gép naponta 450 percig, a 2. gép 300 percig működik. A négy termék tiszta hozama rendre 2, 2, 3, 2 egység. Hogyan tervezzék meg a gyártást, hogy

a) maximális tiszta hozamra tegyenek szert;

b) maximális mennyiséget termeljenek?

***515.** Jakab testvérével, Jánossal és annak fiával Dániellel családi óragyárat létesít, ahol négyféle órát gyárthatnak. Az 1. fajta óra elkészítéséhez Jakabnak 2 órát, Jánosnak 1 órát és Dánielnek 3 órát

kell dolgoznia. A 2. fajtához 2 óra, 2 óra, 1 óra kell, a 3.-hoz 1 óra, 1 óra, 3 óra, a 4.-hez 3 óra, 4 óra, illetve 1 óra. Egy héten Jakab 50 órát, János 60 órát, Dániel 40 órát dolgozik. Az egyes órákon az előbbi sorrendben 6, 4, 5, illetve 8 egység nyereség képződik. Hány darabot gyártsanak az egyes fajtákból hetenként, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen; ha még az is ismeretes, miszerint az 1. és 2. fajtából együtt heti 6 darabnál többet nem tudnak eladni?

VI. KOMBINATORIKA

1. Permutációk

1. Anna, Bea, Csilla és Dóra együtt megy moziba. Hányféleképpen helyezkedhetnek el egymás mellett lévő négy széken? Írjuk le a lehetséges elhelyezkedéseket.

2. Írjuk fel a DIÁK szó betűit minden lehetséges sorrendben. Hány értelmes magyar szó keletkezett?

3. Négy labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással. Hányféle sorrendben végezhetnek a csapatok?

4. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

5. Egy futóversenyen nyolc futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges?

6. Hány olyan 1-gyel kezdődő ötjegyű számot lehet felírni az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelyeknek az utolsó számjegye 5, ha a felírás során egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk?

7. Hány 15-tel kezdődő ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

8. Hány 5-tel osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

9. Hány 5-tel osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

10. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

11. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?